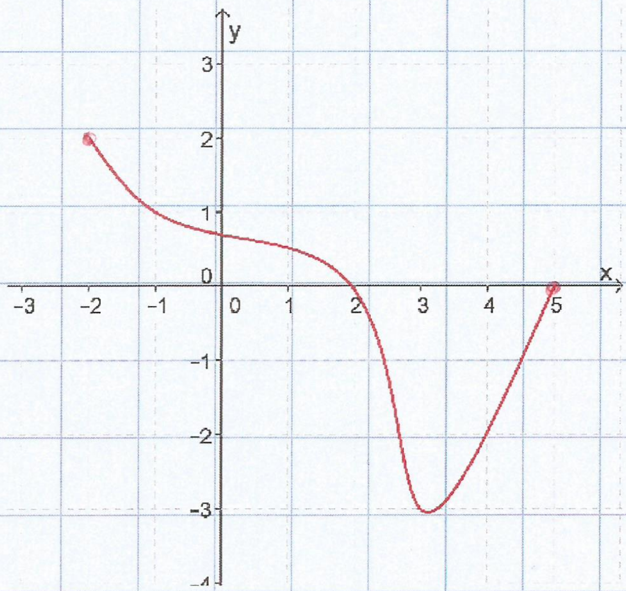
6. Soit la fonction $f$ donnée par sa représentation graphique




(a) Préciser l'intervalle sur lequel la fonction est définie ;

$[-2, 5]$

(b) Déterminer graphiquement les images des nombres -1,2 et 4 par la fonction ;

$f(-1) = 1$ , $f(2) = 0$ , $f(4) = -2$

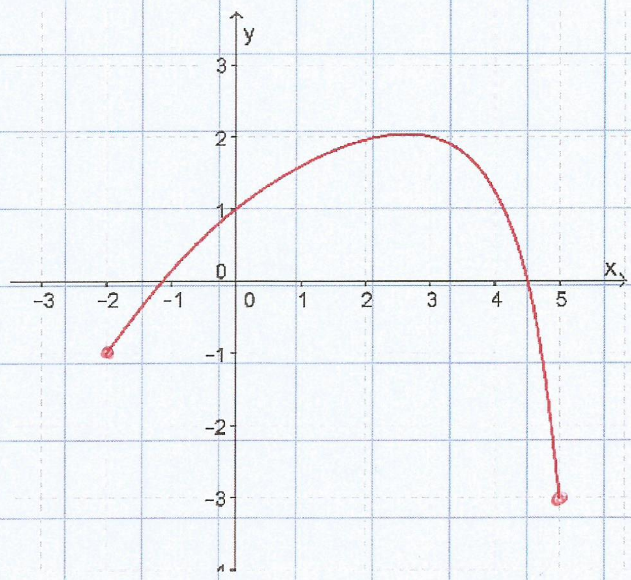
(c) Déterminer graphiquement les antécédents de -3, 0 et 2 par la fonction.

ant de $-3$ : $3$

ant de $0$ : $2 ; 5$

ant de $2$ : $-2$

7. Soit la fonction $f$ donnée par sa représentation graphique




(a) Préciser l'intervalle sur lequel la fonction est définie ;

$[-2, 5]$

(b) Déterminer graphiquement les images des nombres -2, 0 et 3 par la fonction ;

$f(-2) = -1$ , $f(0) = 1$ , $f(3) = 2$

(c) Déterminer graphiquement les antécédents de -3, 1 et 3 par la fonction.

ant de $-3$ : 5

ant de 1 : 0 ; 4,2

ant de 3

(a) Courbe 1 :

| | |
|---|---|
| – Faux<br>– Vrai<br>– Faux<br>– Vrai<br>– Vrai<br>– Vrai | – $dom_f : [-10, 10]$<br>– $im_f : [-5, 6]$<br>– $f(3) = 1$<br>– les racines de $f$ : $x$=-8.$x$=-2.$x$=2 et $x$=7<br>– les solutions de l'équation $2f(x)+6 = 0$ : $x$=-10 et $x$=8 |

Courbe 2 :

| | |
|---|---|
| – Faux<br>– Faux<br>– Vrai<br>– Vrai<br>– Vrai<br>– Faux | – $dom_f : [-10, 4[\cup]4, 10[$<br>– $im_f : ]-6, 6]$<br>– $f(3) \approx -1,2$<br>– les racines de $f$ :$x$=-9. $x$=-2. $x$=2 et $x$=6<br>– les solutions de l'équation $2f(x)+6 = 0$ : $x$=-10 et $x \approx$ 5,2 |

9. Soit la fonction $f(x) = x - 3$.

(a) Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{2}{5}\right)$ :

$f(0) = 0 - 3 = -3$

$f(3) = 3 - 3 = 0$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{8}{3}$

$f\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{17}{5}$

(b) Calculer les images de 1,2 et 5 par la fonction $f$ :

$f(1) = -2$

$f(2) = -1$

$f(5) = 2$

(c) Calculer l'(les) antécédent(s) de 1, 2 et 5 par $f$.

ant 1 : $f(x) = 1 \iff 1 = x - 3 \iff x = 4$

ant 2 : $f(x) = 2 \iff x = 5$

ant 5 : $f(x) = 5 \iff x = 8$

10. Soit la fonction $f(x) = 2x^2 - 3$.

(a) Calculer $f(0)$, $f(-2)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$ et $f\left(\sqrt{2}+1\right)$ ;

$f(0) = -3$

$f(-2) = 5$

$f(\sqrt{3}) = 3$

$f(\sqrt{2}+1) = 2(\sqrt{2}+1)^2 - 3$

$= 2.(2+1+2\sqrt{2}) - 3$

$= 3 + 4\sqrt{2}$

(b) Calculer les images de 0,1 et -1 par la fonction $f$ ;

$f(0) = -3$

$f(1) = -1$

$f(-1) = -1$

(c) Calculer l'(les) antécédent(s) de 5 par $f$.

$2x^2 - 3 = 5 \iff x = \pm 2$

11. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$.

(a) Calculer $f(1)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{2}{3}\right)$ et $f\left(\sqrt{2}\right)$ ;

$f(1) = -1$

$f(-1) = +3$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -2$

$f(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$

(b) Calculer l'image de 2 par la fonction $f$ ;

$f(2) = 0$

(c) 1 a-t-il un antécédent par $f$ ?

$\dfrac{x-2}{x} = 1 \Leftrightarrow -2 = 0$ imp $\rightarrow$ non !

12. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

(a) Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(-3)$ et $f\left(-\sqrt{3}\right)$

$f(0) = 0$

$f(3) = \frac{9}{2}$

$f(-3) = -\frac{9}{4}$

$f(-\sqrt{3}) = \dfrac{3}{-\sqrt{3}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{-3+1} = -\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$

(b) Calculer l'image de -1 par la fonction $f$

$f(-1) = -\frac{1}{2}$

(c) Calculer l'(les) antécédent(s) de $-\frac{1}{2}$ par $f$

$\dfrac{x^2}{x-1} = -\frac{1}{2} \iff 2x^2 = -x+1$

$\iff 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$

13. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

(a) Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$ et $f\left(-\sqrt{3}\right)$

$f(0) = 3$ $\qquad$ $f(2) = \sqrt{13}$

$f(-2) = \sqrt{13}$ $\qquad$ $f(-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

(b) Calculer l'image de 4 par la fonction $f$

$f(4) = 5$

(c) Calculer l'(les) antécédent(s) de 5 par $f$

$5 = \sqrt{x^2+9} \iff 25 = x^2 + 9$

$\iff x = \pm 4$

14. Soit la fonction $f(x) = -\sqrt{x^2-3}$ définie pour $x \leq -\sqrt{3}$ ou $x \geq \sqrt{3}$.

(a) Calculer les images de 2, 3 et $\sqrt{3}$ par la fonction $f$

$f(2) = -1$ , $f(3) = -\sqrt{6}$

$f(\sqrt{3}) = 0$

(b) 1 a-t-il une image par la fonction ?

non car $1 \leq \sqrt{3}$

(c) Déterminer deux nombres qui ont la même image.

Deux nombres opposés hors de l'int $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ ont la m̂ image (2 et -2)

(d) Un nombre réel strictement positif a-t-il un antécédent par f ?

