ARU1
Athénée Royal Uccle 1

# Cours de Mathématique

## 4ème année

## EXERCICES

A.DROESBEKE

Août 2022

# Première partie

# 4UAA0 - Rappels et compléments de 3ème

# 1

# Rappels de 3ème

## A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | *Degré d'acquisition* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Maitriser les propriétés des exposants | 1 | | | |
| 2 | Simplifier, réduire, ordonner et effectuer des opérations sur des polynômes | 2 | | | |
| 3 | Maitriser la division euclidienne de polynômes | 3 | | | |
| 4 | Savoir utiliser la loi du reste | 4-5 | | | |
| 5 | Connaitre les produits remarquables du 3ème degré | 6-7-8 | | | |
| 6 | Savoir factoriser des polynômes | 8 | | | |
| 7 | Simplifier des fractions algébriques | 9 | | | |

## 1.1 Exercices

1. Simplifier les expressions suivantes en ne laissant aucun exposant négatif $(a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}_0)$.

   (a) $\left(-\frac{1}{2}a^3b\right)\left(-\frac{4}{5}ab^3c\right)\left(-\frac{5}{2}a^7\right)$

   (b) $\frac{18a^5b^{-3}}{-24a^{-2}b^7}$

   (c) $\frac{-30x^8y^3z^4}{-0,5x^2y^5z}$

   (d) $\frac{3(xy)^2z}{5ab^2}.\frac{2ab}{xy^2}.\frac{15z}{2}$

   (e) $(-3abc)^2.\left(\frac{1}{27}a^4b\right)9a^4b^{12}$

   (f) $\left(-\frac{3x^{-1}}{2y}\right).\left(\frac{-7x^2y}{-3z^{-2}}\right)^2.\left(\frac{14yz^{-3}}{-x^4}\right)^{-3}$

2. (a) Développer

   $$P_1(x) = (2x-3)^2 + 3(2-x)(2+x) - 2x^2(4x-1)$$

   Réduire et ordonner la réponse.

   (b) Si

   $$P_2(x) = 3x(5x^4 - 4x^3 + 7) - (2x^2 - 1)$$

   déterminer la valeur de $P_2(-1)$.

   (c) Calculer $(P(x) - Q(x)).R(x)$ et $P(x) - Q(x).R(x)$ si

   $$P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 6,\ Q(x) = 7x^2 + 3x - 1 \text{ et } R(x) = 2x - 3$$

3. Déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ de la division de $P(x)$ par $d(x)$ si :

   (a) $P(x) = 10x^3 + 17x^2 - 3x - 4$ et $d(x) = 2x + 3$

   (b) $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ et $d(x) = x^2 - x - 3$

   (c) $P(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^3 - 4x^2 + x + 1$ et $d(x) = x^3 - 2$

   (d) $P(x) = 5x^6 + x^5 + x^4 - 4x^2$ et $d(x) = x^4 - 1$

4. Soient les polynômes $P_1(x) = x^7 + \frac{3}{2}x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 5x + 2$ et $P_2(x) = 2x^2 - 1$. Déterminer le reste et le quotient de la division de $P_1(x)$ par $P_2(x)$

5. Sans effectuer la division, déterminer le reste des divisions suivantes

   (a) $(x^2 + x - 6) \div (x + 4)$

   (b) $(-5x^2 + 7x + 3) \div (x - 7)$

   (c) $(x^2 - 5x + 6) \div (x - \sqrt{3})$

6. Effectuer les divisions suivantes et écrire le polynôme sous la forme $P(x) = Q(x)(x - a) + r$ :

   (a) $(x^3 + 2x^2 - x - 6) \div (x + 4)$

   (b) $(-5x^3 + 7x + 3) \div (x - 2)$

   (c) $(x^4 - 1) \div (x + 1)$

7. Déterminer la valeur de $t$ pour que le reste de la division

   $$(x^2 - 3x - t) \div (x - 2)$$

   soit -5.

8. Compléter

   (a) $(............)(4x^2 - 6x + 9) = 8x^3 + 27$
   (b) $(9x^2 + 15x + 25)(............) = 27x^3 - 125$
   (c) $(............)(121x^2 + 66x + 36) = 1331x^3 - 216$
   (d) $(x^3 - 2)(...........) = x^9 - 8$
   (e) $(3x^3 + 2x)(...........) = 27x^9 + 8x^3$

9. Développer les expressions suivantes :

   (a) $(2a + b)^3$
   (b) $(x - 3z)^3$
   (c) $\left(\frac{x}{3} - 2z\right)^3$
   (d) $\left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{3a}\right)^3$
   (e) $(2x - 3)^3 - (4x + 1)^2$
   (f) $x^2(3x - 1)^2 + (2x - 4)^3$
   (g) $(x^2 - 4x + 2)(x - 3)^2 - (2x - 1)^3$

10. Factoriser les expressions suivantes [1]

   (a) $15a^7b^2 - 10a^5b^3$
   (b) $y(b - a) + x(a - b)$
   (c) $(^*)45x^3y^4z^5 + 60x^5y^2z - 90x^4y^3z^2$
   (d) $(^*)5a^2(b - 2) + 15a(2 - b)$
   (e) $\frac{1}{9} - x^2$
   (f) $25x^2 + 30x + 9$
   (g) $(a - 1)^2 - 1$
   (h) $(^*)a^4 - 2a^2 + 1$
   (i) $81a^4 - 169$
   (j) $(^*)49x^2 - (x - y)^2$
   (k) $x^5 - 8x^3 + 16x$
   (l) $(^*)a^4 - 2a^3 + a - 2$
   (m) $x^2 + 3x + 2$
   (n) $(^*)2x^6 + 2 - 4x^3$
   (o) $(^*)x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
   (p) $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$
   (q) $(^*)8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
   (r) $(^*)27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$
   (s) $(^*)a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$
   (t) $(^*)0,008x^3 - 0,048x^2y + 0,096xy^2 - 0,064y^3$
   (u) $(^*)40x^9 + 60x^6 + 30x^3 + 5$
   (v) $(^*)a^6 - b^6$
   (w) $(^*)x^6 - 27y^3$
   (x) $(^*)8a^3 - b^6 - 12a^2b^2 + 6ab^4$
   (y) $(^*)128a^5b - 2a^2b^4$
   (z) $(^*)64a^6 + \frac{24a^4}{b} + \frac{3a^2}{b^2} + \frac{1}{8b^3}$

11. Simplifier les fractions suivantes après avoir préciser les conditions d'existence :

   (a) $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$
   (b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$
   (c) $\frac{x + 3}{2x^2 + x - 15}$
   (d) $\frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + x - 6}$
   (e) $\frac{x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 10x - 8}$
   (f) $\frac{x^2 - 4}{2x + x^2}$
   (g) $\frac{x^2 + 3}{x^2}$
   (h) $\frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

1. Les exercices (*) doivent être fait, les autres serviront d'entrainement

12. Simplifier les fractions suivantes après avoir préciser les conditions d'existence :

(a) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{-3x}{x-2}$

(b) $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}$

(c) $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{2x+5}$

(d) $\dfrac{5x+1}{x-1}+\dfrac{3}{2(x-1)}$

(e) $\dfrac{3x}{x^2-1}-\dfrac{4}{x+1}$

(f) $\dfrac{5}{x^2-2x+1}-\dfrac{2}{x^2-4x+4}$

(g) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

(h) $\dfrac{3x-1}{x^2-2x-8}-\dfrac{2}{x+2}$

13. Simplifier les fractions suivantes après avoir préciser les conditions d'existence :

(a) $\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}.\dfrac{x+2}{x^2+7x+12}$

(b) $\dfrac{x+3}{x-5}.\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+4x+3}$

(c) $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}.\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

(d) $\dfrac{2x^2-7x-15}{3x^2-15x}.\dfrac{x^2}{2x^2+3x}$

(e) $\dfrac{x+1}{x^2+3x}\div\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+4x+3}$

(f) $\dfrac{x+2}{2x-1}\div\dfrac{3x^2+4x-4}{2x^2+5x-3}$

14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ en variant les techniques :

(a) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 4x+5y=9 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x-7y=-2 \\ 4x+6y=5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x-10y=-11 \\ 4y+5x=23 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x=7+y \\ 7y=1-4x \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x+8y=9 \\ 2x-5y=-24 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 6x-3y=-36 \\ 9x=-31-7y \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dfrac{t}{3}+\dfrac{z}{2}=-3 \\ \dfrac{t}{2}-\dfrac{z}{5}=5 \end{cases}$

## 1.2 Solutions

1. (a) $-a^{11}b^4c$
   (b) $-\dfrac{3a^7}{4b^{10}}$
   (c) $\dfrac{60x^6z^3}{y^2}$
   (d) $\dfrac{9xz^2}{b}$
   (e) $3a^{10}b^{15}c^2$
   (f) $\dfrac{x^{15}z^{13}}{336y^2}$
2. (a) $P_1(x) = -8x^3 + 3x^2 - 12x + 21$
   (b) $P_2(-1) = -49$
   (c) $(P(x) - Q(x)).R(x) = 6x^5 - 9x^4 - 24x^3 + 30x^2 + 23x - 21$
   $P(x) - Q(x).R(x) = 3x^4 - 14x^3 + 10x^2 + 11x + 3$
3. (a) $Q(x) = 5x^2 + x - 3$ et $R(x) = 5$
   (b) $Q(x) = x^2 + x - 2$ et $R(x) = 5x - 1$
   (c) $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ et $R(x) = x - 1$
   (d) $Q(x) = 5x^2 + x + 1$ et $R(x) = x^2 + x + 1$
4. $Q(x) = \dfrac{x^5}{2} + x^3 - 3x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$ et $R(x) = -3x + \dfrac{1}{2}$
5. (a) $r = 6$
   (b) $r = -193$
   (c) $r = 9 - 5\sqrt{3}$
6. (a) $(x^2 - 2x + 7)(x + 4) - 34$
   (b) $(-5x^2 - 10x - 13)(x - 2) - 2$
   (c) $(x^3 - x^2 + x - 1)(x + 1)$
7. $t = 3$
8. (a) $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) = 8x^3 + 27$
   (b) $(9x^2 + 15x + 25)(3x - 5) = 27x^3 - 125$
   (c) $(11x - 6)(121x^2 + 66x + 36) = 1331x^3 - 216$
   (d) $(x^3 - 2)(x^6 + 2x^3 + 4) = x^9 - 8$
   (e) $(3x^3 + 2x)(9x^6 - 6x^4 + 4x^2) = 27x^9 + 8x^3$
9. (a) $(2a + b)^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$
   (b) $(x - 3z)^3 = x^3 - 9x^2z + 27xz^2 - 27z^3$
   (c) $\left(\dfrac{x}{3} - 2z\right)^3 = \dfrac{x^3}{27} - \dfrac{2x^2z}{3} + 4xz^2 - 8z^3$
   (d) $\left(\dfrac{a}{2b} + \dfrac{b}{3a}\right)^3 = \dfrac{a^3}{8b^3} + \dfrac{a}{4b} + \dfrac{b}{6a} + \dfrac{b^3}{27a^3}$
   (e) $(2x - 3)^3 - (4x + 1)^2 = 8x^3 - 52x^2 + 46x - 28$
   (f) $x^2(3x - 1)^2 + (2x - 4)^3 = 9x^4 + 2x^3 - 47x^2 + 96x - 64$
   (g) $(x^2 - 4x + 2)(x - 3)^2 - (2x - 1)^3 = x^4 - 18x^3 + 47x^2 - 54x + 19$

10. (a) $15a^7b^2 - 10a^5b^3 = 5a^5b^2(3a^2 - 2b)$
    (b) $y(b-a) + x(a-b) = (a-b)(x-y)$
    (c) $45x^3y^4z^5 + 60x^5y^2z - 90x^4y^3z^2 = 15x^3y^2z(4x^2 - 6xyz + 3y^2z^4)$
    (d) $5a^2(b-2) + 15a(2-b) = 5a(a-3)(b-2)$
    (e) $\dfrac{1}{9} - x^2 = \left(\dfrac{1}{3} - x\right) . \left(\dfrac{1}{3} + x\right)$
    (f) $25x^2 + 30x + 9 = (5x+3)^2$
    (g) $(a-1)^2 - 1 = a(a-2)$
    (h) $a^4 - 2a^2 + 1 = (a-1)^2(a+1)^2$
    (i) $81a^4 - 169 = (9a^2 - 13)(9a^2 + 13)$
    (j) $49x^2 - (x-y)^2 = (6x+y)(8x-y)$
    (k) $x^5 - 8x^3 + 16x = x(x+2)^2(x-2)^2$
    (l) $a^4 - 2a^3 + a - 2 = (a+1)(a-2)(a^2 - a + 1)$
    (m) $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$
    (n) $2x^6 + 2 - 4x^3 = 2(x-1)^2(x^2 + x + 1)^2$
    (o) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-2)(x+3)$
    (p) $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = (x-1)^2(x-2)(x-3)$
    (q) $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x+3y)^3$
    (r) $27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3 = (3x-4y)^3$
    (s) $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2)$
    (t) $0,008x^3 - 0,048x^2y + 0,096xy^2 - 0,064y^3 = \left(\dfrac{2x}{10} - \dfrac{4y}{10}\right)^3$
    (u) $40x^9 + 60x^6 + 30x^3 + 5 = 5(2x^3+1)^3$
    (v) $a^6 - b^6 = (a+b)(a-b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$ ou $a^6 - b^6 = (a+b)(a-b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$
    (w) $x^6 - 27y^3 = (x^2 - 3y)(x^4 + 3x^2y + 9y^2)$
    (x) $8a^3 - b^6 - 12a^2b^2 + 6ab^4 = (2a - b^2)^3$
    (y) $128a^5b - 2a^2b^4 = 2a^2b(4a-b)(16a^2 + 4ab + b^2)$
    (z) $64a^6 + \dfrac{24a^4}{b} + \dfrac{3a^2}{b^2} + \dfrac{1}{8b^3} = \left(4a^2 + \dfrac{1}{2b}\right)^3$

11. (a) CE :$x \neq -2$ ; $x - 2$
    (b) CE :$x \neq 3$ ; $x - 3$
    (c) CE :$x \overset{H}{\neq} -3, x \overset{H}{\neq} \dfrac{5}{2}$ ; $\dfrac{1}{2x-5}$
    (d) CE :$x \overset{H}{\neq} 2, x \overset{H}{\neq} -3$ ; $\dfrac{2x-3}{x-2}$
    (e) CE :$x \overset{H}{\neq} -4, x \overset{H}{\neq} \dfrac{2}{3}$ ; $\dfrac{x+1}{3x-2}$
    (f) CE :$x \neq 0, x \neq -2$ ; $\dfrac{x-2}{x}$
    (g) CE :$x \neq 0$ ; $\dfrac{x^2+3}{x^2}$

(h) CE :$x \neq 0, x \overset{H}{\neq} 1, x \overset{H}{\neq} -3$ ; $\dfrac{x+2}{x-1}$

12. (a) CE :$x \neq -1, x \neq 2$ ; $\dfrac{-x^2-5x}{(x+1)(x-2)}$

(b) CE :$x \neq \pm 1$ ; $\dfrac{-4x}{(x-1)(x+1)}$

(c) CE :$x \neq 2, x \neq -\dfrac{5}{2}$ ; $\dfrac{4x+19}{((x-2)(2x+5)}$

(d) CE :$x \neq 1$ ; $\dfrac{10x+5}{2(x-1)}$

(e) CE :$x \neq \pm 1$ ; $\dfrac{4-x}{x^2-1}$

(f) CE :$x \neq 1, x \neq 2$ ; $\dfrac{3x^2-16x+18}{(x-1)^2(x-2)^2}$

(g) CE :$x \neq \pm 1$ ; $\dfrac{2x}{x-1}$

(h) CE :$x \overset{H}{\neq} 4, x \overset{H}{\neq} -2$ ; $\dfrac{x+7}{(x-4)(x+2)}$

13. (a) CE :$x \overset{H}{\neq} -4, x \overset{H}{\neq} -3, x \overset{H}{\neq} -2, x \overset{H}{\neq} -1$ ; $\dfrac{1}{(x+1)(x+4)}$

(b) CE :$x \overset{H}{\neq} -3, x \overset{H}{\neq} -1, x \overset{H}{\neq} 5$ ; $\dfrac{x+2}{x+1}$

(c) CE :$x \overset{H}{\neq} \pm 1, x \overset{H}{\neq} \pm 2$ ; $\dfrac{x}{x-2}$

(d) CE :$x \overset{H}{\neq} -\dfrac{3}{2}, x \overset{H}{\neq} 0, x \overset{H}{\neq} 5$ ; $\dfrac{1}{3}$

(e) CE :$x \overset{H}{\neq} -3, x \overset{H}{\neq} -1, x \overset{H}{\neq} 0$ ; $\dfrac{1}{x}$

(f) CE :$x \overset{H}{\neq} -2, x \overset{H}{\neq} \dfrac{1}{2}, x \overset{H}{\neq} \dfrac{2}{3}$ ; $\dfrac{x+3}{3x-2}$

14. (a) $S : \{(-4,5)\}$

(b) $S : \left\{\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$

(c) $S : \{(3,2)\}$

(d) $S : \{(2,-1)\}$

(e) $S : \{(-7,2)\}$

(f) $S : \{(-5,2)\}$

(g) $S : \{(-10,6)\}$

# 2

# Le premier degré

## A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | *Degré d'acquisition* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Résoudre des équations du premier degré | 1 | | | |
| 2 | Résoudre des inéquations du premier degré | 2 | | | |
| 3 | Résoudre des équations réductibles au premier degré (équations produit et équations fractionnaires) | 4-5 | | | |
| 4 | Etudier le signe d'expressions composées de facteurs du premier degré | 5 | | | |
| 5 | Résoudre des inéquations réductibles au premier degré | 6 | | | |

