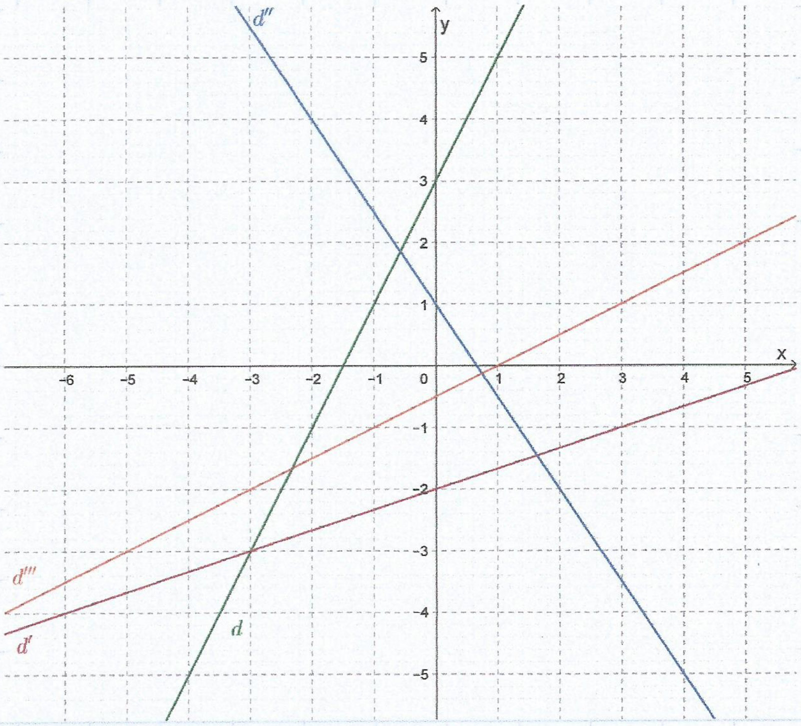
Droites : exercices supplémentaires : Solutions

1. Déterminer, par lecture graphique, les équations des droites suivantes. Préciser la valeur de l'ordonnée à l'origine et de la pente de chaque droite.



$\underline{d}$: $p = 3$, $m = 2$ $\qquad y = 2x + 3$

$\underline{d'}$: $p = -2$, $m = \frac{1}{3}$ $\qquad y = \frac{1}{3}x - 2$

$x - 3y - 6 = 0$

$\underline{d''}$: $p = 1$, $m = -\frac{3}{2}$ $\qquad y = -\frac{3}{2}x + 1$

$3x + 2y - 2 = 0$

$\underline{d'''}$: $p = -\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$ $\qquad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$x - 2y - 1 = 0$

