

Systeme d'equations du premier degre

Définition

Définition: *Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues est un ensemble de deux équations dont on recherche une solution commune.
Ces solutions, si elles existent, sont des couples de réels.*

Exemple: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ est un système d'équations vérifiées pour $x = 1$ et $y = 2$.

Méthode de résolution des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

Les méthodes de résolution des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues vont être rappelées sur base de l'exemple suivant.

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 10y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Méthode de substitution

La méthode de substitution consiste à isoler une inconnue d'une équation, de la remplacer dans les deux autres. On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues qui peut être résolu en répétant l'opération.

Exemple: Dans le cas de notre système, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 10y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ 2x - y = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ 2(5 - 10y) - y = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ 10 - 20y - y = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ -21y = -7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

En substituant cette valeur de y issue de la dernière équation dans la première, on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La solution du systèmes est donc : $S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$

Cette méthode a l'inconvénient de souvent introduire des fractions (et donc des risques d'erreur de calcul)

Méthode de comparaison

La méthode de comparaison est très similaire à la méthode de substitution. Elle consiste à isoler la même inconnue des deux équations et à égaliser les deux valeurs obtenues.

Exemple: Dans le cas de notre système, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 10y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ x = \frac{3+y}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ 5 - 10y = \frac{3+y}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ 10 - 20y = 3 + y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ -21y = -7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

En substituant cette valeur de y issue de la dernière équation dans la première, on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La solution du systèmes est donc : $S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$

Méthode par combinaison linéaire

La méthode de combinaison linéaire est basée sur la propriété : "Si l'on remplace une équation d'un système par une combinaison linéaire¹ des autres équations du système, le système reste inchangé".

On cherche donc, en multipliant une équation par un coefficient et une autre par une autre, et en sommant les deux nouvelles équations, éliminer un inconnue. Si l'on effectue cette opération sur les trois équations de manière à effectuer la même inconnue, on se ramène à un système de deux équations à eux inconnues.

1. Soient deux "êtres" mathématiques quelconques u_1 et u_2 et deux nombres réels a_1 et a_2 . On appelle combinaison linéaire de u_1 et u_2 , l'expression $a_1u_1 + a_2u_2$

Dans le cas de notre système :

$$\left\{ \begin{array}{l|l|l} x + 10y = 5 & 2 & 1 \\ 2x - y = 3 & -1 & 10 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 20y - 2x + y = 10 - 3 \\ x + 10y + 20x - 10y = 5 + 30 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 21y = 7 \\ 21x = 35 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

La solution du systèmes est donc : $S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$

On obtient de cette manière directement le résultat. Il est donc clair que cette technique est beaucoup plus rapide que la précédente.

Exercices

Résoudre les systèmes d'équations suivants (varier les techniques)

1. $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 5y = 9 \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{l} 3x - 7y = -2 \\ 4x + 6y = 5 \end{array} \right.$
3. $\left\{ \begin{array}{l} 3x - 10y = -11 \\ 4y + 5x = 23 \end{array} \right.$
4. $\left\{ \begin{array}{l} 3x = 7 + y \\ 7y = 1 - 4x \end{array} \right.$
5. $\left\{ \begin{array}{l} x + 8y = 9 \\ 2x - 5y = -24 \end{array} \right.$
6. $\left\{ \begin{array}{l} 6x - 3y = -36 \\ 9x = -31 - 7y \end{array} \right.$
7. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{3} + \frac{z}{2} = -3 \\ \frac{t}{2} - \frac{z}{5} = 5 \end{array} \right.$

Les solutions sont :

1. Sol : $\{(-4, 5)\}$
2. Sol : $\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$
3. Sol : $\{(3, 2)\}$
4. Sol : $\{(2, -1)\}$
5. Sol : $\{(-7, 2)\}$
6. Sol : $\{(-5, 2)\}$
7. Sol : $\{(-10, 6)\}$