Non car $f(x) < 0$

19. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer algébriquement
   - le domaine de définition
   - le(s) zéro(s)
   - l'intersection avec l'axe $Oy$
   - la parité

   (a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$
      i. $dom_f = \mathbb{R}$
      ii. zéro(s) : $x = -3$ et $x = 1$
      iii. intersection avec $Oy$ : $y = -3$
      iv. Fonction quelconque

   (b) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$
      i. $dom_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
      ii. zéro(s) : aucun
      iii. intersection avec $Oy$ : $y = -\dfrac{3}{2}$
      iv. Fonction quelconque

   (c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+4x-5}$
      i. $dom_f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$
      ii. zéro(s) : $x = -\dfrac{1}{2}$
      iii. intersection avec $Oy$ : $y = -\dfrac{1}{5}$
      iv. Fonction quelconque

   (d) $f(x) = \sqrt{2x-5}$
      i. $dom_f = \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right.$
      ii. zéro(s) : $x = \dfrac{5}{2}$
      iii. intersection avec $Oy$ : $0 \notin dom_f$
      iv. Fonction quelconque

   (e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2+4x+3}}$
      i. $dom_f = ]-3, -1[ \cup [3, +\infty$
      ii. zéro(s) : $x = 3$
      iii. intersection avec $Oy$ : $0 \notin dom_f$
      iv. Fonction quelconque

   (f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x^2-9x+4}}$
      i. $dom_f = \left[-\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right[ \cup ]4, +\infty$
      ii. zéro(s) : $x = -\dfrac{5}{2}$
      iii. intersection avec $Oy$ : $y = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
      iv. Fonction quelconque

24. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer ***algébriquement et graphiquement*** :

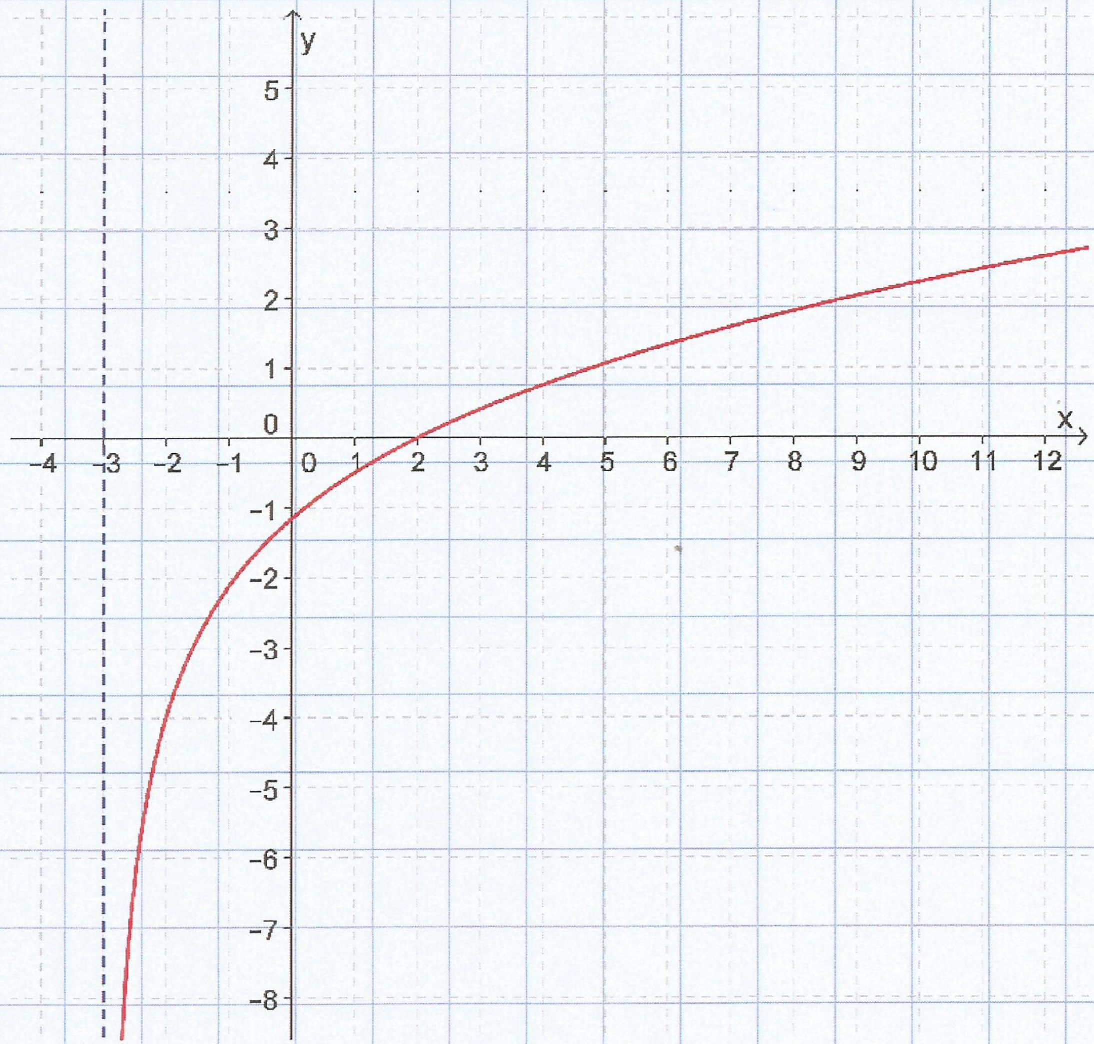
(a) le domaine de définition ;

(b) le(s) zéro(s) ;

(c) la parité ;

(d) le signe ;

(a) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}}$




. dom f : CE: $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$ dom$_f$ : $]-3, +\infty[$

. zéros : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

. fct φ φ (cf dom$_f$ et zéros)

. signe

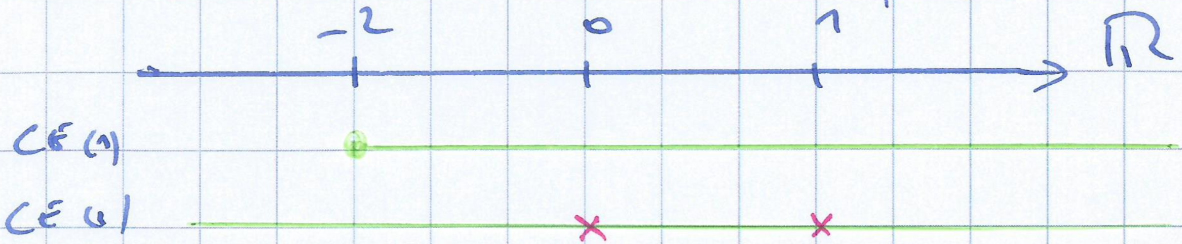
| $x$ | | 3 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| N | | | $-$ | 0 | $+$ |
| D | | 0 | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | | ∄ | $-$ | 0 | $+$ |

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2 - x}$

. dom f : CE (1) $x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$

(2) $x^2 - x \neq 0 \iff x(x-1) \neq 0$

$\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$




dom f : $[-2, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]1, +\infty$

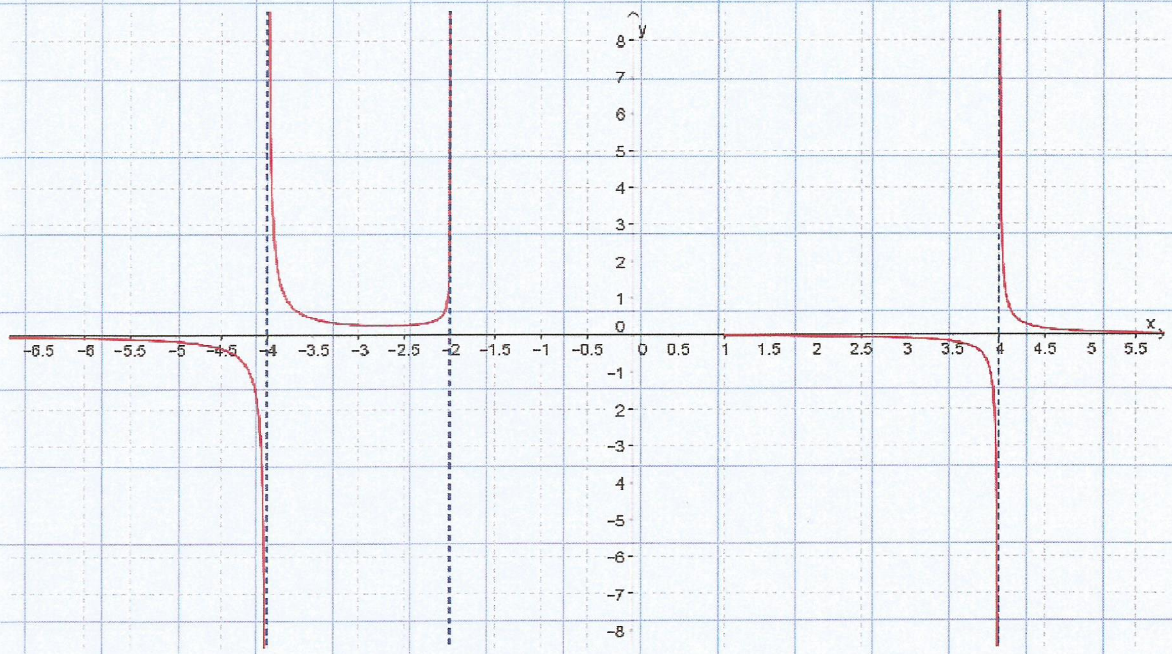
. zéro : $f(x) = 0 \iff x + 2 = 0 \iff x = -2$

. parité : fct pcp (cf zéro et dom f)

.