2. On donne les points $A(-3,-5)$, $B(1,6)$, $C(4,2)$ et $D(1,2)$.
Ecrire les équations des droites AB, BC, BD et CD.

$\underline{AB}$: $m_{AB} = \dfrac{6+5}{1+3} = \dfrac{11}{4}$

$AB \equiv y + 5 = \dfrac{11}{4}(x+3)$

$\Leftrightarrow 4y + 20 = 11x + 33$

$\Leftrightarrow 11x - 4y + 13 = 0$

$\underline{BC}$: $m_{BC} = \dfrac{2-6}{4-1} = -\dfrac{4}{3}$

$BC \equiv y - 6 = -\dfrac{4}{3}(x-1)$

$\Leftrightarrow 3y - 18 = -4x + 4$

$\Leftrightarrow 4x + 3y - 22 = 0$

$\underline{BD}$: $m_{BD} = \dfrac{2-6}{1-1} = -\dfrac{4}{0}$

imp $\to$ dte // Oy

$BD \equiv x = 1$

$\underline{CD}$ $m_{CD} = \dfrac{2-2}{1-4} = \dfrac{0}{-3} = 0$

$CD \equiv y - 2 = 0(x-4)$

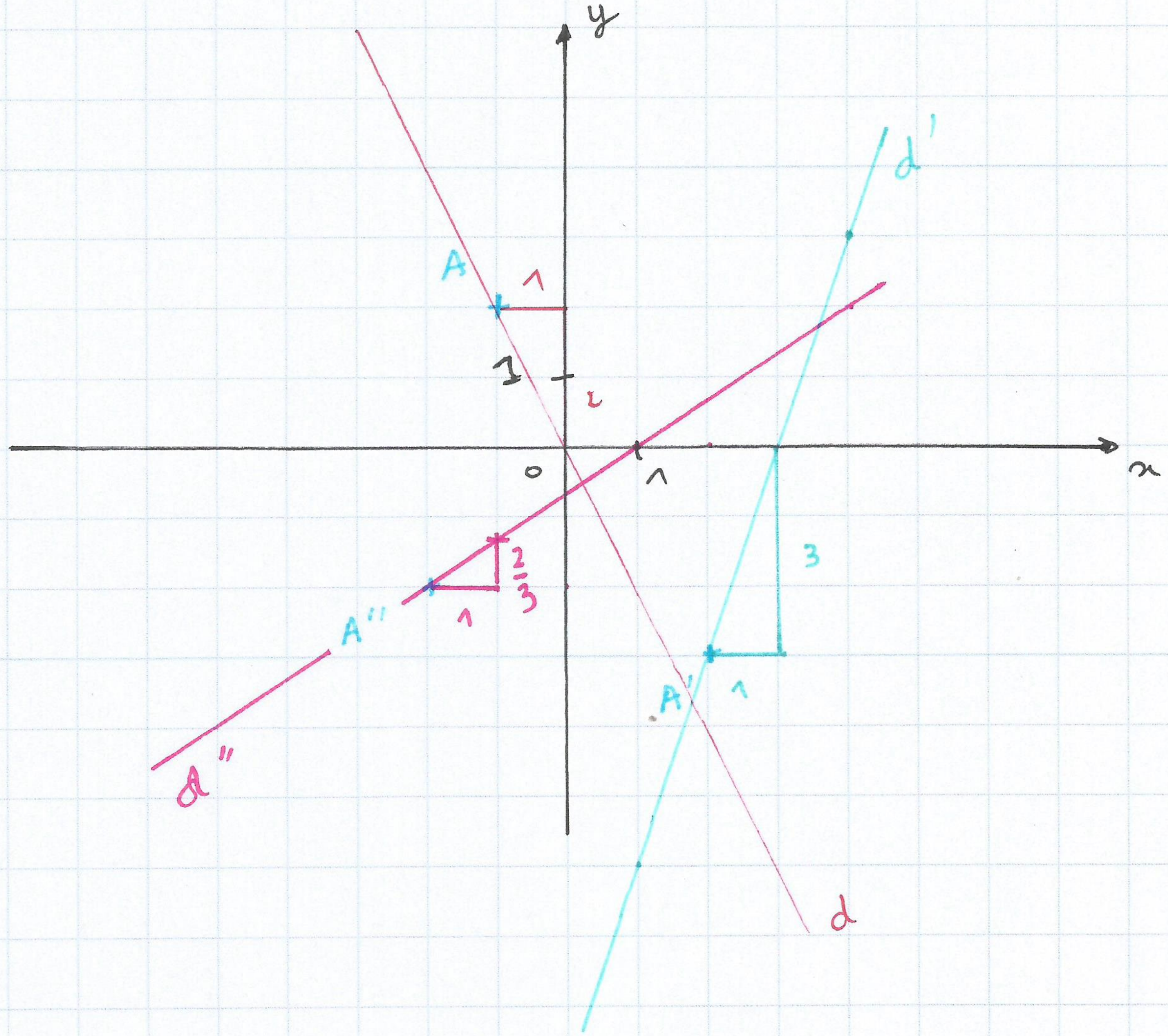
$\Leftrightarrow y = 2$

3. Tracer les droites suivante et donner leur équation.

(a) d est la droite passant par le point $A(-1;2)$ et de pente -2 ;

(b) d' est la droite passant par le point $A'(2;-3)$ et de pente 3 ;

(c) d'' est la droite passant par le point $A''(-2;-2)$ et de pente $\frac{2}{3}$.



$\bullet\ d \equiv y-2 = -2(x+1) \iff y = -2x - 2 + 2$

$\iff y = -2x$

$\bullet\ d' \equiv y+3 = 3(x-2) \iff y = 3x - 6 - 3$

$\iff y = 3x - 9$

$\bullet\ d'' \equiv y+2 = \frac{2}{3}(x+2) \iff y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} - 2$

$\iff y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$\iff 2x - 3y - 2 = 0$

4. On considère les droites suivantes définies par leurs équations :
$d_1 \equiv y = 2x + 3$, $d_2 \equiv y = -\frac{1}{2}x$, $d_3 \equiv y = -1$ et $d_4 \equiv x = 2$.

(a) Le point $A(2;-1)$ appartient-il aux droites d_1, d_2, d_3 et d_4 ?