## 2.1 Exercices

1. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :
   (a) $\frac{1}{3}(-x-11)+x-9=\frac{1}{6}(-5x-9)+\frac{1}{4}(12-5x)$
   (b) $(8x+8)x+2x=(x-1)(8x-6)$
   (c) $(8-10x)(x-3)-(-6x-5)(x-3)=(-4x-2)x$
   (d) $-(6x+1)(x+3)-4(x+3)=(2-6x)(x+1)$
   (e) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{3}x+2$
   (f) $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x+2)(x-3)}{5}=\frac{7(x+1)(x-3)}{10}$
   (g) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-x(x+1)=3\left(x-\frac{1}{4}\right)$
   (h) $5-\frac{2x+1}{2}=\frac{-3x+7}{3}$
2. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ :
   (a) $3x-2>14$
   (b) $2x+5\leq 7$
   (c) $x-8>5x+3$
   (d) $9+\frac{1}{3}x\geq 4-\frac{1}{2}x$
   (e) $(2x-3)(4x+5)\leq(8x+1)(x-7)$
   (f) $2x(6x+5)<(3x-2)(4x+1)$
   (g) $\frac{x-7}{2}-4x\geq 12-6x$
   (h) $3-\frac{x-2}{2}+\frac{2}{3}>3x$
   (i) $\frac{x+7}{9}-\frac{3x-2}{2}<\frac{x+4}{18}-1$
   (j) $\frac{2x-5}{6}-\frac{x+1}{3}\geq\frac{4x-1}{2}$
   (k) $\frac{1}{5}(-x-12)+\frac{1}{8}(2x-12)>\frac{1}{10}(-5x-12)+\frac{1}{3}(12-3x)$
   (l) $\frac{1}{4}(-x-11)+\frac{1}{4}(7x+1)\geq\frac{1}{8}(-6x-3)+\frac{1}{8}(1-5x)$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

   (a) $x(x+7)=0$
   (b) $3x(x-1)(x+3)=0$
   (c) $36=x^2$
   (d) $x^3=x$
   (e) $x^4-81=0$
   (f) $25x^2-10x=-1$
   (g) $12x-18=2x^2$
   (h) $27x^3=18x^2-3x$
   (i) $3(2x+3)=x(2x+3)$
   (j) $2x(x^2-1)=3(x^2-1)$
   (k) $x^2(4x-1)+9(1-4x)=0$
   (l) $(5x+3)(x-7)=(2x+4)(7-x)$
   (m) $9x^2(2x+5)=6x(2x+5)-(2x+5)$
   (n) $3x^3+4x^2=17x+6$

4. Résoudre les équations fractionnaires suivantes après avoir préciser les conditions d'existence :

   (a) $\dfrac{x-1}{x+5}-4=0$
   (b) $\dfrac{2x-8}{3x^2}=0$
   (c) $\dfrac{3(x-1)}{2x-3}=1$
   (d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}=2$
   (e) $\dfrac{2}{x-9}+1=0$
   (f) $\dfrac{x+1}{x-1}-2=\dfrac{2x}{x-1}$
   (g) $\dfrac{1}{x}-2+x=0$
   (h) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{x+2}{x-2}=-\dfrac{4}{5}$
   (i) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{x+5}$
   (j) $\dfrac{9}{x^2+6x}-\dfrac{x-2}{2x+12}=\dfrac{1}{2x}$
   (k) $\dfrac{x^2}{x-2}-\dfrac{4x}{x+2}=\dfrac{8x}{x^2-4}$
   (l) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{x+1}{2x+2}=\dfrac{x}{3x+3}$
   (m) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{x}{x^2-x}$
   (n) $\dfrac{3x-1}{2x+8}-\dfrac{2x-3}{4(x+1)}=\dfrac{13}{40}$
   (o) $\dfrac{x-1}{x^2+3x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{9}{2x+6}=0$
   (p) $\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{5}{x}=\dfrac{6x}{3x-9}+\dfrac{2}{3x}$

5. Etudier le signe des fonctions suivantes :

   (a) $4x^2-9$
   (b) $-(x-1)(x+2)$
   (c) $(7-2x)(4x^2-49)$
   (d) $-3(4+3x)(x+3)^2$
   (e) $\dfrac{-3x(1-2x)}{1-3x}$
   (f) $\dfrac{x^3(x-3)^2(1-x)}{2-x}$

6. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

   (a) $4x^2-49\leq 0$
   (b) $\dfrac{(2-3x)(2+3x)}{x(16-9x^2)}<0$
   (c) $\dfrac{x+5}{4-5x}<\dfrac{1}{2}$
   (d) $\dfrac{x+3}{x-1}\leq\dfrac{x+1}{x-3}$
   (e) $\dfrac{x+5}{x-1}\leq\dfrac{x-3}{x+2}$

(f) $\dfrac{2x-1}{x+3} > \dfrac{2x}{x-4}$

(g) $\dfrac{x+3}{x^2-1} \geq \dfrac{3}{x-1}$

(h) $\dfrac{x+1}{1-x} + \dfrac{x-2}{x+2} \leq \dfrac{-6}{x-1} + \dfrac{15}{x^2+x-2}$

(i) $\dfrac{x}{2-x} \leq \dfrac{-x+3}{x^2+3x-10}$

## 2.2 Solutions

1. (a) $S : \left\{\frac{170}{33}\right\}$
   (b) $S : \left\{\frac{1}{4}\right\}$
   (c) $S : \left\{\frac{13}{9}\right\}$
   (d) $S : \left\{-\frac{17}{19}\right\}$
   (e) $\mathrm{S} : \left\{-\frac{21}{10}\right\}$
   (f) $\mathrm{S} : \{-7\}$
   (g) $\mathrm{S} : \left\{\frac{1}{8}\right\}$
   (h) $\mathrm{S} : \phi$
2. (a) $S : \left]\frac{16}{3}, +\infty\right.$
   (b) $S : -\infty, 1]$
   (c) $S : -\infty, -\frac{11}{4}\left[\right.$
   (d) $S : [-6, +\infty$
   (e) $S : -\infty, \frac{8}{53}\left.\right]$
   (f) $S : -\infty, -\frac{2}{15}\left[\right.$
   (g) $S : \left[\frac{31}{5}, +\infty\right.$
   (h) $S : -\infty, \frac{4}{3}\left[\right.$
   (i) $S : \left]\frac{23}{13}, +\infty\right.$
   (j) $S : -\infty, -\frac{1}{3}\left.\right]$
   (k) $S : \left]\frac{134}{31}, +\infty\right.$
   (l) $S : \left[\frac{18}{23}, +\infty\right.$
3. (a) $\mathrm{S} : \{-7, 0\}$
   (b) $\mathrm{S} : \{-3, 0, 1\}$
   (c) $\mathrm{S} : \{-6, 6\}$
   (d) $\mathrm{S} : \{-1, 0, 1\}$
   (e) $\mathrm{S} : \{-3, 3\}$
   (f) $\mathrm{S} : \left\{\frac{1}{5}\right\}$
   (g) $\mathrm{S} : \{3\}$
   (h) $\mathrm{S} : \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$
   (i) $\mathrm{S} : \left\{-\frac{3}{2}, 3\right\}$
   (j) $\mathrm{S} : \left\{-1, 1, \frac{3}{2}\right\}$
   (k) $\mathrm{S} : \left\{-3, \frac{1}{4}, 3\right\}$
   (l) $\mathrm{S} : \{-1, 7\}$
   (m) $\mathrm{S} : \left\{-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right\}$
   (n) $\mathrm{S} : \left\{-3, -\frac{1}{3}, 2\right\}$
4. (a) CE : $x \neq -5$ ; S : $\{-7\}$
   (b) CE : $x \neq 0$ ; S : $\{4\}$
   (c) CE : $x \neq \frac{3}{2}$ ; S : $\{0\}$
   (d) CE : $x \neq 0$ ; S : $\left\{\frac{2}{3}\right\}$
   (e) CE : $x \neq 9$ ; S : $\{7\}$
   (f) CE : $x \neq 1$ ; S : $\phi$
   (g) CE : $x \neq 0$ ; S : $\{1\}$
   (h) CE : $x \neq 2$ ; S : $\{-3, 6\}$

(i) CE :$x \neq 0, x \neq -5$ ; S :$\{-10, 5\}$

(j) CE :$x \neq 0, x \neq -6$ ; S :$\{-3, 4\}$

(k) CE :$x \neq \pm 2$ ; S :$\{0\}$

(l) CE :$x \neq -1$ ; S :$\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

(m) CE :$x \neq 0, x \neq 1$ ; S :$\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$

(n) CE :$x \neq -4, x \neq -1$ ; S :$\left\{1, \frac{16}{9}\right\}$

(o) CE :$x \neq -3, x \neq 0$ ; S :$\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

(p) CE :$x \neq 0, x \neq 3$ ; S :$\phi$

5. (a)

| $x$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x-3$ | - | | - | 0 | + |
| $2x+3$ | - | 0 | + | | + |
| E(x) | + | 0 | - | 0 | + |

(b)

| $x$ | | -2 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | - | | - | | - |
| $x-1$ | - | | - | 0 | + |
| $x+2$ | - | 0 | + | | + |
| $E(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |

(c)

| $x$ | | $-\frac{7}{2}$ | | $\frac{7}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $7-2x$ | + | | + | 0 | - |
| $2x-7$ | - | | - | 0 | + |
| $2x+7$ | - | 0 | + | | + |
| $E(x)$ | + | 0 | - | 0 | - |

(d)

| $x$ | | -3 | | $-\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| -3 | - | | - | | - |
| $4+3x$ | - | | - | 0 | + |
| $(x+3)^2$ | + | 0 | + | | + |
| $E(x)$ | + | 0 | + | 0 | - |

(e)

| $x$ | | 0 | | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x$ | + | 0 | - | | - | | - |
| $1-2x$ | + | | + | | + | 0 | - |
| $1-3x$ | + | | + | 0 | - | | - |
| $E(x)$ | + | 0 | - | $\nexists$ | + | 0 | - |

(f)

| $x$ | | 0 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | - | 0 | + | | + | | + |
| $(x-1)^2$ | + | | + | 0 | + | | + |
| $1-x$ | + | | + | 0 | - | | - |
| $2-x$ | + | | + | | + | 0 | - |
| $E(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | $\nexists$ | + |

6. (a) $S: \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2},\right]$

(b) $S: -\infty, -\frac{4}{3}\left[\cup\right]-\frac{2}{3}, 0\left[\cup\right]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\left[\right.$

(c) $S: -\infty, -\frac{6}{7}\left[\cup\right]\frac{4}{5}, +\infty$

(d) $S: -\infty, 1[\cup]3, +\infty$

(e) $S: -\infty, -2[\cup\left[-\frac{7}{11}, +\infty\right.$

(f) $S: -\infty, -3[\cup\left]\frac{4}{15}, 4\right[$

(g) $S: -\infty, -1[\cup[0, 1[$

(h) $S: -\infty, -2[\cup]1, +\infty$

(i) $S: -\infty, -5[\cup[1, 2[\cup]3, +\infty$

# 3

# Les radicaux

## A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | Degré d'acquisition | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Maitriser les propriétés des exposants | 1 | | | |
| 2 | Réduire et simplifier des expressions contenant des radicaux d'indice 2 | 2-3-4-6 | | | |
| 3 | Rationaliser des dénominateurs contenant des radicaux d'indice 2 | 5-6 | | | |
| 4 | Calculer des radicaux d'indice supérieur à 2 | 7 | | | |
| 5 | Utiliser les exposants fractionnaires pour simplifier des expressions contenant des radicaux d'indices multiples | 8-9 | | | |
| 6 | Utiliser la calculatrice pour évaluer des expressions contenant des radicaux d'indices multiples | 10 | | | |

## 3.1 Exercices

1. Simplifier et calculer (les réponses ne peuvent plus contenir d'exposants négatifs)

   (a) $\dfrac{(-2)^4.\left(-2^{-5}\right)}{3^{-2}}$
   (b) $3a^3.4a^{-2}$
   (c) $\left(-3a^{-2}\right)^{-3}$
   (d) $\dfrac{-4a^3b^{-2}.3a^{-5}}{2ab^{-3}}$
   (e) $a^{-3}.a^7$
   (f) $\left(2a^{-2}b^3\right)^{-2}$
   (g) $\left(\dfrac{-2a^2b^{-4}}{3a^{-2}b^2}\right)^{-3}$

2. Réduire les produits suivants[1] :

   (a) (*)$\sqrt{3}.\sqrt{3}$
   (b) $\sqrt{7}.2\sqrt{7}$
   (c) (*)$\sqrt{28}.\sqrt{45}$
   (d) $2\sqrt{5}.\sqrt{2}.\sqrt{15}$
   (e) (*)$\sqrt{52}.\sqrt{39}$
   (f) $5\sqrt{12}.\sqrt{24}$
   (g) (*)$\sqrt{27}.\sqrt{75}$
   (h) $2\sqrt{11}.\sqrt{11^3}$
   (i) (*)$\sqrt{32}.3\sqrt{24}.\sqrt{8}$
   (j) $3\sqrt{5^2}.\sqrt{5^3}$

3. Calculer, en utilisant le moyen le plus simple :

   (a) (*)$\sqrt{5}(\sqrt{6}+\sqrt{15})$
   (b) $\sqrt{12}(\sqrt{48}-\sqrt{5})$
   (c) (*)$(3\sqrt{7}-\sqrt{28}).\sqrt{3}$
   (d) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+3)$
   (e) (*)$(1-\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})$
   (f) $(3+\sqrt{2})(2-\sqrt{3})$
   (g) (*)$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{6})$
   (h) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(3\sqrt{15}-\sqrt{6})$
   (i) (*)$(\sqrt{24}-3\sqrt{8})(\sqrt{50}+\sqrt{5})$
   (j) $\dfrac{\sqrt{48}\sqrt{15}\sqrt{6}}{\sqrt{20}\sqrt{10}}$

4. Calculer, en utilisant le moyen le plus simple :

   (a) (*)$3\sqrt{5}+2\sqrt{5}$
   (b) $\sqrt{50}.\sqrt{20}$
   (c) (*)$2\sqrt{5}+\sqrt{2}$
   (d) $(-3\sqrt{2})^2$
   (e) (*)$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$
   (f) $(-5+\sqrt{5})^2$
   (g) (*)$(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$
   (h) $(\sqrt{3}-2\sqrt{5})^3$
   (i) (*)$(3\sqrt{7}+2\sqrt{3})^3$
   (j) $7\sqrt{50}+4\sqrt{18}$
   (k) (*)$(2\sqrt{3}+5\sqrt{2}).\sqrt{24}$

5. Rationnaliser :

   (a) (*)$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
   (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
   (c) (*)$\sqrt{\dfrac{1}{3}}$
   (d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$
   (e) (*)$\sqrt{\dfrac{8}{27}}$
   (f) $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}$
   (g) (*)$\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$
   (h) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$
   (i) (*)$\dfrac{3-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$
   (j) $\dfrac{3\sqrt{8}-1}{2+\sqrt{18}}$
   (k) (*)$\dfrac{2\sqrt{5}-1}{5-2\sqrt{5}}$

1. Les exercices (*) doivent être fait, les autres serviront d'entrainement

6. Effectuer et rationnaliser éventuellement les fractions obtenues [2] :

   (a) $(^{*})5\sqrt{2}-\sqrt{18}+\sqrt{98}$
   (b) $3\sqrt{5}\,5\sqrt{3}\,(2\sqrt{15})$
   (c) $(^{*})\dfrac{2}{\sqrt{50}}\,\dfrac{\sqrt{8}}{1-\sqrt{5}}$
   (d) $5\sqrt{12}-2\sqrt{\dfrac{3}{4}}+2\sqrt{27}-8\sqrt{\dfrac{3}{16}}$
   (e) $(^{*})\sqrt{\dfrac{3}{5}}+2\sqrt{\dfrac{5}{3}}+\sqrt{60}$
   (f) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-\sqrt{2})$
   (g) $(^{*})\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\,\dfrac{14}{\sqrt{2}}$
   (h) $\dfrac{(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2}$
   (i) $(^{*})\dfrac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

7. Calculer (sans la calculatrice)

   (a) $(^{*})\sqrt[5]{-243}$
   (b) $\sqrt[4]{16}$
   (c) $(^{*})-\sqrt[4]{625}$
   (d) $\sqrt[3]{-0.008}$
   (e) $(^{*})-\sqrt[4]{\dfrac{81}{256}}$
   (f) $\sqrt[3]{343^{-1}}$
   (g) $(^{*})\sqrt[8]{-256}$

8. Calculer

   (a) $(^{*})25^{\frac{1}{2}}$
   (b) $-729^{\frac{1}{3}}$
   (c) $(^{*})\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3$
   (d) $(^{*})\left(\dfrac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$
   (e) $(4^3)^{\frac{1}{2}}$
   (f) $(^{*})\left(\dfrac{-32}{243}\right)^{-\frac{2}{5}}$

9. Ecrire sous forme de puissance de a et b ($a, b \in \mathbb{R}_0^+$). Donner la réponse sans exposant négatif et les exprimer sous forme de racines simplifiées ***et*** réduites [3] :.