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | 0 | + | | + | | + |
| D | | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | 0 | + | ∄ | − | ∄ | + |

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x^3+2x^2-16x-32}$



. CE : (1) : $x^2 + x - 2 \geq 0$

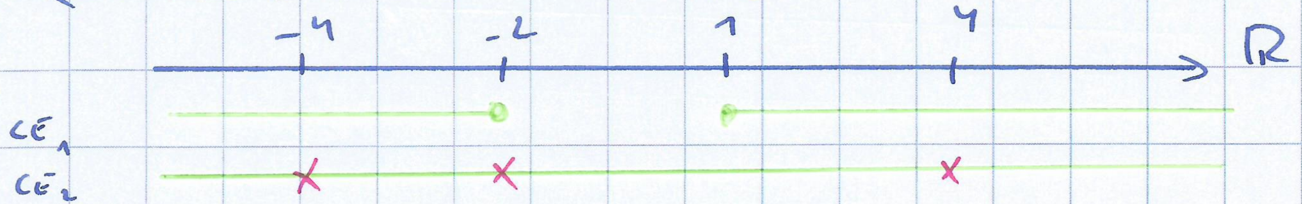
(2) : $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 \neq 0$

(1) $\Delta = 1 + 8 = 9$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} < \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$

| $x$ | | $-2$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $CE_1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

(2) $x^2(x+2) - 16(x+2) \neq 0 \iff (x+2)(x^2-16) \neq 0$

$\iff (x+2)(x-4)(x+4) \neq 0$




$\text{dom}_f : ]-\infty, -4[ \cup ]-4, -2[ \cup [1, 4[ \cup ]4, +\infty[$

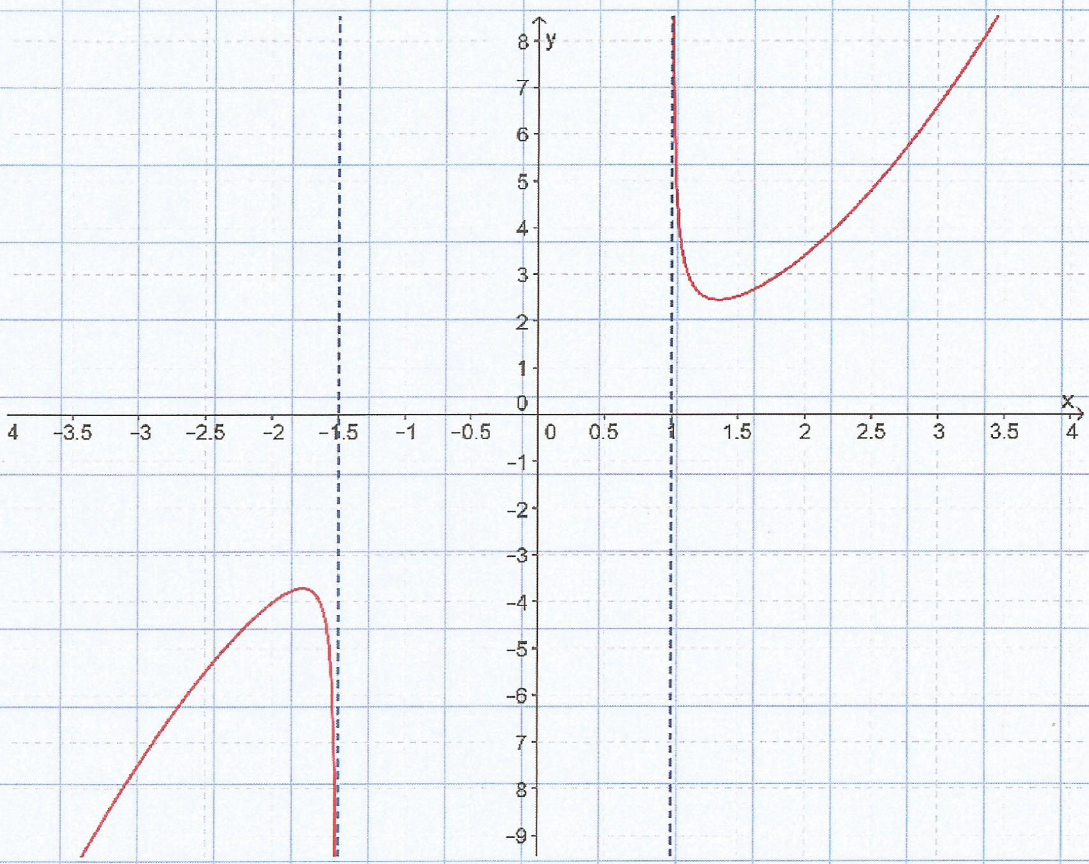
. zéro : $x = 1$ (cf dom f et $CE_2$)

. parité : qcq (cf $\text{dom}_f$ et zéro)

. signe :

| $x$ | | $-4$ | | $-2$ | | $1$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{\ }$ | $+$ | | $+$ | $0$ | | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | | $-$ | $0$ | | | $+$ | | $+$ |
| $x^2-16$ | $+$ | $0$ | $-$ | | | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ | $\nexists$ | | $0$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ |

(d) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$




. dom $f$ : ce : $2x^2 + x - 3 > 0$ $\quad \Delta = 1 + 24 = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{4} < \begin{matrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{matrix}$

| $x$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| ce | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

dom $f$ : $]-\infty, -\frac{3}{2}[ \cup ]1, +\infty[$

. zéro : $x^3 + 1 = 0 \iff x = -1$ (A.R $\notin$ dom$_f$)

. parité : pas (cf dom $f$ et zéro)

. signe :

| $x$ | | $-\frac{3}{2}$ | $-1$ | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| D | $+$ | $0$ | | $0$ | $+$ |
| N | $-$ | | $0$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | $\nexists$ | | $\nexists$ | $+$ |

25. Pour chacune des fonctions suivantes, établir ***algébriquement*** les étapes nécessaires pour passer de la fonction de référence à la fonction finale. Dans chaque cas, on précisera si l'on agit sur la fonction, ou la variable, l'opération arithmétique, la transformation graphique associée et la traduction en terme de modification de coordonnées des points du graphe.

   (a) $f(x) = x^2 - 2$
   (b) $f(x) = \sqrt{x+3}$
   (c) $f(x) = 3x^2$
   (d) $f(x) = (2x+3)^2 - 1$
   (e) $f(x) = \left|\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1} - 3\right|$
   (f) $f(x) = 2\left|3 - (3-4x)^2\right|$
   (g) $f(x) = -2\left|\sqrt{1-2x}\right| + 1$

| Fonction | On agit sur... | Opération arithmétique | $(x, y)$ devient... | Transformation graphique |
|---|---|---|---|---|
| (a) | | | | |
| $f_1(x) = x^2$ | | | | |
| | $f(x)$ | $-k$ | $(x, y-2)$ | Translation verticale de 2 unités vers le bas |
| $f_2(x) = x^2 - 2$ | | | | |
| (b) | | | | |
| $f_1(x) = \sqrt{x}$ | | | | |
| | $x$ | $+k$ | $(x-3, y)$ | Translation horizontale de 3 unités vers la gauche |
| $f_2(x) = \sqrt{x+3}$ | | | | |
| (c) | | | | |
| $f_1(x) = x^2$ | | | | |
| | $f(x)$ | $.t$ | $(x, 3.y)$ | Etirement vertical : les ordonnées sont multipliées par 3 |
| $f_2(x) = 3x^2$ | | | | |
| (d) | | | | |
| $f_1(x) = x^2$ | | | | |
| | $x$ | $+k$ | $(x-3, y)$ | Translation horizontale de 3 unités vers la gauche |
| $f_2(x) = (x+3)^2$ | | | | |
| | $x$ | $.t$ | $(2x, y)$ | Etirement horizontal : les abscisses sont divisées par 2 |
| $f_3(x) = (2x+3)^2$ | | | | |
| | $f(x)$ | $-k$ | $(x, y-1)$ | Translation verticale d'une unité vers le bas |
| $f_4(x) = (2x+3)^2 - 1$ | | | | |

(e)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ | | | | |
| | $x$ | $+k$ | $(x+1, y)$ | Translation horizontale de 1 unité vers la gauche |
| $f_2(x) = \sqrt[3]{x+1}$ | | | | |
| | $x$ | $.t$ | $\left(\frac{x}{3}, y\right)$ | Etirement horizontal : les abscisses sont divisées par 3 |
| $f_3(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ | | | | |
| | $f(x)$ | $.t$ | $\left(x, \frac{y}{3}\right)$ | Etirement vertical : les ordonnées sont divisées par 3 |
| $f_4(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1}$ | | | | |
| | $f(x)$ | $-k$ | $(x, y-3)$ | Translation verticale de 3 unités vers le bas |
| $f_5(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1} - 3$ | | | | |
| | $f(x)$ | $V.A.$ | $(x, \lvert y\rvert)$ | Symétrie orthogonale d'axe $Ox$ des valeurs négatives de la fonction |
| $f_6(x) = \left\lvert \frac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1} - 3 \right\rvert$ | | | | |