$d_1 \rightarrow -1 \overset{?}{=} 2.2 + 3$ NON

$d_2 \rightarrow -1 \overset{?}{=} -\frac{1}{2}(2)$ OUI

$d_3 \rightarrow -1 \overset{?}{=} -1$ OUI

$d_4 \rightarrow 2 \overset{?}{=} 2$ OUI

(b) Le point $B(-2;-1)$ appartient-il aux droites d_1, d_2, d_3 et d_4 ?

$d_1 \rightarrow -1 \overset{?}{=} 2(-2) + 3$ OUI

$d_2 \rightarrow -1 \overset{?}{=} -\frac{1}{2}(-2)$ NON

$d_3 \rightarrow -1 \overset{?}{=} -1$ OUI

$d_4 \rightarrow -2 \overset{?}{=} 2$ NON

5. On donne les points $A(2;9)$, $B(-3;-2)$ et $C(8;1)$.

(a) Donner l'équation ~~réduite~~ de la droite BC ;

$$m_{BC} = \frac{1+2}{8+3} = \frac{3}{11} \Rightarrow BC \equiv y+2 = \frac{3}{11}(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 11y + 22 = 3x + 9 \Leftrightarrow 3x - 11y - 13 = 0$$

(b) I est le milieu de $[AB]$, calculer les coordonnées de I.

$$I : \left(\frac{2-3}{2} ; \frac{9-2}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2} , \frac{7}{2} \right)$$

(c) Donner l'équation de la droite d, passant par I et parallèle à BC.

$$m_d = m_{BC} = \frac{3}{11}$$

$$d \equiv y - \frac{7}{2} = \frac{3}{11}\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 11y - \frac{77}{2} = 3x + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 22y - 77 = 6x + 3 \Leftrightarrow 6x - 22y + 80 = 0$$

(d) J est le milieu de $[AC]$. Calculer les coordonnées de J et vérifier par calcul que J appartient à la droite d.

$$J : \left(\frac{8+2}{2} , \frac{9+1}{2} \right) = (5,5)$$

$$J \in d \Leftrightarrow 6.5 - 22.5 + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow 30 - 110 + 80 \overset{?}{=} 0 \quad \text{OK.}$$

6. Soit d la droite d'équation $y = 2x - 3$. On considère les points $A(1;3)$, $B(-4;2)$ et $C(-2;-3)$.

(a) Déterminer l'équation de la droite d_1 perpendiculaire à d passant par A.

$d_1 \perp d \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_d}$ avec $m_d = 2$

$\Rightarrow d_1 \equiv y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1)$

$\Leftrightarrow 2y - 6 = -x + 1$

$\Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0$

(b) Déterminer l'équation de la droite d_2 perpendiculaire à AB passant par C.

$d_2 \perp AB \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_{AB}}$

avec $m_{AB} = \frac{2-3}{-4-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow m_2 = -5$

$d_2 \equiv y + 3 = -5(x + 2)$

$\Leftrightarrow y = -5x - 10 - 3$

$\Leftrightarrow y = -5x - 13$

7. Ecrire l'équation de la médiatrice du segment $[PQ]$ si $P(-3,2)$ et $Q(5,3)$.

La médiatrice de $[PQ]$:

$$\begin{cases} \text{passe par le milieu } M \text{ de } [PQ] \\ \text{est perpendiculaire à } PQ \Rightarrow m = -\dfrac{1}{m_{PQ}} \end{cases}$$

- $M : \left(\dfrac{5-3}{2}, \dfrac{3+2}{2} \right) = \left(1, \dfrac{5}{2} \right)$

- $m_{PQ} = \dfrac{3-2}{5+3} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow m = -8$

$$\text{med}_{PQ} \equiv y - \frac{5}{2} = -8(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2y - 5 = -16(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2y = -16x + 16 + 5$$

$$\Leftrightarrow 16x + 2y - 21 = 0$$

8. Dans chacun des cas, déterminer si les droites d_1 et d_2 sont parallèles, perpendiculaires ou quelconques. Dans le cas où elles ne sont pas parallèles, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

(a) $d_1 \equiv y = -2x + 1$ et $d_2 \equiv 6x + 3y - 2 = 0$

$m_1 = -2 \qquad d_2 \equiv y = -2x + \frac{2}{3}$

$\rightarrow m_2 = -2$

$m_1 = m_2 \Leftrightarrow d_1 // d_2$

(b) $d_1 \equiv y = \frac{3}{2}x - 2$ et $d_2 \equiv 2x + 3y - 7 = 0$

$m_1 = \frac{3}{2} \qquad d_2 \equiv 3y = -2x + 7$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