   (a) $(^{*})a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{3}}$
   (b) $a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{1}{6}}.a^{-1}$
   (c) $(^{*})(a^2b^3)^{\frac{1}{6}}$
   (d) $\left(\dfrac{a^3b^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{12}}$
   (e) $(^{*})\left(a^{-\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$
   (f) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}$
   (g) $(^{*})\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}$
   (h) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)$
   (i) $(^{*})\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)$
   (j) $\dfrac{(0,25)^{\frac{1}{2}}.a^{-3}b^{-2}}{\sqrt{0,04}\sqrt[3]{a^{-1}}.b}$
   (k) $(^{*})\left(\sqrt[3]{a^{-2}b^{-3}}\right)^{-2}.\sqrt{a^{-1}b^{\frac{1}{2}}}$
   (l) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a^{-1}.b}}{a.\sqrt{b^{-2}}}}$
   (m) $(^{*})a\sqrt{a}\dfrac{a^2\sqrt{a^{-1}}}{a^{-3}\sqrt[3]{a}}$
   (n) $\left(\dfrac{\sqrt{a^5}.\sqrt[3]{b^4}}{125a^{-2}\sqrt[5]{b^3}}.\dfrac{a^{-\frac{1}{4}}}{b^{-2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

2. Les exercices (*) doivent être fait, les autres serviront d'entrainement
3. Les exercices (*) doivent être fait, les autres serviront d'entrainement

10. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à $10^{-3}$ près de :

    (a) $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[5]{\frac{3}{20}} + 10}$

    (b) $\sqrt[5]{2^3 - \sqrt[3]{2,356}} - \sqrt[4]{32,25 - \sqrt[3]{23,245}}$

## 3.2 Solutions

1. (a) $-\dfrac{9}{2}$
   (b) $12a$
   (c) $-\dfrac{a^6}{27}$
   (d) $-\dfrac{6b}{a^3}$
   (e) $a^4$
   (f) $\dfrac{a^4}{4b^6}$
   (g) $-\dfrac{27b^{18}}{8a^{12}}$
2. (a) 3
   (b) 14
   (c) $6\sqrt{35}$
   (d) $10\sqrt{6}$
   (e) $26\sqrt{3}$
   (f) $60\sqrt{2}$
   (g) 45
   (h) 242
   (i) $96\sqrt{6}$
   (j) $75\sqrt{5}$
3. (a) $\sqrt{30}+5\sqrt{3}$
   (b) $24-2\sqrt{15}$
   (c) $\sqrt{21}$
   (d) $2\sqrt{2}-1$
   (e) $14-8\sqrt{3}$
   (f) $-\sqrt{6}-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}+6$
   (g) $\sqrt{21}+\sqrt{14}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$
   (h) $\sqrt{30}+18\sqrt{5}-15\sqrt{3}-6\sqrt{2}$
   (i) $2\sqrt{30}-6\sqrt{10}+20\sqrt{3}-60$
   (j) $\dfrac{6\sqrt{15}}{5}$
4. (a) $5\sqrt{5}$
   (b) $10\sqrt{10}$
   (c) $2\sqrt{5}+\sqrt{2}$
   (d) 18
   (e) $2\sqrt{6}+5$
   (f) $30-10\sqrt{5}$
   (g) -1
   (h) $63\sqrt{3}-58\sqrt{5}$
   (i) $297\sqrt{7}+402\sqrt{3}$
   (j) $47\sqrt{2}$
   (k) $20\sqrt{3}+12\sqrt{2}$
5. (a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   (b) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$
   (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
   (d) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
   (e) $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$
   (f) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{7}$
   (g) $-\sqrt{5}-\sqrt{3}$
   (h) $\dfrac{3\sqrt{6}-3}{5}$
   (i) $\sqrt{2}-1$
   (j) $\dfrac{38-15\sqrt{2}}{14}$
   (k) $\dfrac{15+8\sqrt{5}}{5}$
6. (a) $9\sqrt{2}$
   (b) 450
   (c) $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{5}$
   (d) $13\sqrt{3}$
   (e) $\dfrac{43\sqrt{15}}{15}$
   (f) $45\sqrt{10}-180$
   (g) $63\sqrt{2}-28\sqrt{10}$

(h) $\dfrac{28\sqrt{6}+73}{25}$

(i) $30\sqrt{6}-72$

7. (a) -3
   (b) 2
   (c) -5
   (d) $-\dfrac{1}{5}$
   (e) $-\dfrac{3}{4}$
   (f) $\dfrac{1}{7}$
   (g) impossible

8. (a) 5
   (b) -9
   (c) 8
   (d) $\dfrac{2}{3}$
   (e) 8
   (f) $\dfrac{9}{4}$

9. (a) $a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$
   (b) $a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$
   (c) $a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{a}\sqrt{b}$
   (d) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{6}}}{c^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{\sqrt[4]{a}\sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{c}}$
   (e) $\left(a^{-\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a\sqrt{a}}+\sqrt[4]{a^3}}}$
   (f) $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$
   (g) $a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{a^3}$
   (h) $a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{b}$
   (i) $a - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} - b = a - b + \sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}$
   (j) $\dfrac{5}{2}a^{-\frac{8}{3}}b^{-3} = \dfrac{5}{2a^2\sqrt[3]{a^2}b^3}$
   (k) $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{9}{4}} = b^2\sqrt[6]{a^5}\sqrt[4]{b}$
   (l) $a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$
   (m) $a^{\frac{17}{3}} = a^5\sqrt[3]{a^2}$
   (n) $5a^{-\frac{17}{12}}b^{-\frac{41}{45}} = \dfrac{5}{a\sqrt[12]{a^5}\sqrt[45]{b^{41}}}$

10. (a) 3.364
    (b) -0.867

# Deuxième partie

# 4UAA1 - Statistique descriptive

# 4

# Statistique à une dimension

## 4.1 Exercices

Pour chacune des séries statistiques suivantes :

1. Analyser les données de manière graphiques (au moins histogrammes des effectifs, effectifs cumulés, fréquences et fréquences cumulées). D'autres graphes peuvent être présentés. Les graphiques seront commentés.
2. Caractériser entièrement les séries par des chiffres représentatifs qui seront analysés et commentés.
3. Tous les résultats devront être justifiés soit par un calcul soit par une phrase. Les statistiques ne tombent pas du ciel...

1. On a relevé les puissances en CV fiscaux des véhicules d'une société de location de voitures. Elles sont reprises dans le tableau suivant :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | 8 | 5 | 4 | 5 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 5 |
| 8 | 5 | 6 | 6 | 5 | 3 | 5 | 6 | 8 | 6 | 6 | 4 |
| 4 | 5 | 6 | 4 | 6 | 7 | 4 | 4 | 7 | 5 | 6 | 6 |
| 8 | 2 | 2 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 | 3 | 7 | 5 | 4 |
| 8 | 5 | 6 | 5 | 4 | 7 | 5 | 6 | 7 | 5 | 6 | 4 |
| 7 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 6 |

2. On a relevé les cotes d'une interrogation surprise (sur 10) d'un cours. Elles sont reprises dans le tableau suivant :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 4 | 8 | 5 | 7 | 7 | 5 | 8 | 5 | 7 | 3 | 9 |
| 6 | 5 | 6 | 5 | 7 | 3 | 6 | 4 | 8 | 4 | 10 | 5 | 9 |
| 5 | 4 | 6 | 3 | 6 | 6 | 5 | 3 | 4 | 6 | 7 | 4 | 7 |
| 7 | 5 | 5 | 7 | 4 | 7 | 5 | 7 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 |

3. On a relevé le nombre d'enfants de familles d'un village. Ils sont repris dans le tableau suivant :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 2 | 0 | 1 | 8 | 4 | 1 | 3 | 3 | 7 | 3 |
| 3 | 2 | 5 | 1 | 3 | 3 | 4 | 6 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 5 | 0 | 4 | 3 | 1 | 5 | 0 | 7 |

4. Une société immobilière dispose de 600 appartements dont les surfaces sont données par le tableau suivant :

| Surface (en $m^2$) | % des appartements |
|---|---|
| $[20, 50[$ | 2 |
| $[50, 60[$ | 15 |
| $[60, 80[$ | 13 |
| $[80, 100[$ | 22 |
| $[100, 120[$ | 28 |
| $[120, 145[$ | 20 |

5. Voici le nombre de minutes de connexion Internet d'un échantillon d'abonnés d'une compagnie spécialisée dans ce type de service :

| Nombre de minutes de connexion | Nombre d'abonnés |
|---|---|
| $[0,60[$ | 8 |
| $[60,90[$ | 20 |
| $[90,120[$ | 0 |
| $[120,150[$ | 60 |
| $[150,180[$ | 100 |
| $[180,210[$ | 12 |

6. Des analystes en finances viennent de composer un nouveau portefeuille REER pour les clients de la banque BANKO. Afin de vérifier son impact sur les clients, on prélève au hasard, 50 dépôts dans les comptes REER. Les montants déposés sont (en centaines d'€)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 59 | 101 | 76 | 86 | 99 | 87 | 99 | 101 | 77 | 58 |
| 87 | 66 | 82 | 59 | 77 | 81 | 89 | 114 | 97 | 87 |
| 99 | 77 | 77 | 99 | 79 | 88 | 107 | 86 | 89 | 76 |
| 71 | 80 | 83 | 79 | 100 | 98 | 77 | 84 | 81 | 89 |
| 85 | 86 | 85 | 83 | 85 | 67 | 83 | 88 | 75 | 100 |

7. Des investisseurs analysent un nouveau type d'investissement : fabrication d'un nouveau type d'automobile électrique. Voici le nombre de ventes chez un concessionnaire spécialisé durant 25 jours choisis au hasard le printemps dernier :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 186 | 183 | 196 | 194 | 193 | 193 | 189 | 199 | 200 | 192 |
| 190 | 186 | 194 | 191 | 187 | 188 | 197 | 195 | 196 | 190 |
| 180 | 188 | 186 | 198 | 199 | | | | | |

8. On a mesuré la taille des joueurs d'un club de basket. Elles sont reprises dans le tableau suivant :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 175 | 201 | 195 | 185 | 203 | 185 | 188 | 185 | 192 |
| 176 | 185 | 180 | 181 | 190 | 182 | 185 | 172 | 197 |
| 193 | 189 | 177 | 186 | 190 | 182 | 185 | 172 | 197 |
| 181 | 191 | 175 | 170 | 204 | 187 | 180 | 182 | 188 |
| 191 | 198 | 190 | 175 | 192 | 186 | 185 | 178 | 169 |

9. On a relevé les montants des chèques émis pendant une journée dans un magasin (en €). Ils sont repris dans le tableau suivant :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 127.00 | 390.00 | 410.00 | 540.50 | 190.00 | 280.00 | 210.00 | 425.00 |
| 350.00 | 742.00 | 176.00 | 138.50 | 120.00 | 355.20 | 472.00 | 140.00 |
| 170.20 | 150.30 | 170.00 | 595.00 | 792.50 | 688.20 | 100.50 | 672.00 |
| 240.00 | 200.10 | 185.00 | 205.00 | 175.00 | 182.50 | 150.10 | 180.10 |

10. On a relevé l'âge des employés d'une société. Ils sont repris dans le tableau suivant :

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 25 | 40 | 19 | 35 | 24 | 60 | 24 | 25 | 48 | 35 | 40 | 47 | 29 | 60 |
| 38 | 29 | 61 | 20 | 40 | 44 | 35 | 25 | 40 | 35 | 41 | 26 | 24 | 21 | 42 |
| 30 | 33 | 35 | 18 | 36 | 25 | 31 | 34 | 33 | 55 | 23 | 31 | 33 | 34 | 41 |
| 55 | 37 | 25 | 57 | 32 | 30 | 41 | 20 | 57 | 31 | 49 | 37 | 33 | 53 | 60 |
| 33 | 22 | 40 | 49 | 21 | 38 | 58 | 30 | 40 | 50 | 20 | 40 | 18 | 34 | 39 |
| 31 | 60 | 31 | 32 | 49 | 36 | 26 | 50 | 33 | 56 | 27 | 58 | 50 | 38 | 50 |

11. On a mesuré la distance parcourue chaque semaine entre le domicile et l'école par des élèves. Elles sont reprises dans le tableau suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 1 | 8 | 12 | 25 | 7 |
| 14 | 7 | 5 | 4 | 3 | 5 | 11 |
| 20 | 23 | 21 | 15 | 10 | 7 | 4 |
| 2 | 5 | 7 | 6 | 14 | 17 | 15 |
| 13 | 11 | 8 | 10 | 11 | 20 | 19 |

# Troisième partie

# 4UAA2 - Géométrie dans l'espace

# 5

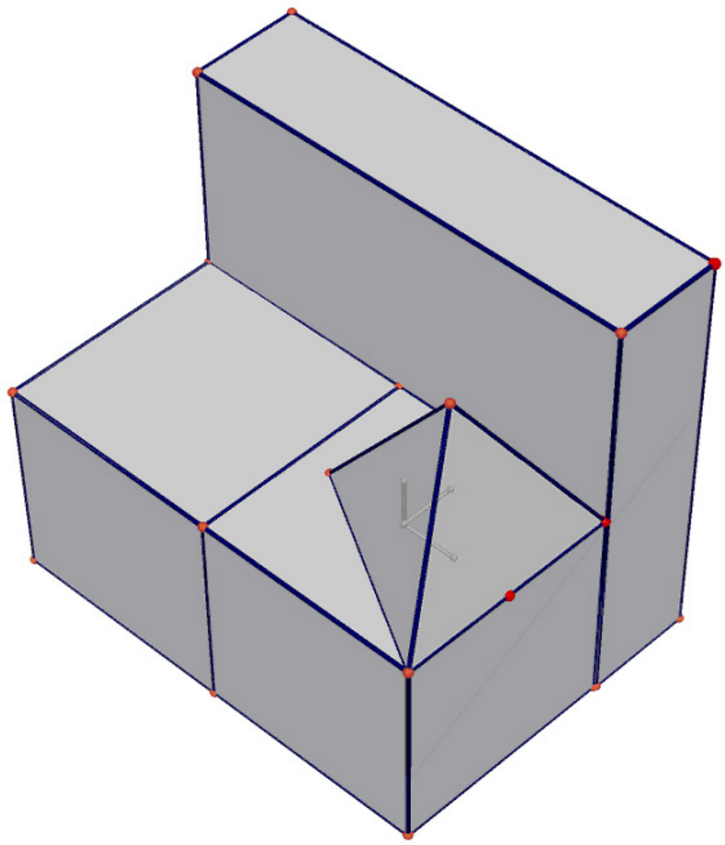
## Généralités sur la géométrie dans l'espace

### A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

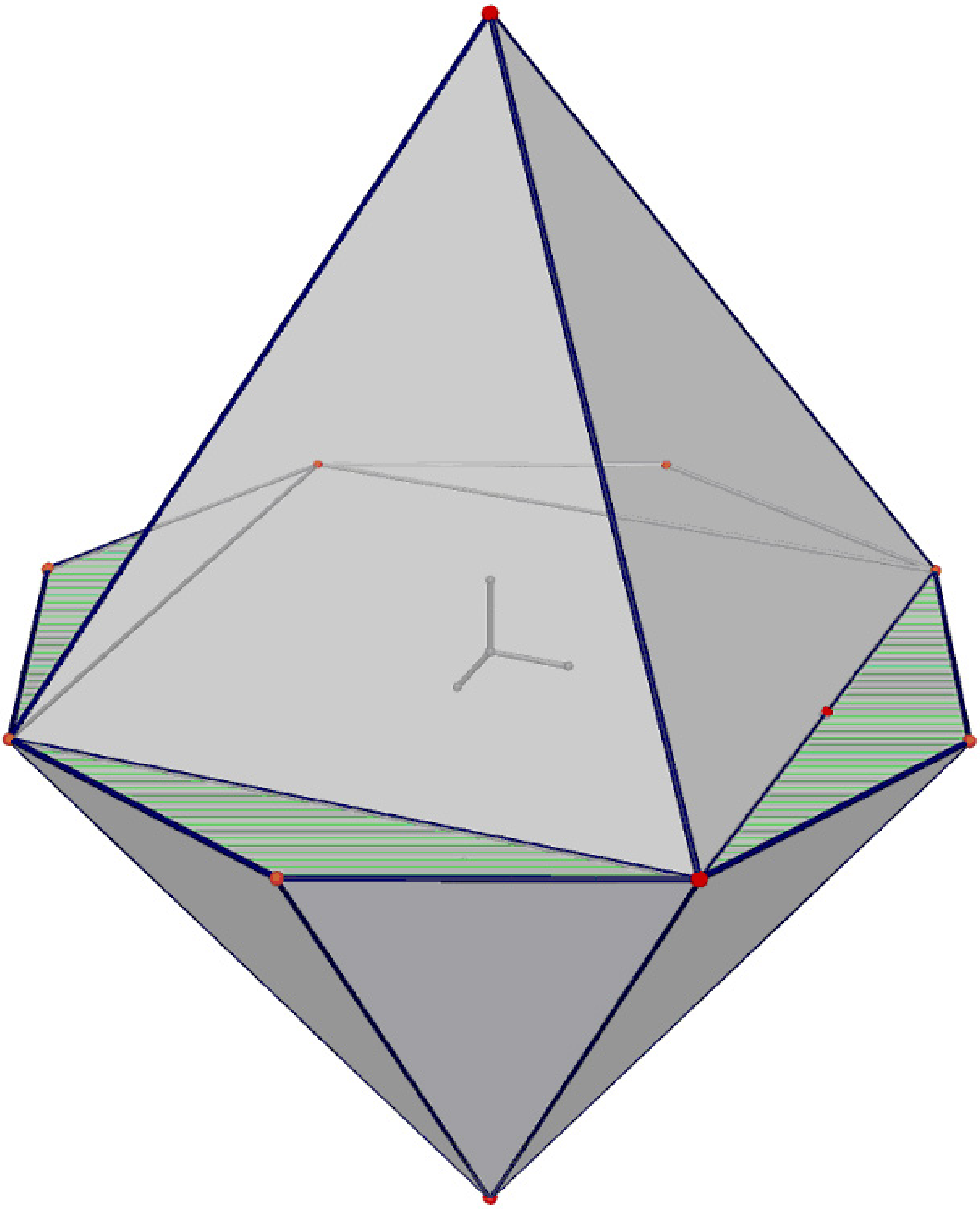
| | | | ***Degré d'acquisition*** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Représenter des objets dans l'espace en respectant les règles de perspective cavalière | 1-2-3-4 | | | |
| 2 | Représenter des objets en respectant les règles de parallélisme | 5 | | | |
| 3 | Représenter des situations géométriques décrites en français en respectant les règles de perspective cavalière | 6-7-8 | | | |
| 4 | Trouver sur des strucutures géométriques des entités décrites par leur position relative | 9 | | | |