(f)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f_1(x) = x^2$ | | | | |
| | $x$ | $+k$ | $(x+3, y)$ | Translation horizontale de 3 unités vers la gauche |
| $f_2(x) = (x+3)^2$ | | | | |
| | $x$ | $.t$ | $\left(\frac{x}{4}, y\right)$ | Etirement horizontal : les abscisses sont divisées par 4 |
| $f_3(x) = (4x+3)^2$ | | | | |
| | $x$ | $-x$ | $(-x, y)$ | Symétrie orthogonale d'axe $Oy$ |
| $f_4(x) = (3-4x)^2$ | | | | |
| | $f(x)$ | $-f(x)$ | $(x, -y)$ | Symétrie orthogonale d'axe $Ox$ |
| $f_5(x) = -(3-4x)^2$ | | | | |
| | $f(x)$ | $+k$ | $(x, y+3)$ | Translation verticale de 3 unités vers le haut |
| $f_6(x) = 3-(3-4x)^2$ | | | | |
| | $f(x)$ | $V.A.$ | $(x, \|y\|)$ | Symétrie orthogonale d'axe $Ox$ des valeurs négatives de la fonction |
| $f_7(x) = \|3-(3-4x)^2\|$ | | | | |
| | $f(x)$ | $.t$ | $(x, 2y)$ | Etirement vertical : les ordonnées sont multipliées par 2 |
| $f_8(x) = 2\,\|3-(3-4x)^2\|$ | | | | |

(g)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f_1(x) = \sqrt{x}$ | | | | |
| | $x$ | $+k$ | $(x+1, y)$ | Translation horizontale de 1 unité vers la gauche |
| $f_2(x) = \sqrt{x+1}$ | | | | |
| | $x$ | $.t$ | $\left(\frac{x}{2}, y\right)$ | Etirement horizontal : les abscisses sont divisées par 2 |
| $f_3(x) = \sqrt{2x+1}$ | | | | |
| | $x$ | $-x$ | $(-x, y)$ | Symétrie orthogonale d'axe $Oy$ |
| $f_4(x) = \sqrt{1-2x}$ | | | | |
| | $f(x)$ | $V.A.$ | $(x, \lvert y\rvert)$ | Symétrie orthogonale d'axe $Ox$ des valeurs négatives de la fonction |
| $f_5(x) = \left\lvert\sqrt{1-2x}\right\rvert$ | | | | |
| | $f(x)$ | $.t$ | $(x, 2y)$ | Etirement vertical : les ordonnées sont multipliées par 2 |
| $f_6(x) = 2\left\lvert\sqrt{1-2x}\right\rvert$ | | | | |
| | $f(x)$ | $-f(x)$ | $(x, -y)$ | Symétrie orthogonale d'axe $Ox$ |
| $f_7(x) = -2\left\lvert\sqrt{1-2x}\right\rvert$ | | | | |
| | $f(x)$ | $+k$ | $(x, y+1)$ | Translation verticale de 1 unité vers le haut |
| $f_8(x) = -2\left\lvert\sqrt{1-2x}\right\rvert + 1$ | | | | |

26. En partant de fonction de base que l'on précisera, représenter les graphes fonctions suivantes. Préciser l'ensemble des étapes ainsi que les transformations du plan utilisées.

(a) $f(x) = x^2 + 3$

(b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

(c) $f(x) = 2x^3$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

(e) $f(x) = 3 - 2x^2$

(f) $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$

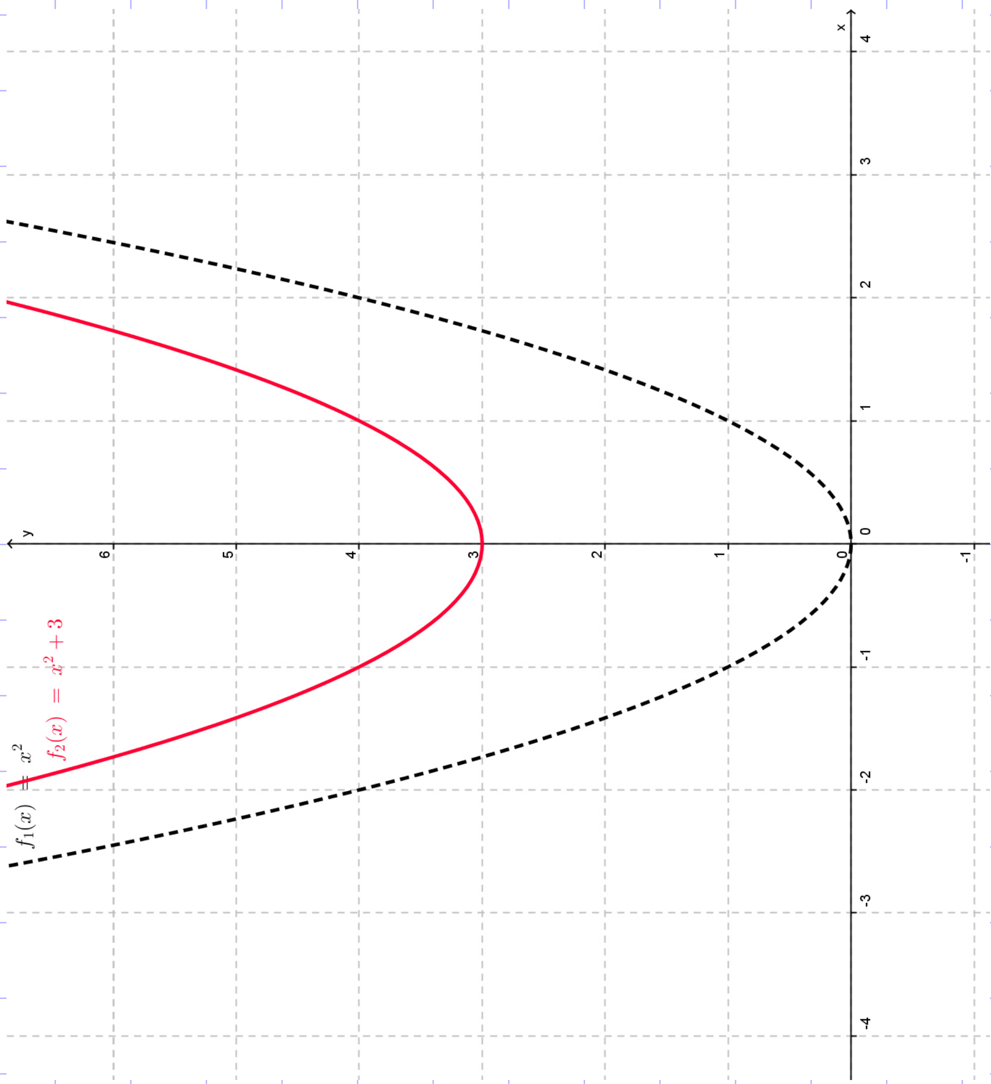
(g) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)^2 - 1$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left||x| - 1\right| + 3$