$\rightarrow m_2 = -\frac{2}{3}$

$m_1 = -\frac{1}{m_2} \Leftrightarrow d_1 \perp d_2$

← var. éliminée

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c|c} x & y \\ 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{array}$$

$$x : \left\{\begin{array}{l} 6x - 4y = 8 \\ -6x - 9y = -21 \end{array}\right. \qquad y : \left\{\begin{array}{l} 9x - 6y = 12 \\ 4x + 6y = 14 \end{array}\right.$$

$0x - 13y = 13 \qquad 13x + 0y = 26$

$\Leftrightarrow y = -1 \qquad \Leftrightarrow x = 2$

$I(2, 1)$

(c) $d_1 \equiv y = \frac{2}{3}x - 1$ et $d_2 \equiv y = \frac{5x+7}{9}$

$m_1 = \frac{2}{3}$, $m_2 = \frac{5}{9}$ $\Rightarrow d_1 \not\parallel d_2$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 3 \\ 5x - 9y = -7 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ 5 & -9 \\ -2 & 3 \end{array}$$

$$x : \left\{\begin{array}{l} 10x - 15y = 15 \\ -10x + 18y = 14 \end{array}\right. \qquad y : \left\{\begin{array}{l} -18x + 27y = -27 \\ 15x - 27y = -21 \end{array}\right.$$

$$0x + 3y = 29 \qquad -3x + 0y = -48$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{29}{3} \qquad \Leftrightarrow x = 16$$

$$\Rightarrow I : \left(16, \frac{29}{3}\right)$$

9. Dans un repère, on considère les points $A(2,1)$, $B(3,0)$ et $C(2,2)$ ainsi que la droite d d'équation $y = -\frac{1}{3}x + 2$. Démontrer que les droites OA, BC et d sont concourantes.

- $\underline{OA}$: $m_{OA} = \frac{1}{2} \iff OA \equiv y = \frac{1}{2}x$

- $\underline{d \cap OA}$: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \begin{array}{|c|c} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{array}$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x - 3y = -6 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ 2x + 6y = 12 \end{cases}$$

$$-5y = -6 \qquad\qquad 5x = 12$$

$$\iff y = \frac{6}{5} \qquad\qquad \iff x = \frac{12}{5}$$

$\Rightarrow I : \left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$

- $\underline{BC}$: $m_{BC} = \frac{2-0}{2-3} = -2$

$BC \equiv y = -2(x-3) \iff y = -2x + 6$

- Si d, OA et BC alors $I \in$ aux trois droites. On a déjà montré qu'il appartenait à d et OA (cf calcul ci-dessus)

$I \in BC \iff \frac{6}{5} \overset{?}{=} -2 \cdot \frac{12}{5} + 6$

$\iff \frac{6}{5} \overset{*}{=} \frac{-24+30}{5}$ oui

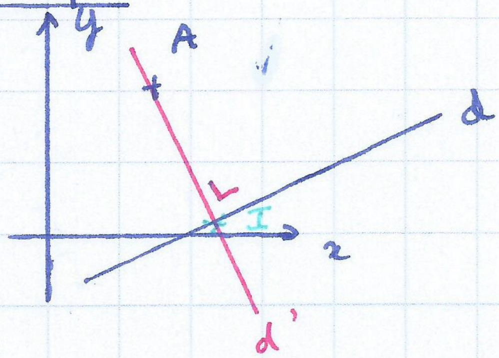
10. Calculer la distance entre les points $A(-3,5)$ et $B(2,4)$.

$$d(A,B) = \sqrt{(-3-2)^2 + (5-4)^2}$$

$$= \sqrt{26}$$

11. Calculer la distance du point $A(-3,-2)$ à la droite d d'équation $3x+4y-8=0$.

Principe



• $d' \perp d$ et $\ni A$

$d \equiv y = \underbrace{-\frac{3}{4}}_{m_d} x + 2$

$\Rightarrow m_{d'} = \frac{4}{3}$

$d' \equiv y+2 = \frac{4}{3}(x+3)$

$\Leftrightarrow 3y+6 = 4x+12$

$\Leftrightarrow 4x - 3y + 6 = 0$

• $I = d \cap d'$

$$\begin{cases} 3x+4y=8 \\ 4x-3y=-6 \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{array}$$

$$\begin{cases} 12x+16y=32 \\ -12x+9y=+18 \end{cases}$$
$25y = 50$

$\Leftrightarrow y = 2$

$$\begin{cases} -9x-12y=-24 \\ -16x+12y=24 \end{cases}$$
$-25x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow I(0,2)$

• $d(A,d) = d(A,I) = \sqrt{(-3-0)^2+(-2-2)^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$