## 5.1 Exercices

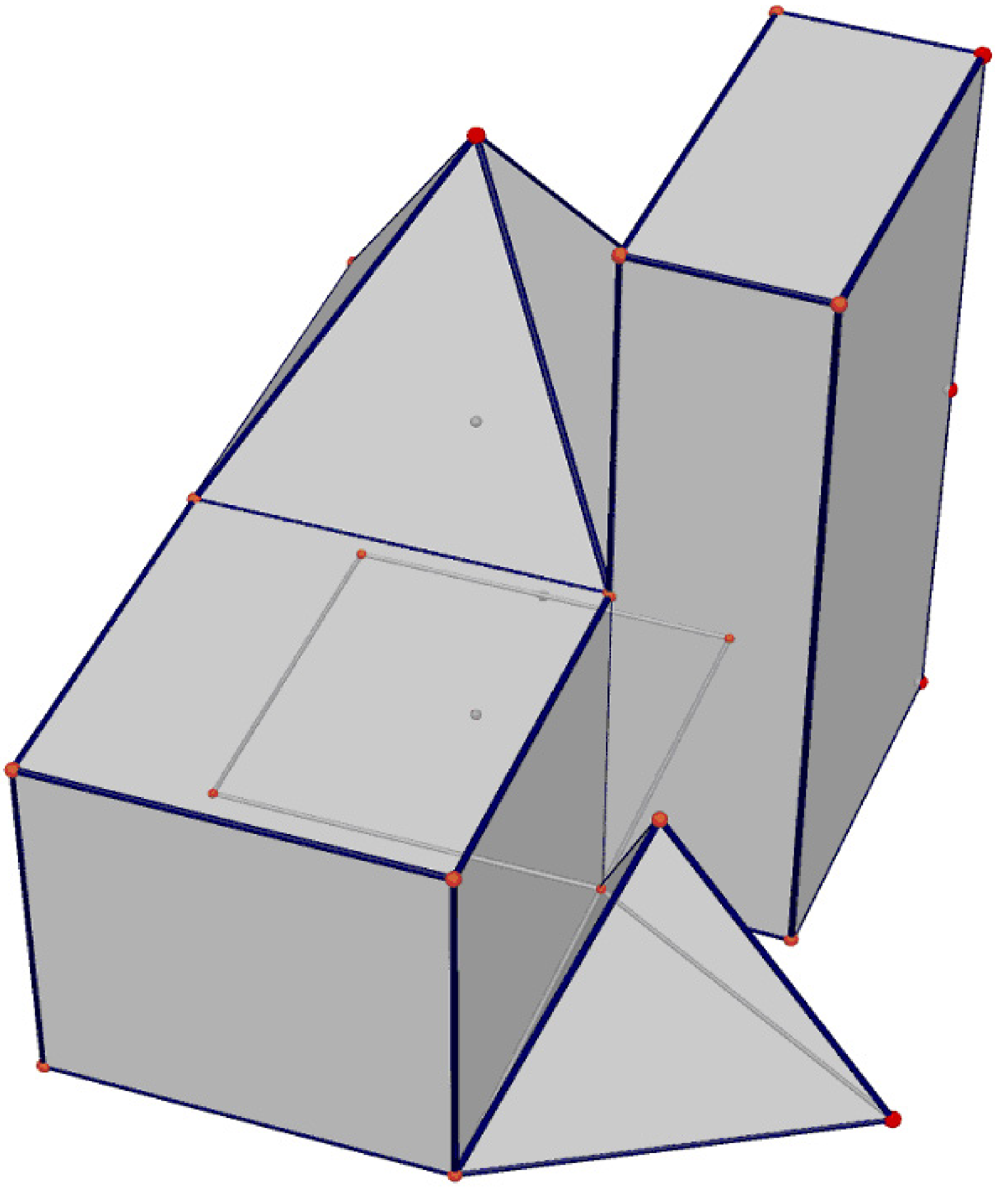
1. Dessiner, en appliquant les règles de perspective les figures suivantes :
   (a) Un cube ;
   (b) Un octaèdre ;
   (c) Un octaèdre tronqué ;
   (d) Un tétraèdre
   (e) Un tétraèdre tronqué.
2. Dessiner la figure suivante en utilisant les règles de perspective cavalière. On doit impérativement utiliser un autre point de vue que celui de la figure. Les cubes ont un côté de longueur 4, le prisme a une largeur 2 et une hauteur 8 et le tétraèdre est régulier.



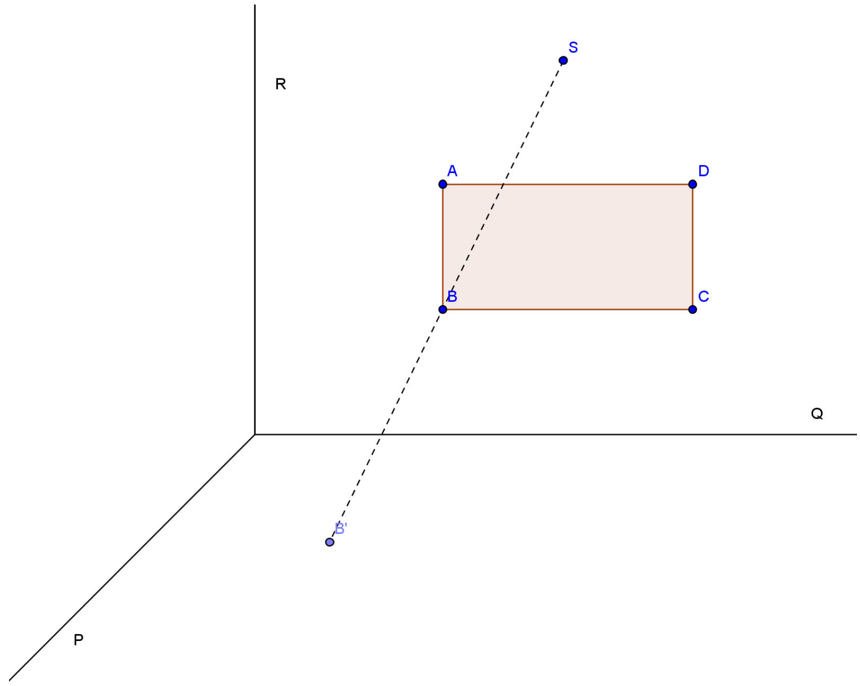
3. Même question avec les deux pyramides régulières ci-dessous. La base carrée de la première a des côtés de 4 cm de longueur. La hauteur des pyramides est de 4 cm

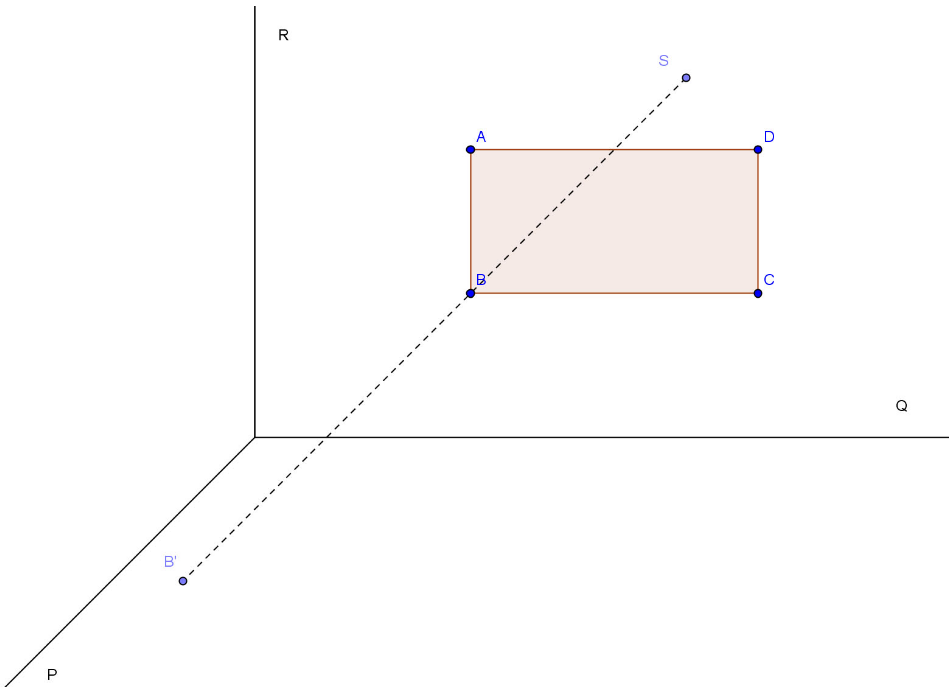


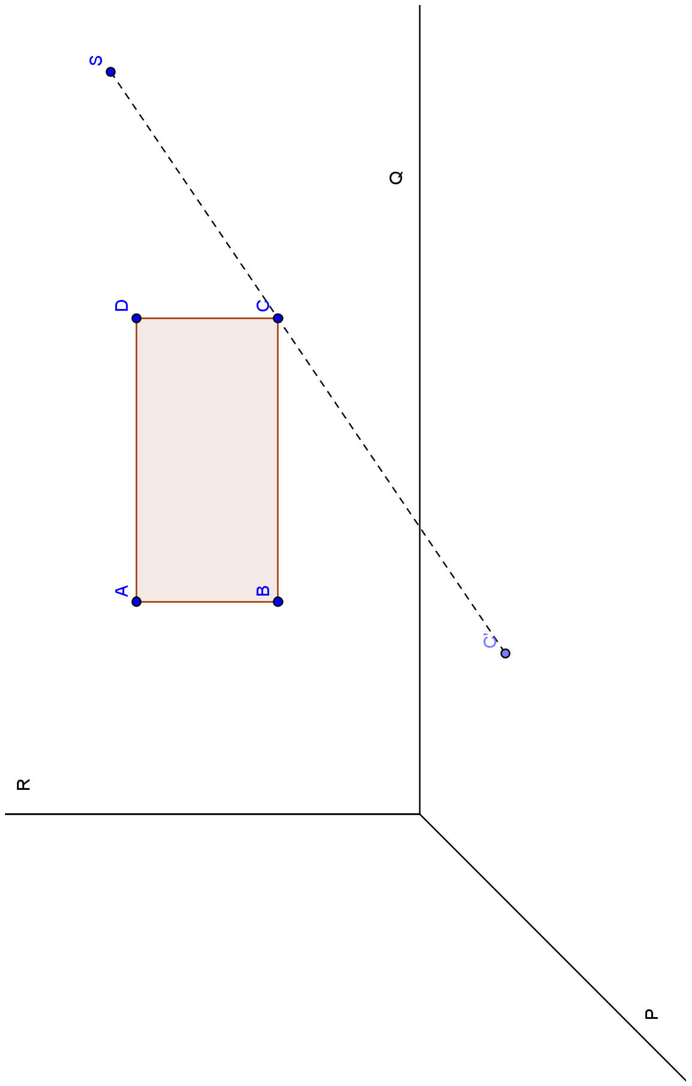
4. Même question avec la structure ci-dessous. Les dimensions des éléments sont les suivantes :
   – les cubes ont un côté 4 ;
   – la pyramide à une hauteur 4 ;
   – le prisme a une largeur 2, un profondeur 4 et une hauteur 8 ;
   – le tétraèdre est régulier.



5. Sur chacune des trois figures, dessiner la trace lumineuse laissée par le soleil entrant dans une pièce à travers une fenêtre rectangulaire $ABCD$ située dans le plan $QR$. Les rayons incidents sont marqués par la direction de la droite en pointillés, et la trace peut être visible sur le sol et/ou sur le mur de gauche (plan $PR$), en fonction de l'inclinaison des rayons. Les points $B'$ et $C'$ sont situés sur le sol (plan $PQ$).

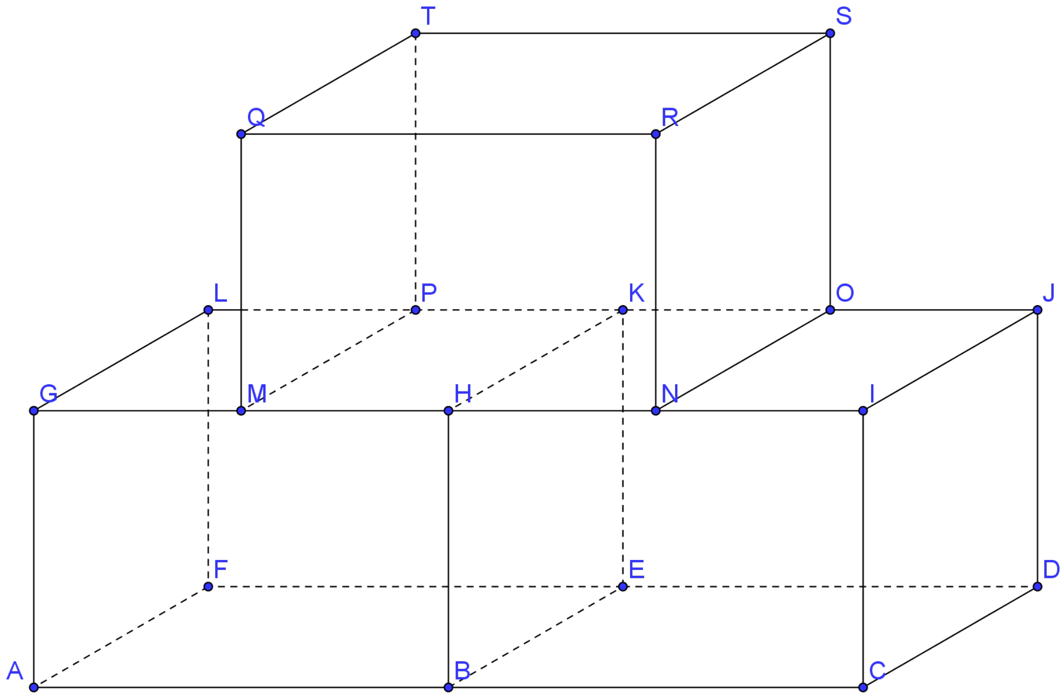





6. On donne $\alpha \cap \beta = i$, $d \cap \alpha = \{A\}$, $d \cap \beta = \{B\}$, $P \in i$. Dessiner la situation, la droite $AB$ et la droite $BP$.
7. Dans le tétraèdre $SABC$, $A'$, $B'$ et $C'$ désignent respectivement les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Démontrer que les plans $SAA'$, $SBB'$ et $SCC'$ contiennent un même droite. Laquelle ?
8. Soient $a$ et $b$ deux droites sécantes d'un plan $\pi$ et un point $P$ n'appartenant pas à $\pi$. Déterminer l'intersection des plans définis par $a$ et $P$ d'une part et par $b$ et $P$ d'autre part.

9. On donne l'empillement suivant :




Donner les noms de trois droites :

(a) parallèles ;

(b) perpendiculaires ;

(c) gauches.

Donner le noms de deux plans :

(a) parallèles ;

(b) sécants.

# 6 Problèmes d'intersection

Ce chapitre sera distribué en cours d'année en fonction du déroulement de l'année.

# Quatrième partie

# 4UAA3 - Trigonométrie

# 7

# Trigonométrie dans le triangle rectangle

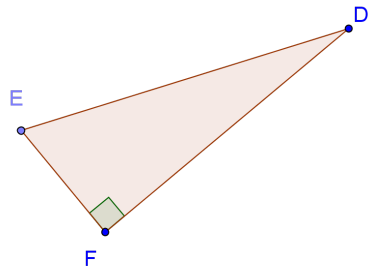
## A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | Degré d'acquisition | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Convertir des angles | 1-2-3 | | | |
| 2 | Résoudre des problèmes relatifs à des arcs de cercle et à des secteurs circulaires | 4 | | | |
| 3 | Reconnaitre des côtés adjacents et opposés à des angles aigus dans un triangle rectangle | 5-6-7 | | | |
| 4 | Calculer graphiquement les nombres trigonométriques des angles d'un triangle rectangle | 8 à 16-19-20-21 | | | |
| 5 | Utiliser la calculatrice pour déterminer les nombres trigonométriques d'un angle ou un angle dont on connait un nombre trigonométrique | 17-18 | | | |
| 6 | Résoudre des problèmes mettant en œuvre la trigonométrie dans le triangle rectangle | 22 à 37 | | | |

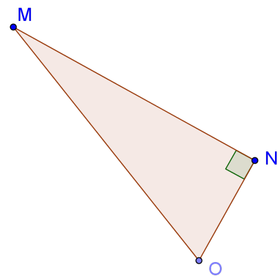
## 7.1 Exercices

1. Repasser en couleur les côtés demandés.

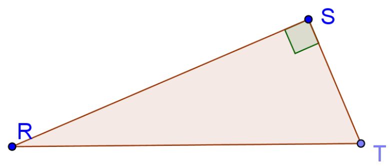
   (a) Le côté adjacent à l'angle $\widehat{DEF}$.