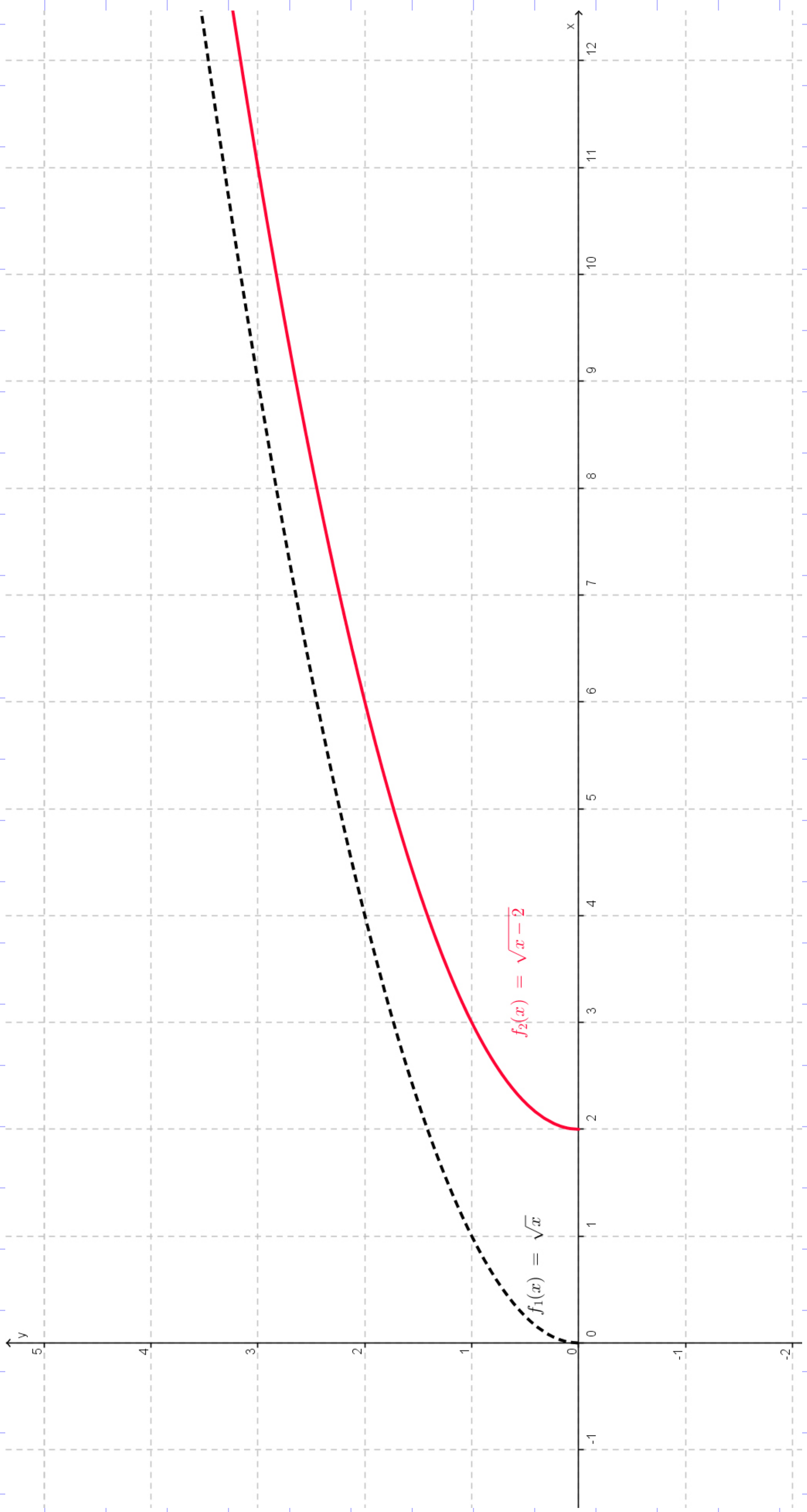
(i) $f(x) = \left|\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x-1} - 2\right|$

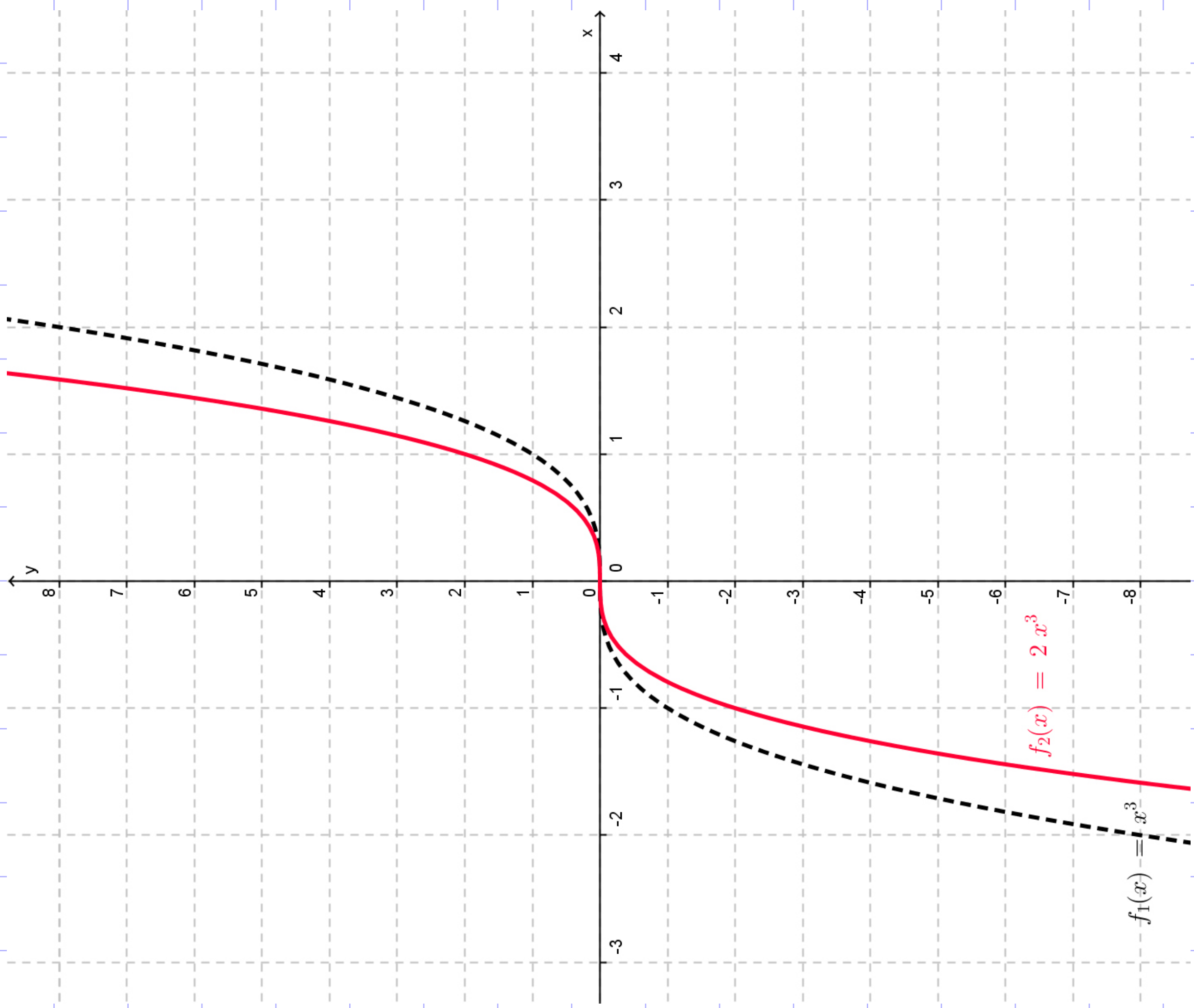
(j) $f(x) = 2\left|3 - \sqrt{1-2x}\right|$

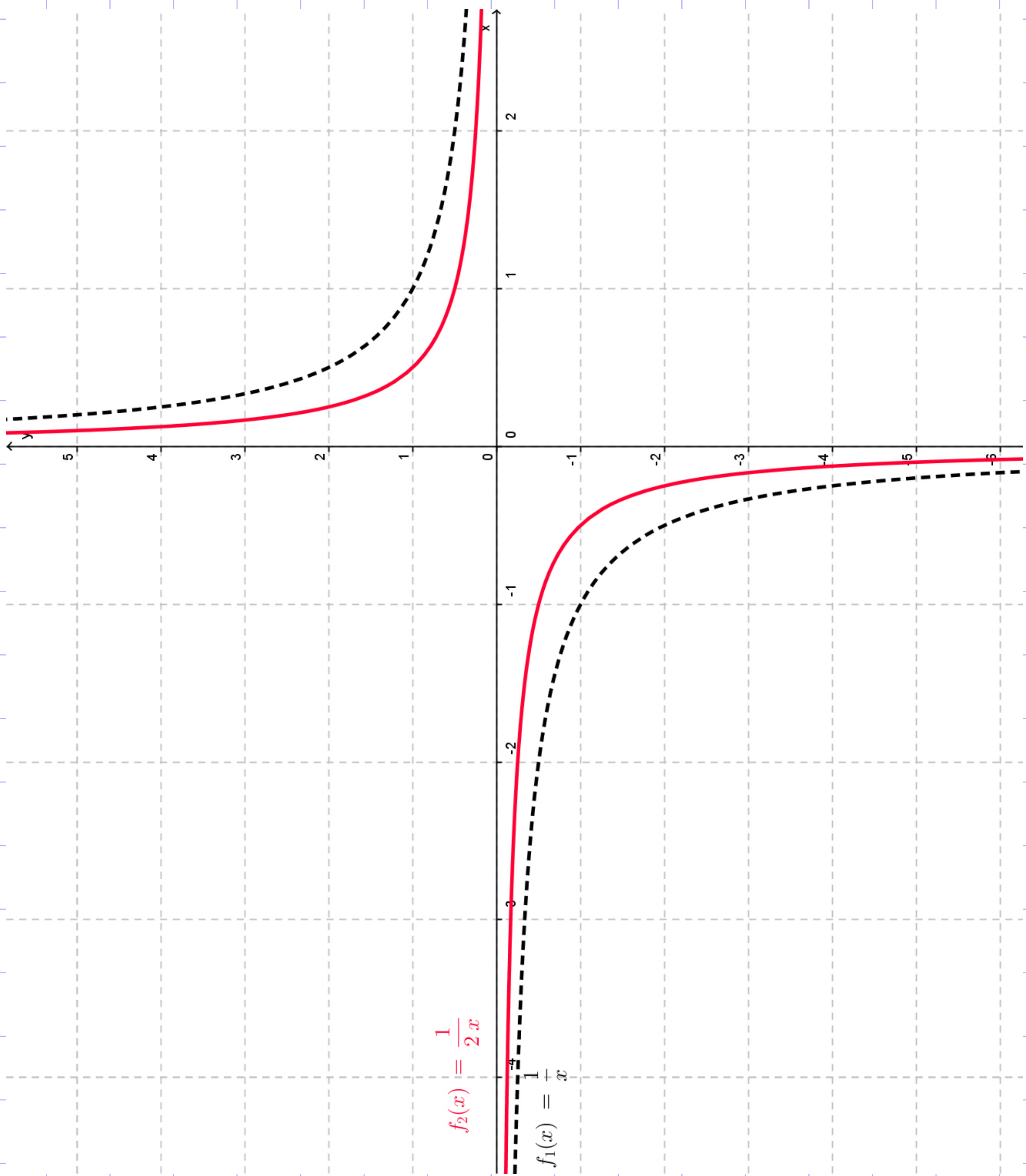
(k) $f(x) = 3 - 2(1-2x)^2$

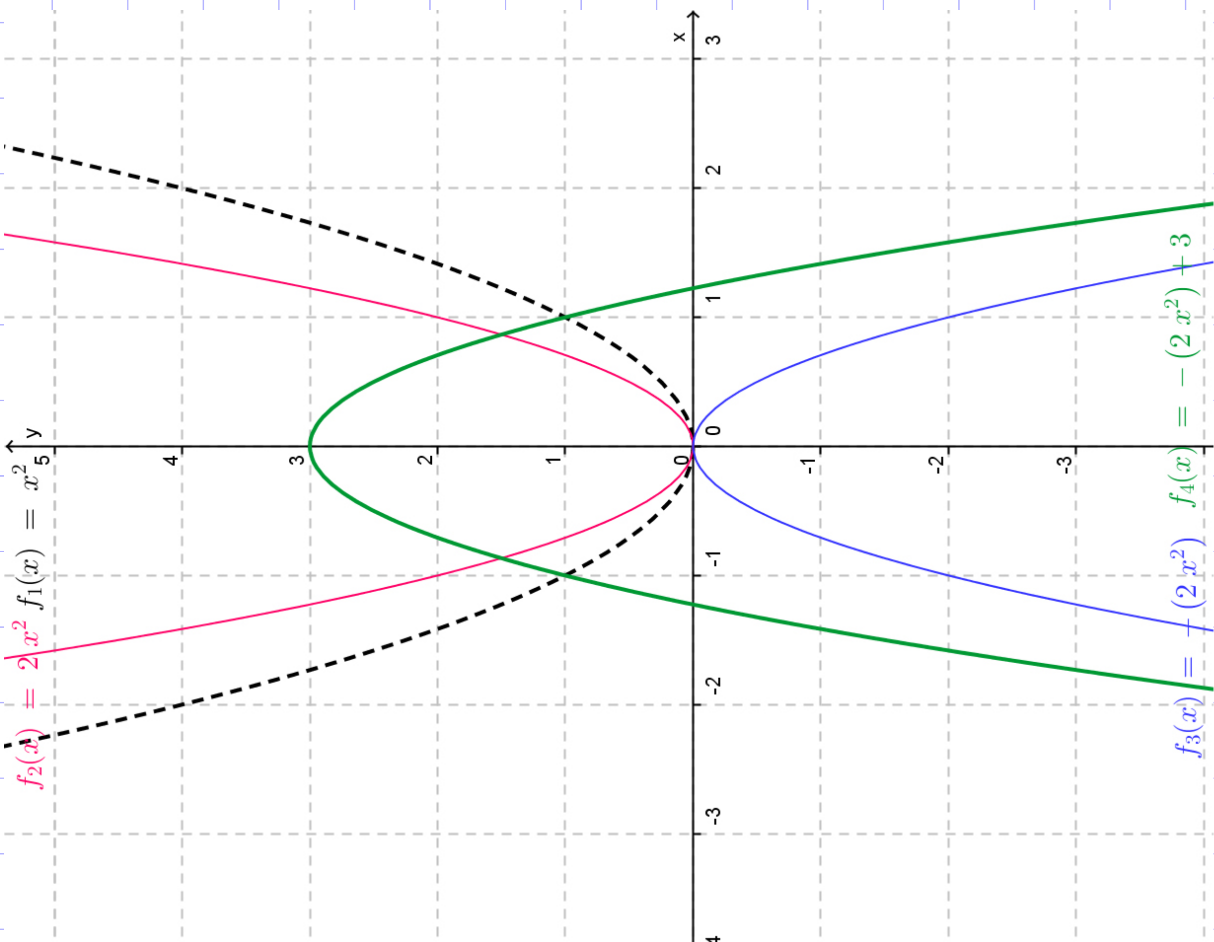


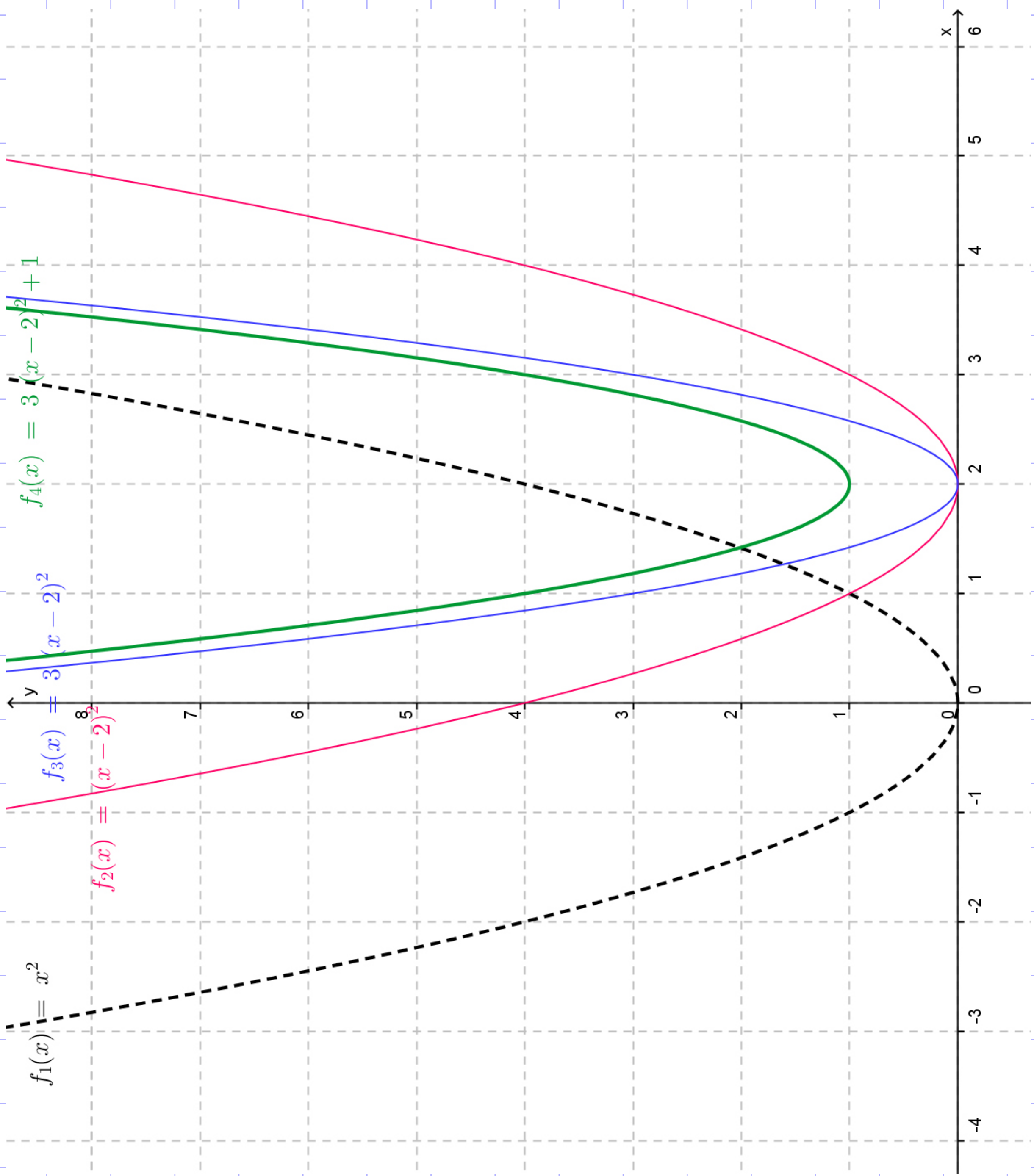
$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = x^2 + 3$
x
y