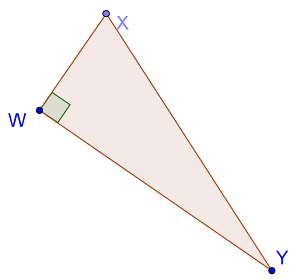

   (b) Le côté opposé à l'angle $\widehat{MON}$.



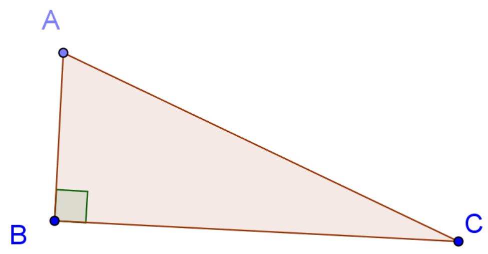

   (c) L'hypoténuse en rouge et le côté opposé à l'angle $\widehat{SRT}$ en bleu.




   (d) L'hypoténuse en rouge et le côté adjacent à l'angle $\widehat{WXY}$ en bleu.



(e) L'hypoténuse en rouge et le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$ en bleu.

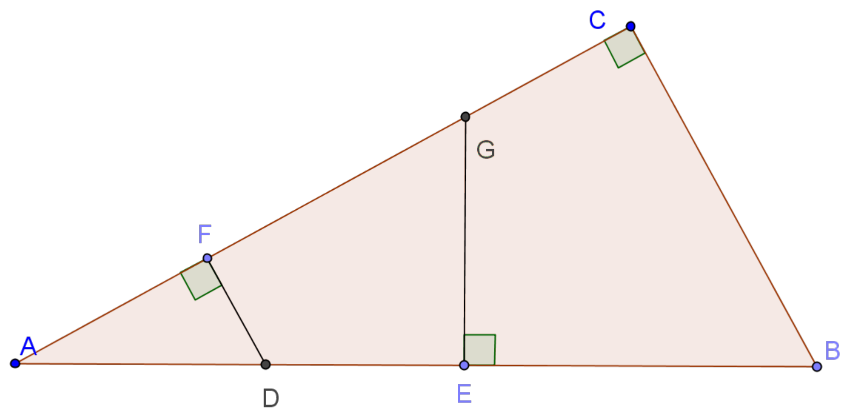



2. (a) Soit un triangle $ABC$ rectangle en $A$.
   - L'hypoténuse est ......... .
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ est ......... .
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$ est ......... .

   (b) Soit $DEF$ un triangle rectangle en $E$.
   - L'hypoténuse est ......... .
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{EDF}$ est ......... .
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{EFD}$ est ......... .

   (c) $GHI$ est un triangle rectangle en $H$.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{HIG}$ est ......... .
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{HGI}$ est ......... .

3. Soit les triangles suivants :




   (a) L'hypoténuse du triangle rectangle $ABC$ est .... .

   (b) L'hypoténuse du triangle rectangle $AEG$ est .... .

   (c) Dans le triangle rectangle $EGA$, le côté opposé à l'angle $\widehat{EGA}$ est ........ .

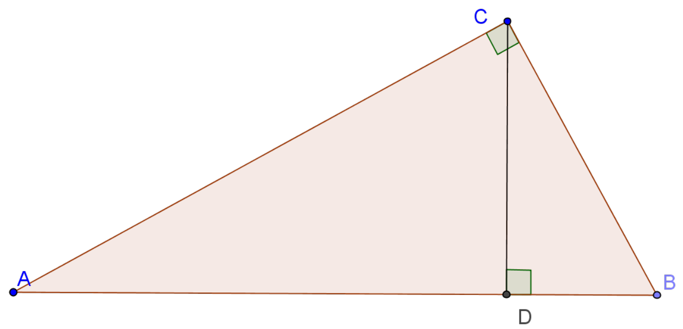
   (d) Dans le triangle rectangle $FAD$, le côté opposé à l'angle $\widehat{ADF}$ est ........ .

   (e) Dans le triangle rectangle $AEG$, le côté adjacent à l'angle $\widehat{AGE}$ est ........ .

   (f) Dans le triangle rectangle $ADF$, le côté adjacent à l'angle $\widehat{DAF}$ est ........ .

   (g) Dans le triangle rectangle $BEG$, le côté adjacent à l'angle $\widehat{EGB}$ est ........ .

4. $MNO$ est un triangle rectangle en $O$.
   - L'hypoténuse est ......... .
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{MNO}$ est ......... .
   - Donc $\cos \widehat{MNO} =$
5. $HKJ$ est un triangle rectangle en $K$.
   - L'hypoténuse est ......... .
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{HJK}$ est ......... .
   - Donc $\sin \widehat{HJK} =$
6. $RST$ est un triangle rectangle en $S$.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{SRT}$ est ......... .
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{SRT}$ est ......... .
   - Donc $\tan \widehat{SRT} =$
7. $TUV$ est un triangle rectangle en $V$.
   - L'hypoténuse est ......... .
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{TUV}$ est ......... .
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{TUV}$ est ......... .
   - Donc $\cos \widehat{TUV} =$
   - Donc $\sin \widehat{TUV} =$
   - Donc $\tan \widehat{TUV} =$
8. En utilisant la figure ci-dessous, compléter les phrases




   (a) Dans le triangle $ABC$ rectangle en $C$, on a : $\cos \widehat{BAC} =$

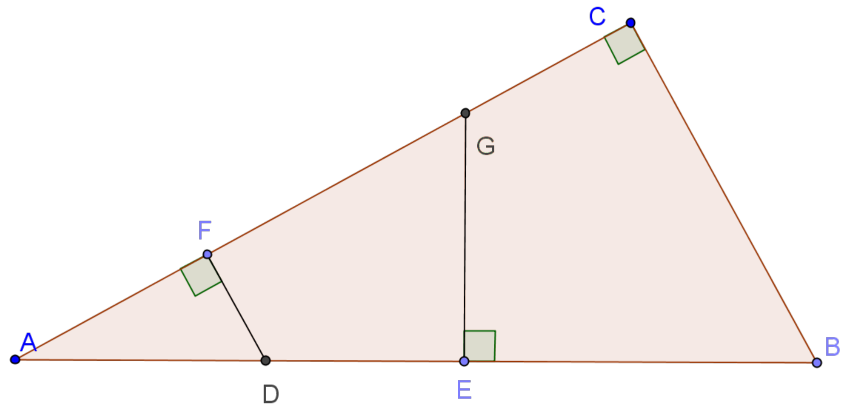
   (b) Dans le triangle $ABC$ rectangle en $C$, on a : $\cos \widehat{ABC} =$

   (c) Dans le triangle $BCD$ rectangle en $D$, on a : $\sin \widehat{BCD} =$

   (d) Dans le triangle $BCD$ rectangle en $D$, on a : $\tan \widehat{DBC} =$

   (e) Dans le triangle $ADC$ rectangle en $D$, on a : $\sin \widehat{ACD} =$

9. Soit les triangles suivants :




   (a) Dans le triangle $ABC$ rectangle en $C$, on a : .......$\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB}$
   (b) Dans le triangle $FDA$ rectangle en $F$, on a : .......$\widehat{FDA} = \dfrac{FA}{DA}$
   (c) Dans le triangle $BEG$ rectangle en $E$, on a : cos $\widehat{\ldots\ldots\ldots}$ $= \dfrac{EG}{BG}$
   (d) Dans le triangle $BEG$ rectangle en $E$, on a : sin $\widehat{\ldots\ldots\ldots}$ $= \dfrac{EG}{BG}$
   (e) Dans le triangle ......... rectangle en ...., on a : .................. = .................. $= \dfrac{FD}{AD}$

10. Soit un triangle $ABC$ rectangle en $A$. Calculer les nombres trigonométriques de $\hat{B}$ et $\hat{C}$ si :

    (a) $AB = 3$ et $AC = 4$
    (b) $AB = 2$ et $BC = 6$

11. A l'aide d'une latte et d'un compas, tracer trois angles :

    (a) dont le sinus vaut $\dfrac{2}{5}$
    (b) dont le cosinus vaut $\dfrac{3}{4}$
    (c) dont la tangente vaut 2

12. Soit un triangle $ABC$ rectangle en $A$. Compléter le tableau suivant, en valeur exacte [1] :

| | cas 1 | cas2 | cas3 | cas4 |
|---|---|---|---|---|
| a | | | 10 | |
| b | 3 | 5 | | |
| c | 4 | | | 8 |
| sin $B$ | | 0.5 | | |
| cos $B$ | | | 0.3 | |
| tan $B$ | | | | 2 |
| sin $C$ | | | | |
| cos $C$ | | | | |
| tan $C$ | | | | |

1. Pour rappel :
   – Une valeur exacte contient des radicaux et des fractions réduites et rationnalisées ;
   – Une valeur approchée est un chiffre décimal.

En matémathique, on travail toujours en ***valeur exacte***.

13. A l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs, arrondies au centième, du cosinus, du sinus et de la tangente des angles donnés.

| Angle | 30° | 45° | 20° | 83° | 60° |
|---|---|---|---|---|---|
| Cosinus | | | | | |
| Sinus | | | | | |
| Tangente | | | | | |

14. A l'aide de la calculatrice, calculer la valeur arrondie au degré de la mesure des angles.

| Cosinus | 0,2 | 0,58 | 0,9 |
|---|---|---|---|
| Angle | | | |

| Sinus | 0,3 | 0,65 | 1,3 |
|---|---|---|---|
| Angle | | | |

| Tangente | 0,8 | 1,23 | 3,92 |
|---|---|---|---|
| Angle | | | |

15. $ABC$ est un triangle rectangle en $A$, $AB$=5 cm et $\widehat{BCA} = 35°$. On veut calculer la longueur $BC$.

(a) Dessiner le triangle, repasser en couleur la longueur connue et la longueur que l'on cherche puis compléter.

- $[BC]$ est ....................,
- $[BA]$ est .................... à l'angle $\widehat{BCA}$,
- on utilise donc ............... de l'angle $\widehat{BCA}$.

(b) Calcul de $BC$. Dans le triangle $ABC$ rectangle en $A$, on a :

$$\text{.............}\widehat{BCA} = \frac{\text{côté .................. à}\widehat{BCA}}{\text{.........................}}$$

$$\text{donc .............}\widehat{BCA} = \frac{\text{........................}}{\text{........................}}$$

Donc $BC =$ .........................

A l'aide de la calculatrice, on en déduit la longueur $BC$ arrondie au millimètre : $BC \approx$ ............ cm.

16. $MNP$ est un triangle rectangle en $M$ tel que $PN$=5,4 cm et $\widehat{MPN}$= 42°. On veut calculer la longueur $MP$.

    (a) Dessiner le triangle, repasser en couleur la longueur connue et la longueur que l'on cherche puis compléter.
    - $[PN]$ est ...................,
    - $[MP]$ est ................... à l'angle $\widehat{MPN}$,
    - on utilise donc .............. de l'angle $\widehat{MPN}$.

    (b) Calcul de $MP$. Dans le triangle $MNP$ rectangle en $M$, on a :

    $$\text{............}\widehat{MPN} = \frac{\text{côté .................. à}\widehat{MPN}}{\text{........................}}$$

    $$\text{donc ............}\widehat{MPN} = \frac{\text{........................}}{\text{........................}}$$

    Donc $MP =$ .........................
    A l'aide de la calculatrice, on en déduit la longueur $MP$ arrondie au millimètre : $MP \approx$ ........... cm.

17. $RST$ est un triangle rectangle en $S$ tel que $RS$=4 cm et $ST$=7 cm. On veut calculer l'angle $\widehat{SRT}$.

    (a) Dessiner le triangle, repasser en couleur la longueur connue et la longueur que l'on cherche puis compléter.
    - $[RS]$ est ................... à l'angle $\widehat{SRT}$,
    - $[ST]$ est ................... à l'angle $\widehat{SRT}$,
    - on utilise donc .............. de l'angle $\widehat{SRT}$.

    (b) Calcul de l'angle $\widehat{SRT}$. Dans le triangle $RST$ rectangle en $S$, on a :

    $$\text{............}\widehat{SRT} = \frac{\text{........................}}{\text{........................}}$$

    $$\text{donc ............}\widehat{SRT} = \frac{\text{........................}}{\text{........................}} = \frac{\text{........................}}{\text{........................}}$$

    A l'aide de la calculatrice, on en déduit une mesure de l'angle $\widehat{SRT}$ arrondie au degré : $\widehat{SRT} \approx$ ...........°.

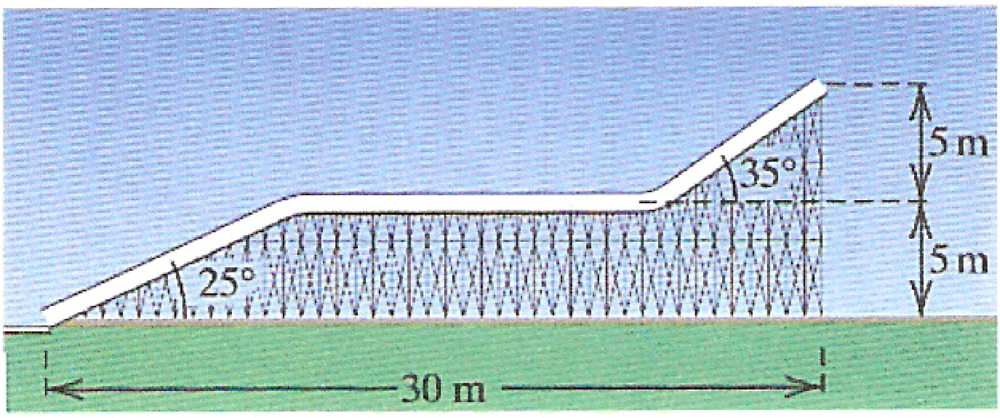
18. $IJK$ est un triangle rectangle en I tel que IJ = 3,2 cm et JK = 5,3 cm. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{IKJ}$ arrondie au degré.

19. $ABC$ est un triangle rectangle en $A$, $H$ est le pied de la hauteur issue de $A$, $AH$ = 5 cm ;$\widehat{ABC} = 40°$.

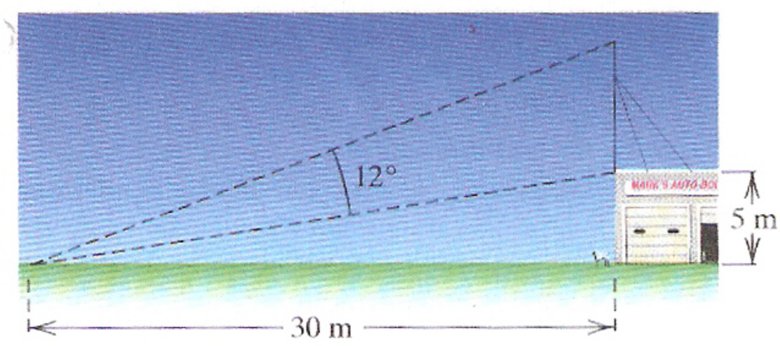
    (a) Calculer la longueur AB arrondie au dixième.

    (b) Calculer la longueur BC arrondie au dixième.

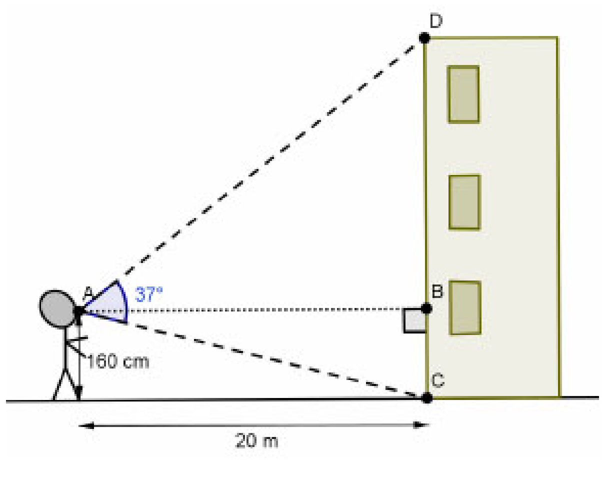
20. $ABCD$ est un trapèze rectangle en $D$ de bases $[AB]$ et $[CD]$ tel que $AB = AD = 4{,}5$ cm et $DC = 6$ cm.
    (a) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$ arrondie au degré.
    (b) Calculer la longueur de la diagonale $[AC]$ arrondie au millimètre.
    (c) Quelle est la nature du triangle $ABD$ ? Justifie.
    (d) Calculer la longueur $BD$ arrondie au millimètre.
21. Luc a construit un plan incliné de 30° dont la base mesure 15 cm de long pour propulser des billes. Quelle est la longueur de la pente ? Donner l'arrondi au millimètre.
22. Dans la nuit, un lampadaire de 2,60 m de haut, dessine sur le sol un disque de 95 cm de rayon.
    Quelle est la mesure de l'angle, arrondie au degré, formé par le cône de lumière avec le sol ?
23. La base d'un triangle isocèle $ABC$ mesure 42 cm, les côtés égaux mesurent 64cm. Calculer les angles de ce triangle ainsi que la longueur de la hauteur relative à la base.
24. Une personne manoeuvrant un cerf-volant tient le fil à 1 mètre au dessus du niveau du sol. Le fil est tendu et forme en angle de 60° avec l'horizontale. Calculer l'altitude du cerf volant si on laisse dérouler 150 mètres de fil.
25. Un avion volant à 1500m. d'altitude désire aborder une piste d'atterrissage sous un angle de 10°. Calculer la distance horizontale entre l'avion et la piste au moment où il amorce la descente.
26. La figure ci-dessous représente une partie de toboggan d'une piscine. Trouver la longueur totale du toboggan.