$f_1(x) = \sqrt{x}$
$f_2(x) = \sqrt{x-2}$

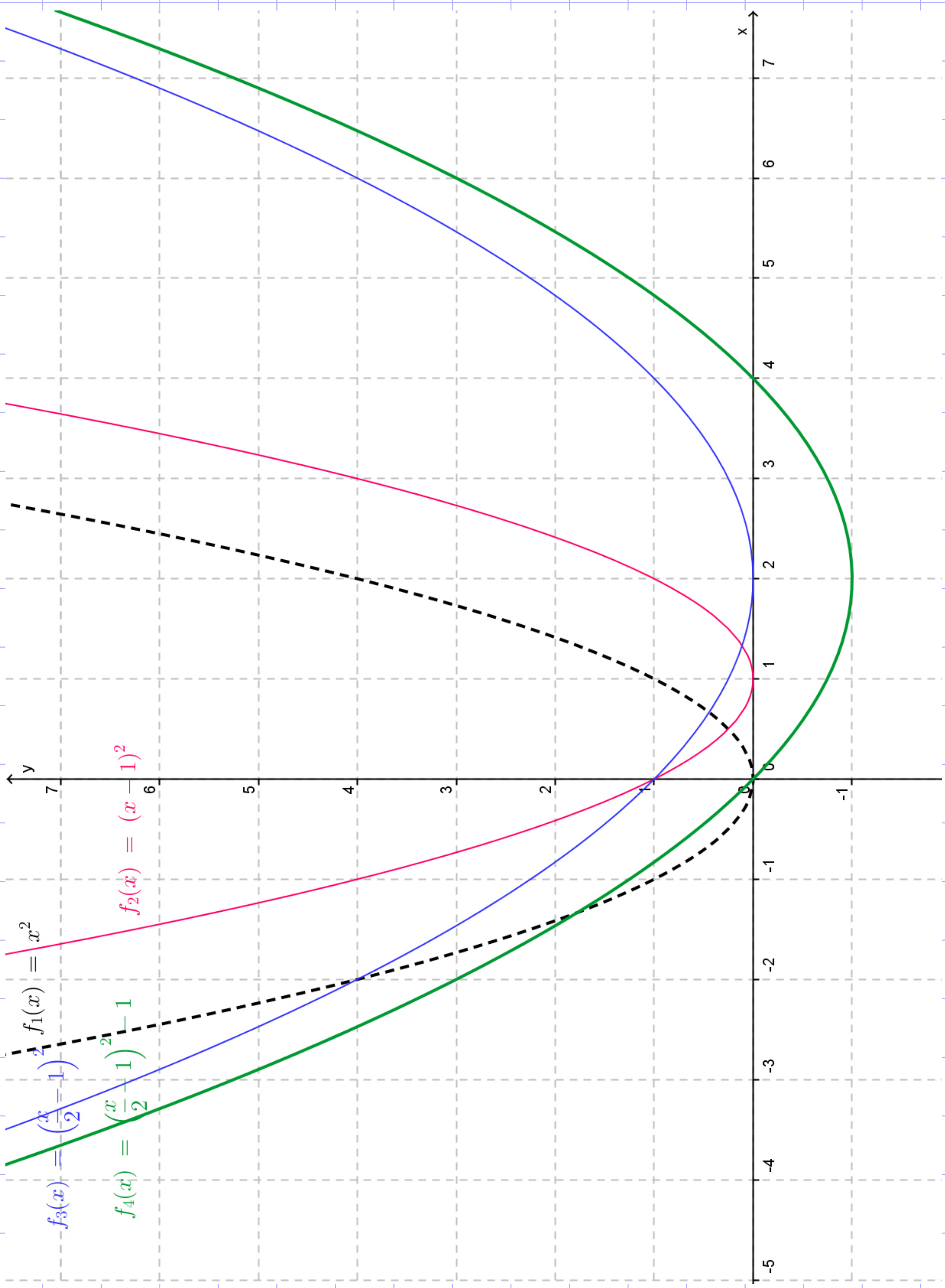

x
y
$f_1(x) = x^3$
$f_2(x) = 2\ x^3$


$f_2(x) = \frac{1}{2x}$
$f_1(x) = \frac{1}{x}$
x
y

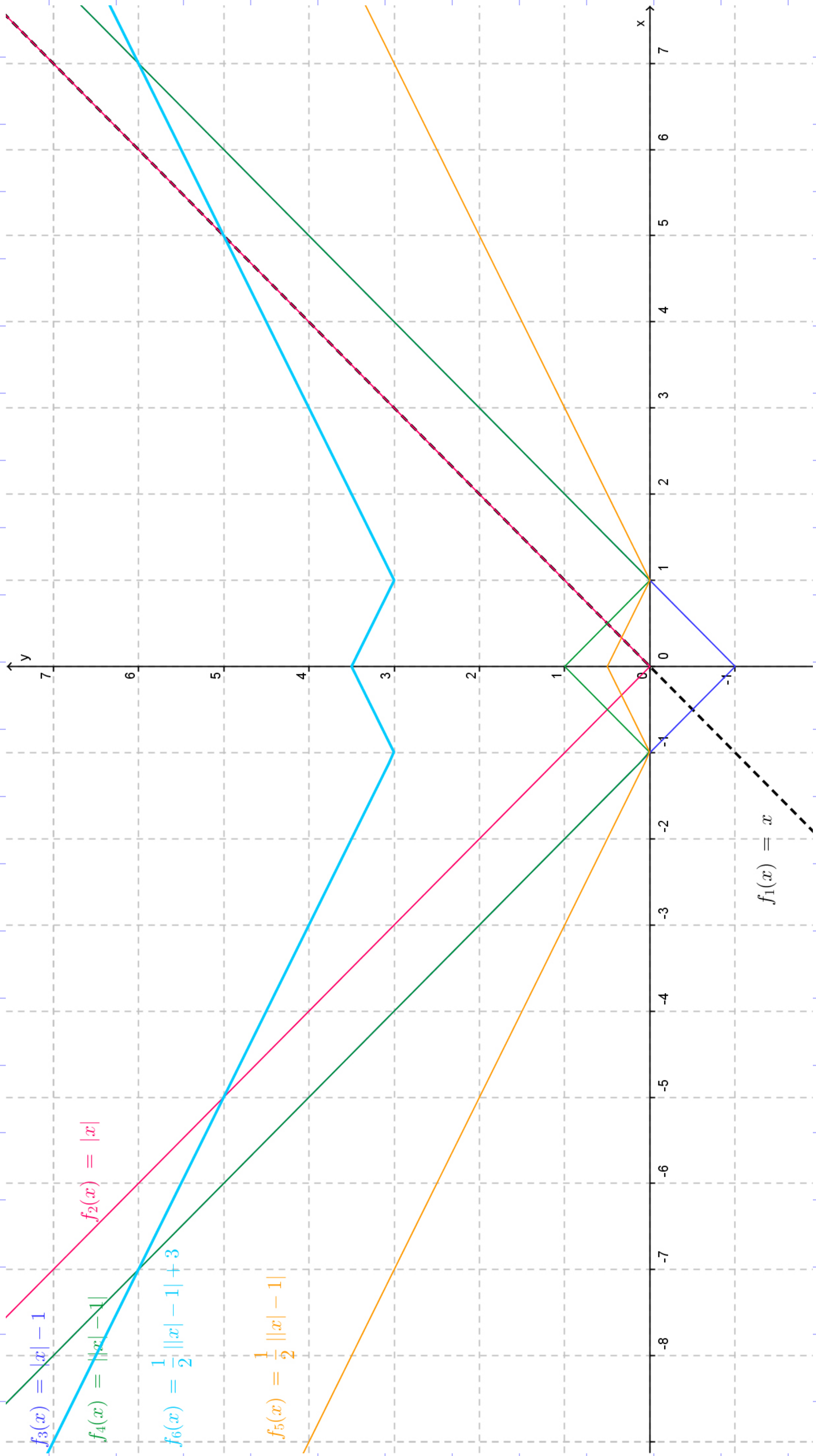

$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = 2x^2$
$f_3(x) = -(2x^2)$
$f_4(x) = -(2x^2) + 3$
x
y



$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = (x-2)^2$
$f_3(x) = 3(x-2)^2$
$f_4(x) = 3(x-2)^2 + 1$
x
y