27. Une antenne est située sur le toit d'un garage haut de 5m. A partir d'un point au sol distant de 30m d'un point situé à la verticale de l'antenne, on voit l'antenne sous un angle de 12°. Trouver la hauteur de l'antenne.




28. Trouver la hauteur d'une tour sachant que son ombre s'allonge de 62m lorsque l'élévation du soleil au dessus de l'horizon passse de 50° à 23.5°.
29. D'un ballon dirigeable, on observe deux maisons placées dans la même direction mais dont l'une est éloignée de l'autre de 1km. Les deux rayons visuels forment avec l'horizon des angles de 20° et 35°. Trouver la distance de la verticale du ballon à la maison la plus proche.
30. Une personne placée au bord d'une rivière voit sous un angle de 60° un arbre planté sur la rive opposée. Lorsqu'elle s'éloigne de 40m, l'angle n'est plus que de 20°. Calculer la hauteur de l'arbre et la largeur de la rivière.
31. Sur la figure suivante la personne, dont les yeux se trouvent en à 160 cm du sol et qui se tient à 20 m de l'immeuble, voit celui-ci sous un angle $\widehat{CAD} = 37°$. Quelle est la hauteur de l'immeuble.




32. ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AB$ = 10 cm ; $BC$ = 4,8 cm ; $GC$ = 6,4 cm.
    (a) Calculer $FC$.
    (b) Quelle est la nature du triangle $EFC$ ?
    (c) Donner l'arrondi à l'unité de la mesure de l'angle $\widehat{FCE}$.

## 7.2 Solutions

1. Voir cours oral
2. (a) Soit un triangle $ABC$ rectangle en $A$.
   - L'hypoténuse est BC.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ est AB.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$ est AC.

   (b) Soit $DEF$ un triangle rectangle en $E$.
   - L'hypoténuse est DF.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{EDF}$ est EF.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{EFD}$ est DE.

   (c) $GHI$ est un triangle rectangle en $H$.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{HIG}$ est HI.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{HGI}$ est HI.
3. (a) L'hypoténuse du triangle rectangle $ABC$ est AB

   (b) L'hypoténuse du triangle rectangle $AEG$ est AG

   (c) Dans le triangle rectangle $EGA$, le côté opposé à l'angle $\widehat{EGA}$ est AE

   (d) Dans le triangle rectangle $FAD$, le côté opposé à l'angle $\widehat{ADF}$ est AF

   (e) Dans le triangle rectangle $AEG$, le côté adjacent à l'angle $\widehat{AGE}$ est EG

   (f) Dans le triangle rectangle $ADF$, le côté adjacent à l'angle $\widehat{DAF}$ est AF

   (g) Dans le triangle rectangle $BEG$, le côté adjacent à l'angle $\widehat{EGB}$ est EG
4. – L'hypoténuse est MN.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{MNO}$ est NO.
   - Donc $\cos\widehat{MNO} = \dfrac{NO}{MN}$
5. – L'hypoténuse est HJ.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{HJK}$ est HK.
   - Donc $\sin\widehat{HJK} = \dfrac{HK}{HJ}$
6. – Le côté adjacent à l'angle $\widehat{SRT}$ est RS.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{SRT}$ est TS.
   - Donc $\tan\widehat{SRT} = \dfrac{TS}{RS}$
7. – L'hypoténuse est TU.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{TUV}$ est UV.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{TUV}$ est TV.
   - Donc $\cos\widehat{TUV} = \dfrac{UV}{TU}$
   - Donc $\sin\widehat{TUV} = \dfrac{TV}{TU}$
   - Donc $\tan\widehat{TUV} = \dfrac{TV}{UV}$

8. (a) Dans le triangle $ABC$ rectangle en $C$, on a : $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AC}{AB}$

   (b) Dans le triangle $ABC$ rectangle en $C$, on a : $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BC}{AB}$

   (c) Dans le triangle $BCD$ rectangle en $D$, on a : $\sin\widehat{BCD} = \dfrac{BD}{BC}$

   (d) Dans le triangle $BCD$ rectangle en $D$, on a : $\tan\widehat{DBC} = \dfrac{DC}{BD}$

   (e) Dans le triangle $ADC$ rectangle en $D$, on a : $\sin\widehat{ACD} = \dfrac{AD}{AC}$

9. (a) Dans le triangle $ABC$ rectangle en $C$, on a :$\sin\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB}$

   (b) Dans le triangle $FDA$ rectangle en $F$, on a :$\sin\widehat{FDA} = \dfrac{FA}{DA}$

   (c) Dans le triangle $BEG$ rectangle en $E$, on a : $\cos\widehat{EGB} = \dfrac{EG}{BG}$

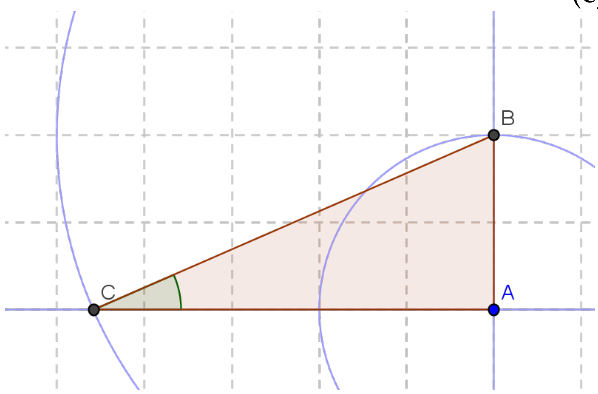
   (d) Dans le triangle $BEG$ rectangle en $E$, on a : $\sin\widehat{EBG} = \dfrac{EG}{BG}$

   (e) Dans le triangle $ADF$ rectangle en $F$, on a :$\sin\widehat{FAD} = \cos\widehat{ADF} = \dfrac{FD}{AD}$

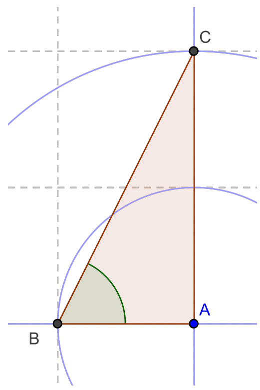
10. (a) $BC = 5$, $\cos\hat{B} = \sin\hat{C} = \dfrac{3}{5}$, $\cos\hat{C} = \sin\hat{B} = \dfrac{4}{5}$ et $\tan\hat{B} = \dfrac{1}{\tan\hat{C}} = \dfrac{4}{3}$ ;

    (b) $AC = 4\sqrt{2}$, $\cos\hat{B} = \sin\hat{C} = \dfrac{1}{3}$, $\cos\hat{C} = \sin\hat{B} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ et $\tan\hat{B} = \dfrac{1}{\tan\hat{C}} = 2\sqrt{2}$ ;

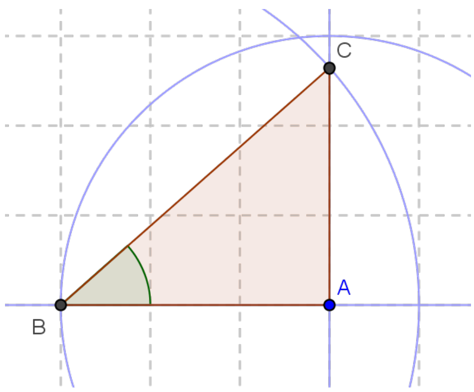
11. (a)




(c)




(b)



12.

| | cas 1 | cas2 | cas3 | cas4 |
|---|---|---|---|---|
| a | 5 | 10 | 10 | $8\sqrt{5}$ |
| b | 3 | 5 | $\sqrt{91}$ | 16 |
| c | 4 | $5\sqrt{3}$ | 3 | 8 |
| $\sin B$ | $\frac{3}{5}$ | 0.5 | $\frac{\sqrt{91}}{10}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ |
| $\cos B$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0.3 | $\frac{\sqrt{5}}{5}$ |
| $\tan B$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\sqrt{91}}{3}$ | 2 |
| $\sin C$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0.3 | $\frac{\sqrt{5}}{5}$ |
| $\cos C$ | $\frac{3}{5}$ | 0.5 | $\frac{\sqrt{91}}{10}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ |
| $\tan C$ | $\frac{4}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{3\sqrt{91}}{91}$ | $\frac{1}{2}$ |

13.

| Angle | 30° | 45° | 20° | 83° | 60° |
|---|---|---|---|---|---|
| Cosinus | 0,87 | 0,71 | 0,94 | 0,12 | 0,5 |
| Sinus | 0,5 | 0,71 | 0,34 | 0,99 | 0,87 |
| Tangente | 0,58 | 1 | 0,36 | 8,14 | 1,73 |

14.

| Cosinus | 0,2 | 0,58 | 0,9 |
|---|---|---|---|
| Angle | 78° | 55° | 26° |

| Sinus | 0,3 | 0,65 | 1,3 |
|---|---|---|---|
| Angle | 17° | 41° | Imp. |

| Tangente | 0,8 | 1,23 | 3,92 |
|---|---|---|---|
| Angle | 39° | 51° | 76° |

15. $ABC$ est un triangle rectangle en $A$, $AB$=5 cm et $\widehat{BCA} = 35°$. On veut calculer la longueur $BC$.

(a) Dessiner le triangle, repasser en couleur la longueur connue et la longueur que l'on cherche puis compléter.

- $[BC]$ est l'hypoténuse,
- $[BA]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{BCA}$,
- on utilise donc le sinus de l'angle $\widehat{BCA}$.

(b) Calcul de $BC$. Dans le triangle $ABC$ rectangle en $A$, on a :

$$\sin\widehat{BCA} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BCA}}{\text{hypotnéuse}}$$

donc $\sin\widehat{BCA} = \dfrac{BA}{BC}$

Donc $BC = \dfrac{BA}{\sin\widehat{BCA}}$ A l'aide de la calculatrice, on en déduit la longueur $BC$ arrondie au millimètre : $BC \approx 8,7$ cm.

16. $MNP$ est un triangle rectangle en $M$ tel que $PN$=5,4 cm et $\widehat{MPN}$= 42°. On veut calculer la longueur $MP$.

    (a) Dessiner le triangle, repasser en couleur la longueur connue et la longueur que l'on cherche puis compléter.
    - $[PN]$ est l'hypoténuse,
    - $[MP]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{MPN}$,
    - on utilise donc le cosinus de l'angle $\widehat{MPN}$.

    (b) Calcul de $MP$. Dans le triangle $MNP$ rectangle en $M$, on a :
    $\cos\widehat{MPN} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{MPN}}{\text{hypoténuse}}$
    donc $\cos\widehat{MPN} = \dfrac{MP}{PN}$
    Donc $MP = PN.\cos\widehat{MPN}$ A l'aide de la calculatrice, on en déduit la longueur $MP$ arrondie au millimètre : $MP \approx 4$ cm.

17. $RST$ est un triangle rectangle en $S$ tel que $RS$=4 cm et $ST$=7 cm. On veut calculer l'angle $\widehat{SRT}$.

    (a) Dessiner le triangle, repasser en couleur la longueur connue et la longueur que l'on cherche puis compléter.
    - $[RS]$ le côté adjacent est à l'angle $\widehat{SRT}$,
    - $[ST]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{SRT}$,
    - on utilise donc la tangente de l'angle $\widehat{SRT}$.

    (b) Calcul de l'angle $\widehat{SRT}$. Dans le triangle $RST$ rectangle en $S$, on a :
    $\tan\widehat{SRT} = \dfrac{\text{le côté opposé à l'angle } \widehat{SRT}}{\text{le côté adjacent à l'angle } \widehat{SRT}}$
    donc $\tan\widehat{SRT}=\dfrac{ST}{RS}=\dfrac{7}{4}$.
    A l'aide de la calculatrice, on en déduit une mesure de l'angle $\widehat{SRT}$ arrondie au degré : $\widehat{SRT} \approx 60°$.

18. $\widehat{IKJ} \approx 37°$

19. (a) $AB \approx 7,8$ cm
    (b) $BC \approx 10,1$ cm

20. (a) $\widehat{ACD} \approx 37°$
    (b) $AC = 7,5$ cm
    (c) Triangle rectangle isocèle
    (d) $BD \approx 6,4$ cm

21. $x \approx 17,3$ cm

22. $\alpha \approx 70°$

23. $AH = 60.46$cm et $\hat{A} = 38.31°$
24. $h = 130.9$m
25. $d = 8507$m
26. $L = 32.685$m
27. $x = 6.79$m
28. $h = 14.31m$
29. (a) $FC = 8$ cm
    (b) C'est un triangle rectangle.
    (c) $\widehat{FCE} \approx 51°$

# 8

# Le cercle trigonométrique

## A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | ***Degré d'acquisition*** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Représenter des angles sur le cercle trigonométrique et y lire les valeurs de leurs nombres trigonométriques | 1 | | | |
| 2 | Déterminer à l'aide du cercle trigonométrique les angles dont on connait un nombre trigonométrique | 2 | | | |
| 3 | Déterminer les nombres trigonométriques d'un angle dont on connait un nombre trigonométrique et son quadrant à l'aide des relations fondamentale de la trigonométrie | 3 | | | |
| 4 | Simplifier des expressions trigonométriques à l'aide des relations fondamentales de la trigonométrie | 4-5-6 | | | |
| 5 | Prouver des identités trigonométriques | 7 | | | |

## 8.1 Exercices

1. Sans utiliser la calculatrice, donner le ***signe*** des nombres trigonométriques suivants ; justifier à l'aide du cercle trigonométrique.

   (a) $\cos 250°$
   (b) $\tan(-128°)$
   (c) $\sin 254°$
   (d) $\cot 197°$
   (e) $\cos(-325°)$
   (f) $\cot 298°$

2. Dessiner un cercle trigonométrique de 5 cm de rayon. Dans ce cercle, placer les angles suivants et déterminer une valeur approchée des nombres trigonométriques de ces angles [1].

   (a) 120°
   (b) -210°
   (c) 305°
   (d) 240°
   (e) 315°
   (f) $-144°$

   Vérifier à l'aide de la calculatrice les résultats.

3. Construire un cercle trigonométrique de rayon 5 cm. Déterminer, à l'aide de ce cercle, l'amplitude les angles $\alpha$ tels que :

   (a) $\tan \alpha = 2$ ;
   (b) $\cos \alpha = 0.75$ ;
   (c) $\cot \alpha = -\frac{6}{5}$ ;
   (d) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ;
   (e) la cotangente est négative et dont le cosinus vaut 0,25 ;
   (f) le sinus est positif et dont la cotangente vaut 1,5 ;

4. Vrai ou faux ? Si la réponse est fausse, la corriger. Justifier les réponses à l'aide du cercle trigonométrique.
   (a) Si $90° < \alpha < 180°$ alors $\sin \alpha$ est positif ;
   (b) Si $90° < \alpha < 180°$ alors $\tan \alpha$ est négatif ;
   (c) Si $270° > \alpha > 180°$ alors $\cos \alpha$ est négatif ;
   (d) Si $270° < \alpha < 360°$ alors $\tan \alpha$ est positif ;
   (e) Si $\sin \alpha < 0$ et $\cos \alpha > 0$ alors $\alpha$ est dans le deuxième quadrant ;
   (f) Si $\sin \alpha < 0$ et $\tan \alpha > 0$ alors $\alpha$ est dans le deuxième quadrant ;
   (g) Si $\cos \alpha = 0,7$ alors $\alpha$ peut être un angle du quatrième quadrant ;
   (h) Si $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ alors $\alpha$ peut être un angle du quatrième quadrant ;
   (i) Si $\tan \alpha = -0,7$ alors $\alpha$ peut être un angle du troisième quadrant.

5. On a résolu des exercices relatifs à la relation fondamentale de la trigonométrie. Chercher les éventuelles erreurs.
   (a) $x$ est un angle du premier quadrant, $\cos x = \frac{2}{5}$ et $\sin x = \frac{3}{5}$ ;
   (b) $x$ est un angle du deuxième quadrant, $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ et $\sin x = \frac{1}{4}$ ;
   (c) $90° < x < 180°$, $\sin x = \frac{2}{3}$ et $\cot x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

1. Il est conseillé de faire un cercle par angle

6. Déterminer les nombres trigonométriques de $x$ sachant que :

   (a) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ et $x \in \left]0, 90°\right[$ ;

   (b) $\sin x = \dfrac{4}{13}$ et $x \in \left]90°, 180°\right[$ ;

   (c) $\tan x = 2$ et $x$ est dans le 3ème quadrant ;

   (d) $\cot x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $x$ est dans le 2ème quadrant ;

   (e) $\cos x = \dfrac{1}{8}$ et $x$ est dans le 4ème quadrant.

7. Simplifier les relations suivantes :

   (a) $(1 - \cos a)(1 + \cos a)$

   (b) $\dfrac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \dfrac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$

   (c) $\cos^2 x \left(1 + \tan^2 x\right)$

   (d) $\left(\dfrac{1}{\tan \varphi} + \dfrac{1}{\cot \varphi}\right) \sin \varphi \cos \varphi$

   (e) $(1 + \cot^2 a)(1 - \cos^2 a)$

   (f) $(\sin a + \cos a)^2 + (\sin a - \cos a)^2$

   (g) $\sin^6 a + 3 \sin^2 a \cos^2 a + \cos^6 a$

   (h) $3(\sin^4 a + \cos^4 a) - 2(\sin^6 a + \cos^6 a)$

8. Si $x = a \cos u - b \sin u$ et $y = a \sin u + b \cos u$, calculer $E = x^2 + y^2$

9. Si $x = a \cos u$, $y = a \sin u \cos v$ et $z = a \sin u \sin v$, montrer que $E = x^2 + y^2 + z^2$ est indépendante de $u$ et $v$

10. Etablir les identités trigonométriques suivantes

    (a) $\sin^4 a - \cos^4 a = \sin^2 a - \cos^2 a$

    (b) $\tan^2 a - \tan^2 b = \dfrac{1}{\cos^2 a} - \dfrac{1}{\cos^2 b}$

    (c) $\dfrac{\cos a}{1 - \tan a} + \dfrac{\sin a}{1 - \cot a} = \sin a + \cos a$

    (d) $\dfrac{\tan a}{\tan b} = \dfrac{\tan a + \cot b}{\tan b + \cot a}$

    (e) $\dfrac{\sin^2 a + \sin a \cos a + \cos^2 a}{cos^2 a} = 1 + \tan a + \tan^2 a$

    (f) $\dfrac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} + \dfrac{\sin^3 a - \cos^3 a}{\sin a - \cos a} = 2$

    (g) $\dfrac{\sin^2 a - \cos^2 b}{\sin^2 a \sin^2 b} = 1 - \cot^2 a \cot^2 b$

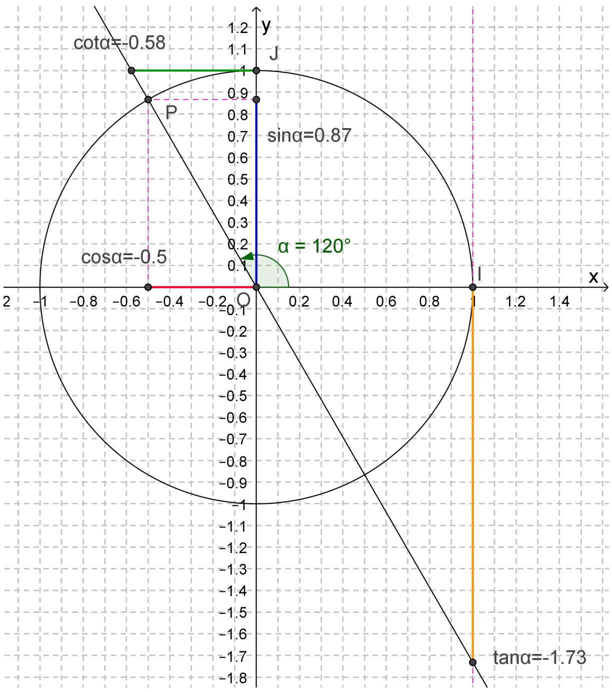
## 8.2 Solutions

1.

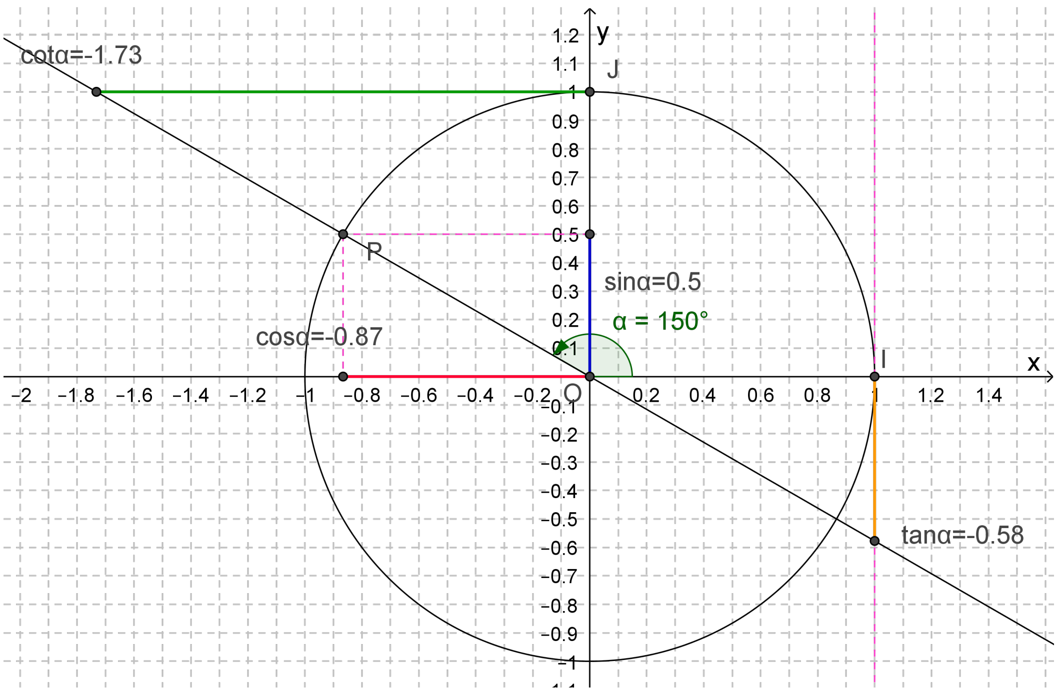
(a) négatif
(b) positif
(c) négatif
(d) positif
(e) positif
(f) négatif

2.

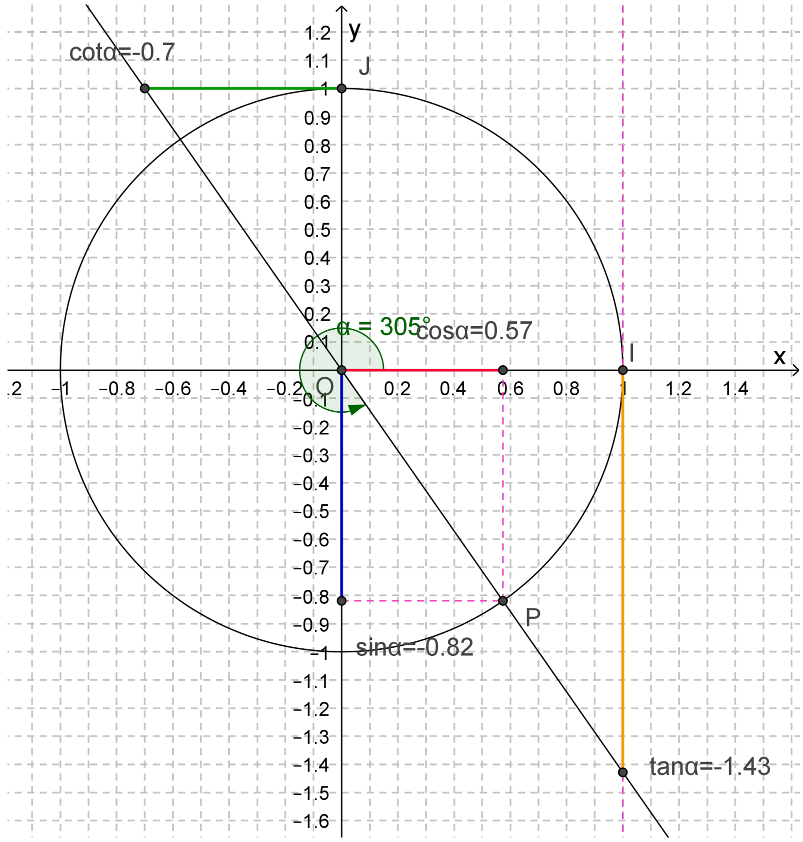
(a)



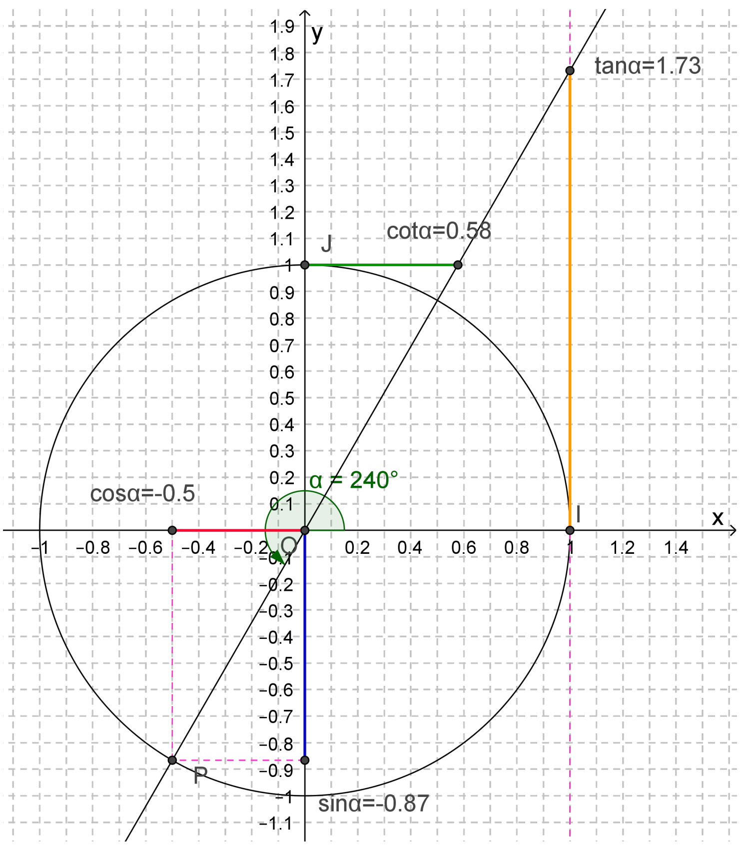

(b)



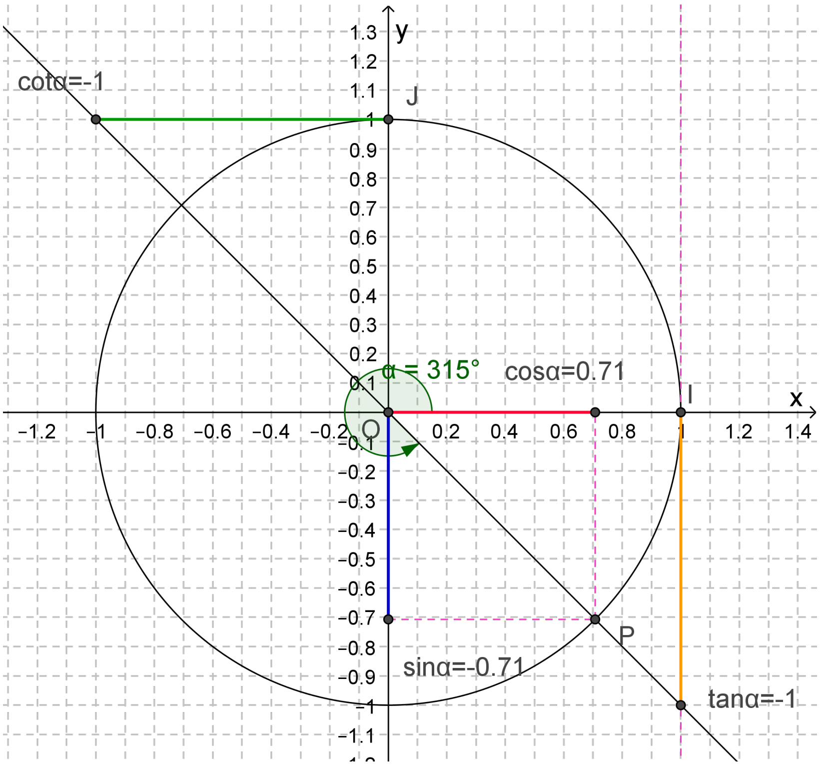
(c)


cotα=-0.7
J
α = 305°
cosα=0.57
I
x
y
O
P
sinα=-0.82
tanα=-1.43

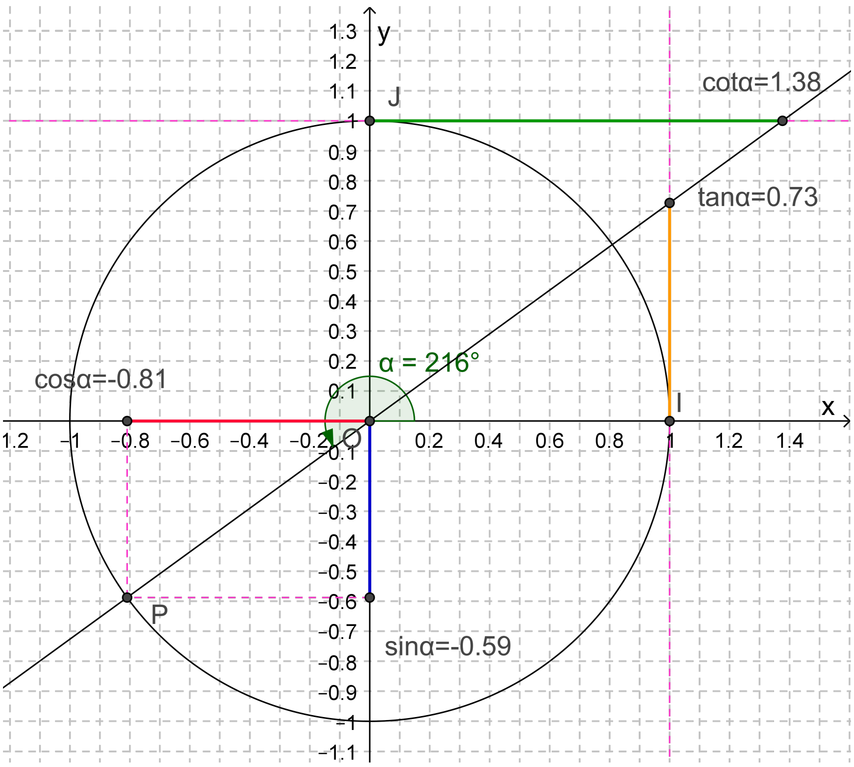
(d)


tanα=1.73
cotα=0.58
J
y
α = 240°
cosα=-0.5
I
x
O
P
sinα=-0.87

(e)

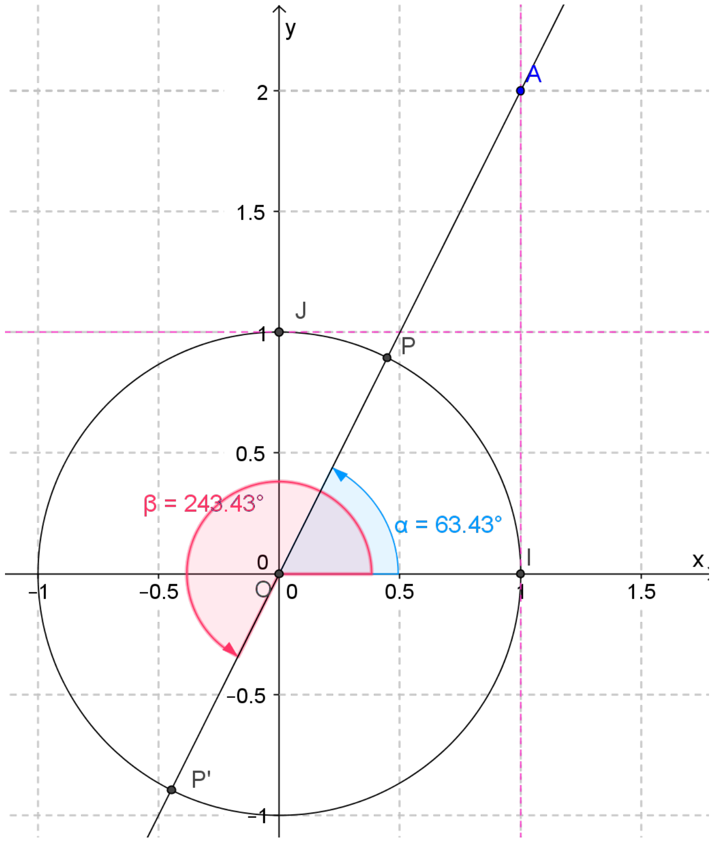

y
x
J
I
O
P
cotα=-1
α = 315°
cosα=0.71
sinα=-0.71
tanα=-1

(f)

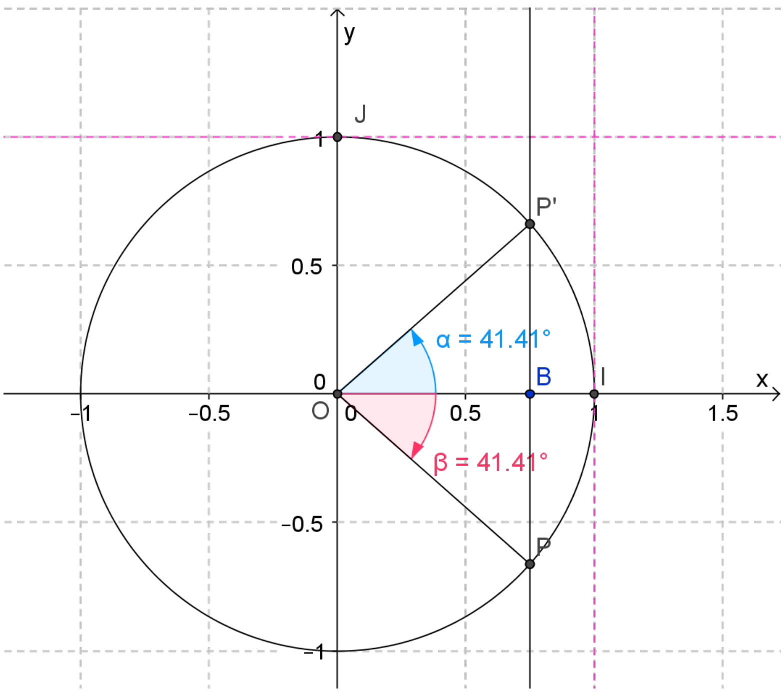

y
x
J
I
O
P
cotα=1.38
tanα=0.73
α = 216°
cosα=-0.81
sinα=-0.59

3.