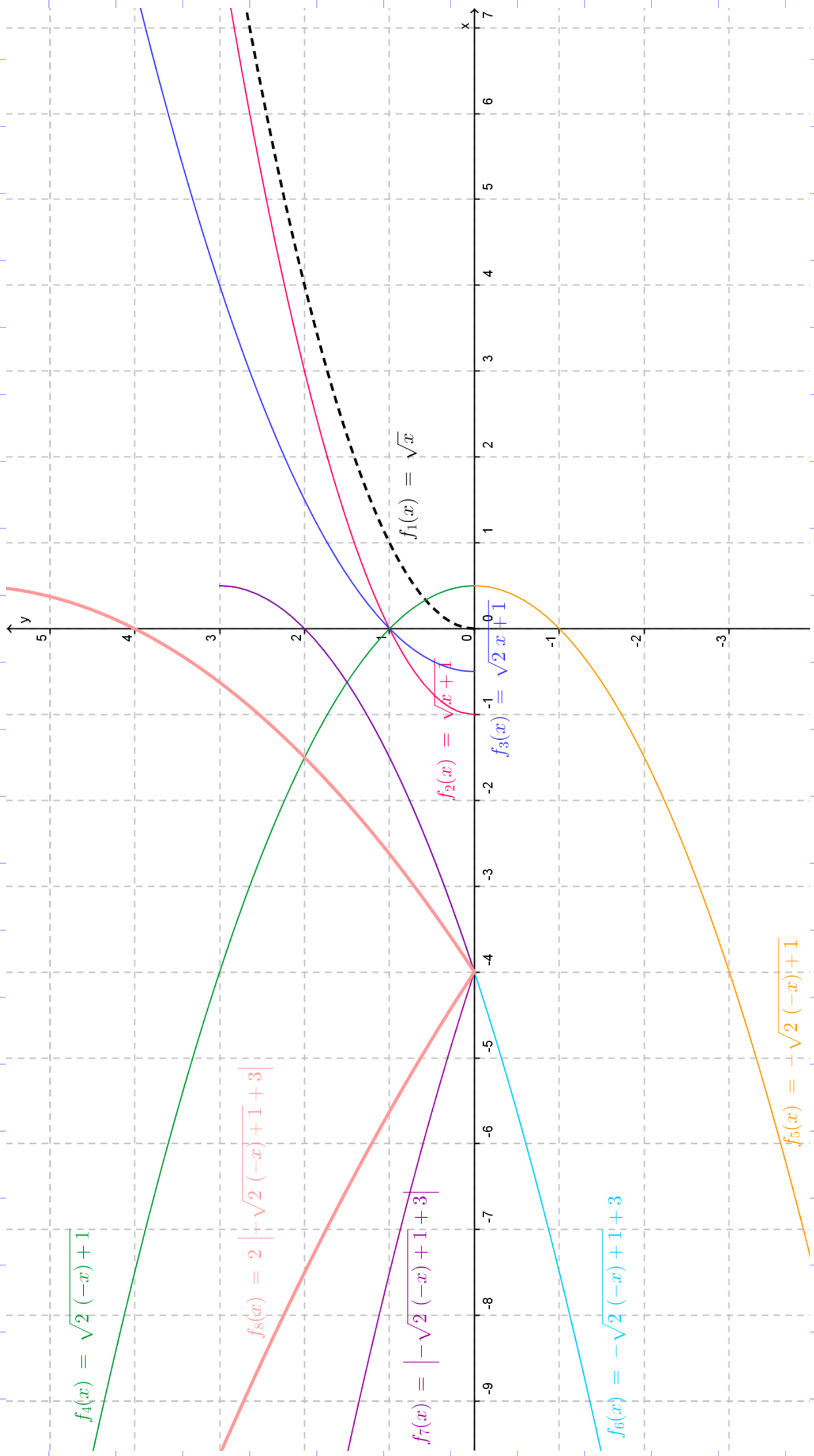


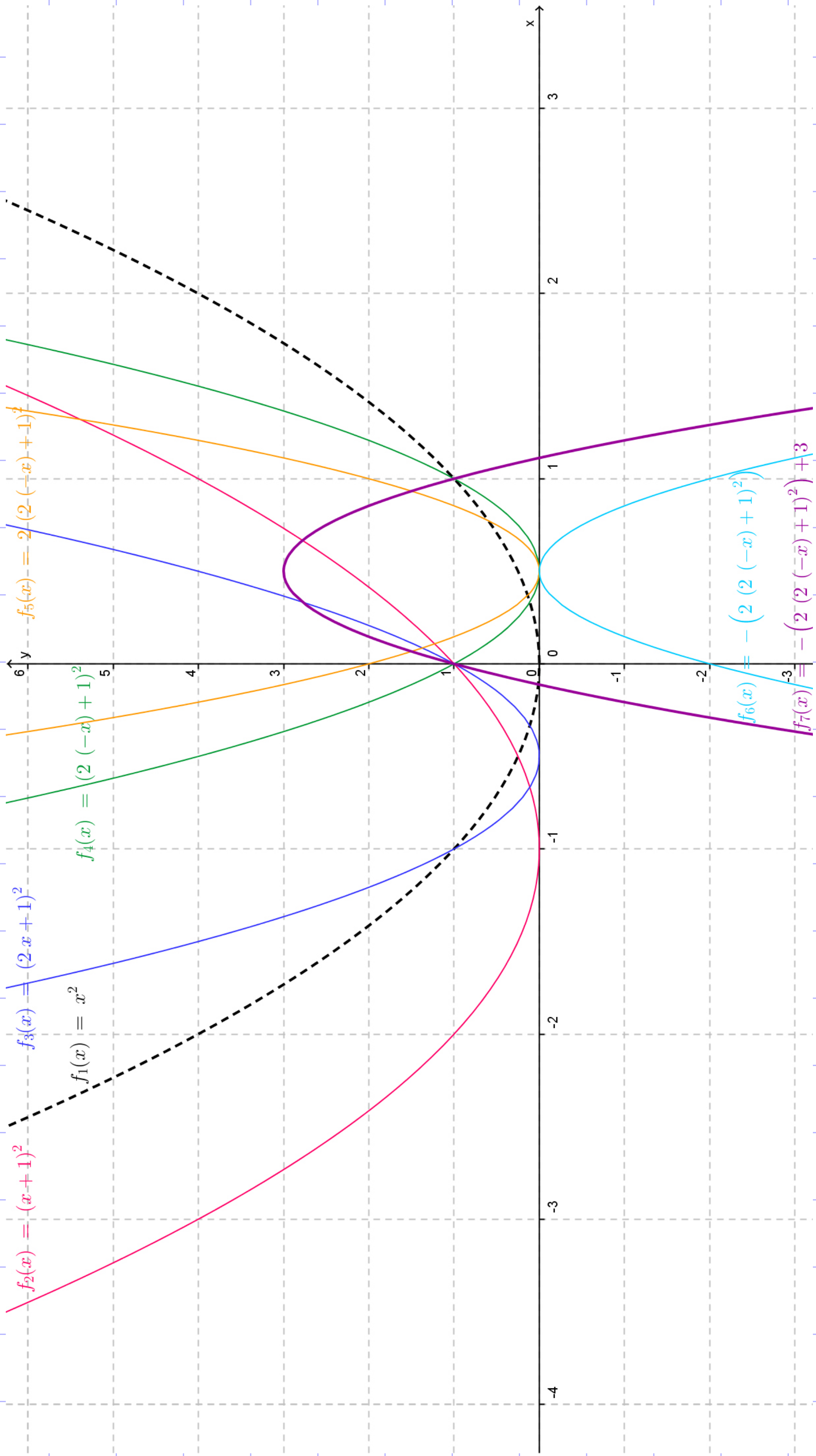
$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = (x-1)^2$
$f_3(x) = \left(\frac{x}{2}-1\right)^2$
$f_4(x) = \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 - 1$
x
y



$f_1(x) = x$
$f_2(x) = |x|$
$f_3(x) = |x| - 1$
$f_4(x) = ||x| - 1|$
$f_6(x) = \frac{1}{2}||x| - 1| + 3$
$f_5(x) = \frac{1}{2}||x| - 1|$

$f_5(x) = \left|\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{3}} - 2\right|$
$f_3(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{3}}$
$f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$
$f_2(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$
$f_4(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{3}} - 2$
x
y


$f_1(x) = \sqrt{x}$
$f_2(x) = \sqrt{x+1}$
$f_3(x) = \sqrt{2x+1}$
$f_4(x) = \sqrt{2(-x)+1}$
$f_5(x) = -\sqrt{2(-x)+1}$
$f_6(x) = -\sqrt{2(-x)+1}+3$
$f_7(x) = \left|-\sqrt{2(-x)+1}+3\right|$
$f_8(x) = 2\left|-\sqrt{2(-x)+1}+3\right|$


$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = (x+1)^2$
$f_3(x) = (2x+1)^2$
$f_4(x) = (2(-x)+1)^2$
$f_5(x) = 2(2(-x)+1)^2$
$f_6(x) = -(2(2(-x)+1)^2)$
$f_7(x) = -(2(2(-x)+1)^2)+3$
x
y
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6