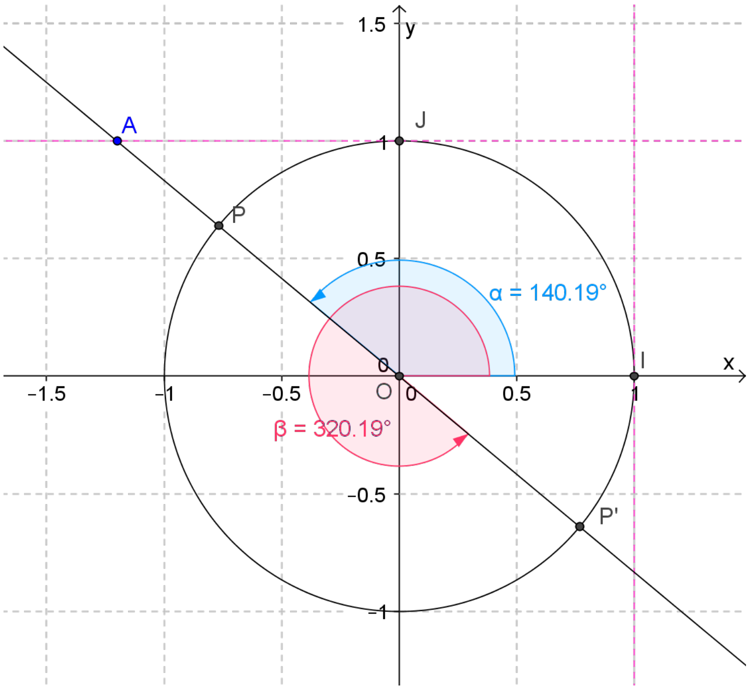
(a)


y
x
A
J
P
P'
I
O
β = 243.43°
α = 63.43°
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

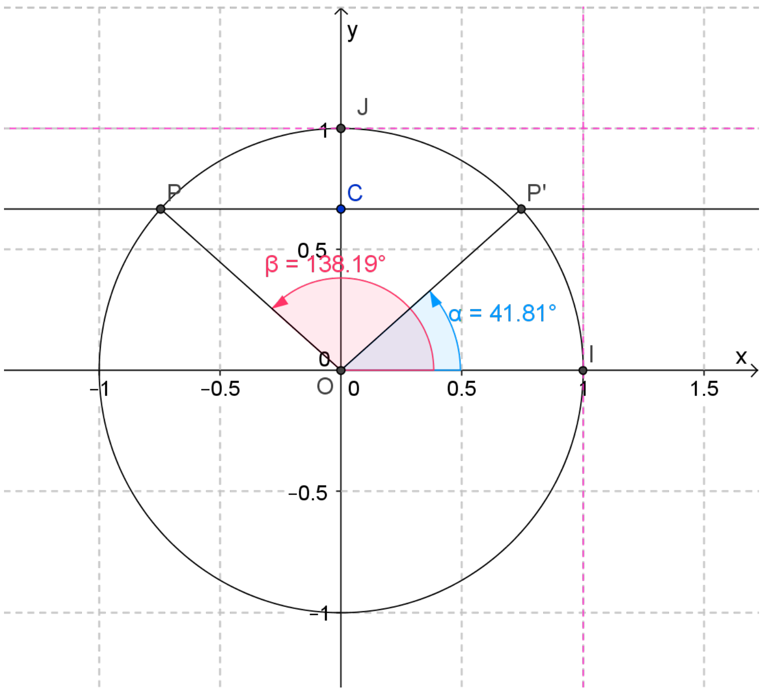
(b)


y
x
J
P'
P
B
I
O
α = 41.41°
β = 41.41°
1
0.5
0
−0.5
−1
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

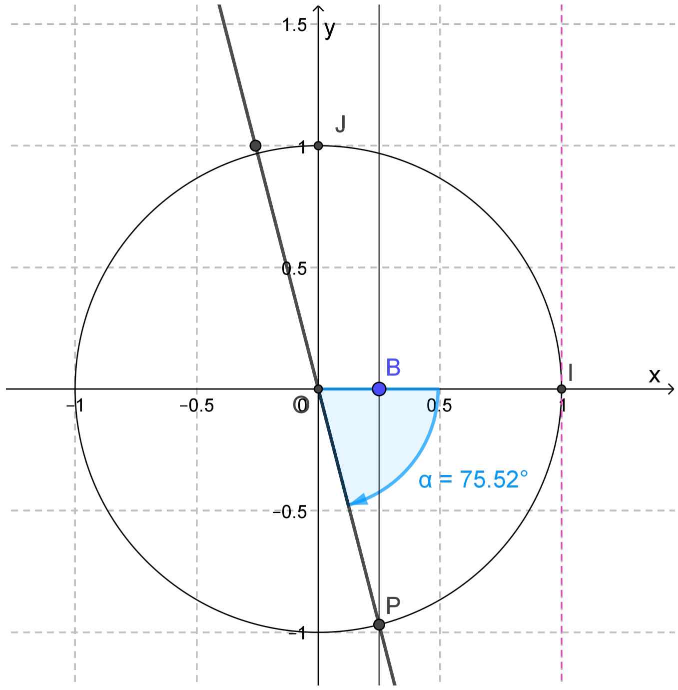
(c)


1.5
y
A
J
1
P
0.5
α = 140.19°
0
I
x
−1.5
−1
−0.5
O
0
0.5
1
β = 320.19°
−0.5
P'
−1

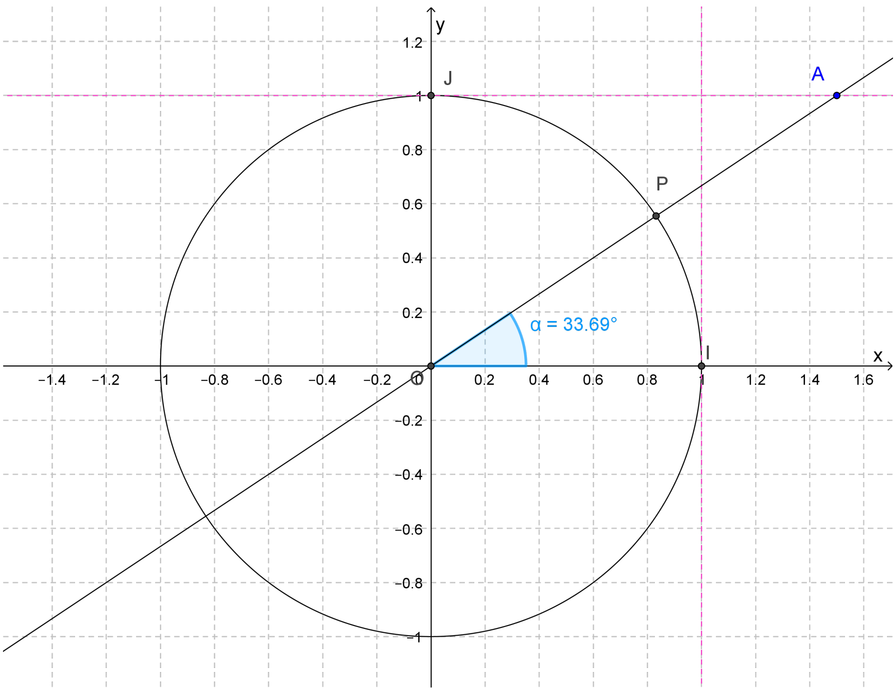
(d)


y
J
1
P
C
P'
0.5
β = 138.19°
α = 41.81°
0
I
x
−1
−0.5
O
0
0.5
1
1.5
−0.5
−1

(e)


1.5
y
J
1
0.5
B
I
x
−1
−0.5
O
0.5
1
α = 75.52°
−0.5
P
−1

(f)


y
1.2
J
A
1
0.8
P
0.6
0.4
0.2
α = 33.69°
I
x
−1.4
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
O
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1

4.
   (a) Vrai
   (b) Vrai
   (c) Vrai
   (d) Faux (dans le 4ème quadrant, la tangente est négative)
   (e) Faux ($\alpha$ est dans le quatrième quadrant)
   (f) Faux ($\alpha$ est dans le troisième quadrant)
   (g) Vrai
   (h) Faux (dans le 4ème quadrant, le sinus est négatif)
   (i) Faux (dans le 3ème quadrant, la tangente est positive)
5.
   (a) On n'a pas $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ mais les signes sont justes ;
   (b) On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ mais les signes ne sont pas justes ;
   (c) On n'a pas $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ mais les signes sont justes.
6.
   (a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan x = \sqrt{3}$, $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
   (b) $\cos x = -\frac{3\sqrt{17}}{13}$, $\tan x = -\frac{4\sqrt{17}}{51}$, $\cot x = -\frac{3\sqrt{17}}{4}$
   (c) $\cot x = \frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
   (d) $\tan x = -\sqrt{3}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   (e) $\sin x = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\tan x = -3\sqrt{7}$, $\cot x = -\frac{\sqrt{7}}{21}$
7. Simplifier les relations suivantes :
   (a) $\sin^2 \alpha$
   (b) $\frac{2}{\cos \alpha}$
   (c) 1
   (d) 1
   (e) 1
   (f) 2
   (g) 1
   (h) 1
8. $a^2 + b^2$
9. $a^2$
10. Voir cours oral

# 9

## Angles associés

### A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | *Degré d'acquisition* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Connaitre les valeurs des nombres trigonométriques des angles remarquables du premier quadrants | 1-2-3 | | | |
| 2 | Simplifier des expressions trigonométriques mettant en oeuvre des angles remarquables et associés | 2-3 | | | |
| 3 | Simplifier des expressions mettant en oeuvre des angles associés | 4 | | | |

## 9.1 Exercices

1. Vérifier les égalités suivantes :

   (a) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \sin 30^\circ$

   (b) $2\cos^2 30^\circ - 1 = 1 - 2\sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$

   (c) $\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ + \tan^2 45^\circ = 4\cos 60^\circ$

   (d) $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 0$

   (e) $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{3} = 1$

   (f) $\tan^2 \frac{\pi}{3} + 4\cos^2 \frac{\pi}{4} - \dfrac{3}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} = 1$

2. Calculer les nombres trigonométriques suivants [1].

   (a) $\cos 120^\circ$

   (b) $\sin 330^\circ$

   (c) $\sin 480^\circ$

   (d) $\cos 1050^\circ$

   (e) $\tan \dfrac{15\pi}{4}$

   (f) $\cot \dfrac{16\pi}{3}$

   (g) $\cos \left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)$

   (h) $\tan 870^\circ$

   (i) $\cos \dfrac{7\pi}{3}$

   (j) $\sin \left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$

3. Calculer

   (a) $\sin 2x + \tan x$ si $x = \dfrac{7\pi}{6}$

   (b) $\cos^2 x + \sin x$ si $x = \dfrac{5\pi}{3}$

   (c) $\cos x + \sin^2 x$ si $x = \dfrac{7\pi}{4}$

   (d) $\cot x + \sin 2x$ si $x = -\dfrac{7\pi}{3}$

4. Simplifier les expressions suivantes

   (a) $\sin(a - 90^\circ)$

   (b) $\tan(a - 90^\circ)$

   (c) $\sin(270^\circ - a)$

   (d) $\tan(270^\circ + a)$

   (e) $\sin(a - 540^\circ)$

   (f) $\cos(7\pi - a)$

   (g) $\cot(a + 3\pi)$

   (h) $\cos(a + 5\pi) + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) + \cos(\pi - a)$

   (i) $\tan(x + 3\pi) + \cot x + \tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

   (j) $3\tan\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) + 2\tan\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right) - 3\cot(x + \pi)$

1. S'aider du cercle trigonométrique et essayer d'exprimer l'angle donné en fonction d'un angle remarquable

(k) $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(\pi+x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos(\pi-x)}+\frac{\sin(9\pi-x)\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cot(x+5\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

(l) $$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cot(x-2\pi)}{\tan(3\pi+x)\cot(-x)\cos(\pi+x)}$$

## 9.2 Solutions

1. Il suffit d'établir les égalités à l'aide du tableau des valeurs remarquables.

2. (a) $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$
   (b) $\sin 330^\circ = -\dfrac{1}{2}$
   (c) $\sin 480^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   (d) $\cos 1050^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   (e) $\tan 675^\circ = -1$
   (f) $\cot 960^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
   (g) $\cos(-330^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   (h) $\tan 870^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
   (i) $\cos 420^\circ = \dfrac{1}{2}$
   (j) $\sin(-135^\circ) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. (a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$
   (b) $\dfrac{1-2\sqrt{3}}{4}$
   (c) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$
   (d) $-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

4. (a) $-\cos a$
   (b) $-\cot a$
   (c) $-\cos a$
   (d) $-\cot a$
   (e) $-\sin a$
   (f) $-\cos a$
   (g) $\cot a$
   (h) $0$
   (i) $\tan x$
   (j) $-8\cot x$
   (k) $0$
   (l) $-\cos x$

# 10

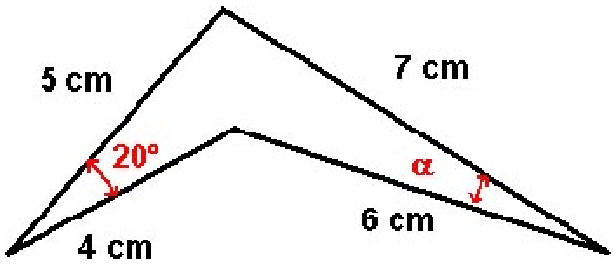
# Trigonométrie dans le triangle quelconque

## A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | Degré d'acquisition | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Utiliser la relation des sinus et le théorème d'Al-Kashi pour résoudre des triangles quelconques | 1 | | | |
| 2 | Utiliser la relation des sinus et le théorème d'Al-Kashi pour résoudre des problèmes mettant en œuvre des triangles quelconques | 2 | | | |

## 10.1 Exercices

1. Déterminer les caractéristiques des triangles quelconques $ABC$ dont les caractéristiques connues sont les suivantes :
   (a) $a = 6$, $\hat{B} = 35°$ et $\hat{C} = 105°$
   (b) $b = 5$, $c = 7$ et $\hat{A} = 36°$
   (c) $a = 6$, $b = 5$ et $\hat{A} = 50°$
   (d) $c = 7$, $b = 5$ et $\hat{B} = 20°$
   (e) $a = 9$, $b = 7$ et $c = 5$
2. Calculer la valeur de l'angle $\alpha$ et l'aire de la figure suivante.




3. Un géomètre souhaite mesurer la distance entre deux points inaccessibles $C$ et $D$. Ces deux points sont situés dans le même plan horizontal. Pour ce faire, il se place en deux points $A$ et $B$ respectivement distants de 143m. Il mesure les angles suivants : $C\hat{A}B = 60°$, $D\hat{A}B = 45°$, $C\hat{B}A = 40°$ et $D\hat{B}A = 70°$.
   Déterminer la distance de $C$ à $D$

# Cinquième partie

# 4UAA4 - Fonctions de référence

# 11

## Les fonctions

### A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | *Degré d'acquisition* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Reconnaitre des fonctions sur base de leur graphe | 1 | | | |
| 2 | Déterminer graphiquement des domaine, image et antécédent(s) de nombres | 2 à 8 | | | |
| 3 | Déterminer algébriquement des domaine, image et antécédent(s) de nombres | 9 à 14 | | | |
| 4 | Etablir des tableaux de variations de fonctions sur base de leur graphe | 15 à 18 | | | |
| 5 | Déterminer algébriquement les caractéristiques de fonctions | 19 | | | |
| 6 | Résoudre graphiquement et algébriquement des équations et inéquations | 20-23-27 | | | |
| 7 | Etudier algébriquemenbt et graphiquement la parité d'une fonction | 21-22 | | | |
| 8 | Déterminer algébriquement et vérifier graphiquement les caractéristiques de fonctions | 24 | | | |
| 9 | Construire le graphe de fonctions par manipulations graphiques de fonctions de référence | 25-26 | | | |

# 11.1 Exercices

## 11.1.1 Manipulations graphiques de fonctions

1. Pour chacune des fonctions suivantes, on demande :
   - la fonction de référence à partir de laquelle elle va être construite ;
   - l'(les) opération(s) algébrique(s) qui intervient(interviennent) dans la nouvelle fonction ;
   - si cette(ces) opération(s) agit(agissent) sur la variable ($x$) ou sur la fonction ($f(x)$).

   On ne demande pas de dessiner les fonctions.

   (a) $f(x) = x^2 - 4$

   (b) $f(x) = \dfrac{3}{x}$

   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{5x}$

   (e) $f(x) = 2(x-3)^2$

   (f) $f(x) = 4x^2 + 1$

   (g) $f(x) = -2x^2 + 5$

   (h) $f(x) = 3 - \sqrt{2x}$

   (i) $f(x) = (2-3x)^3 - 2$

   (j) $f(x) = 1 - 2\sqrt{2x-1}$

2. En partant de fonction de base que l'on précisera, représenter les graphes fonctions suivantes. Préciser l'ensemble des étapes ainsi que les transformations du plan utilisées.

   (a) $f(x) = x^2 + 3$

   (b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

   (c) $f(x) = 2x^3$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

   (e) $f(x) = 3 - 2x^2$

   (f) $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$

   (g) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)^2 - 1$

   (h) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left||x| - 1\right| + 3$

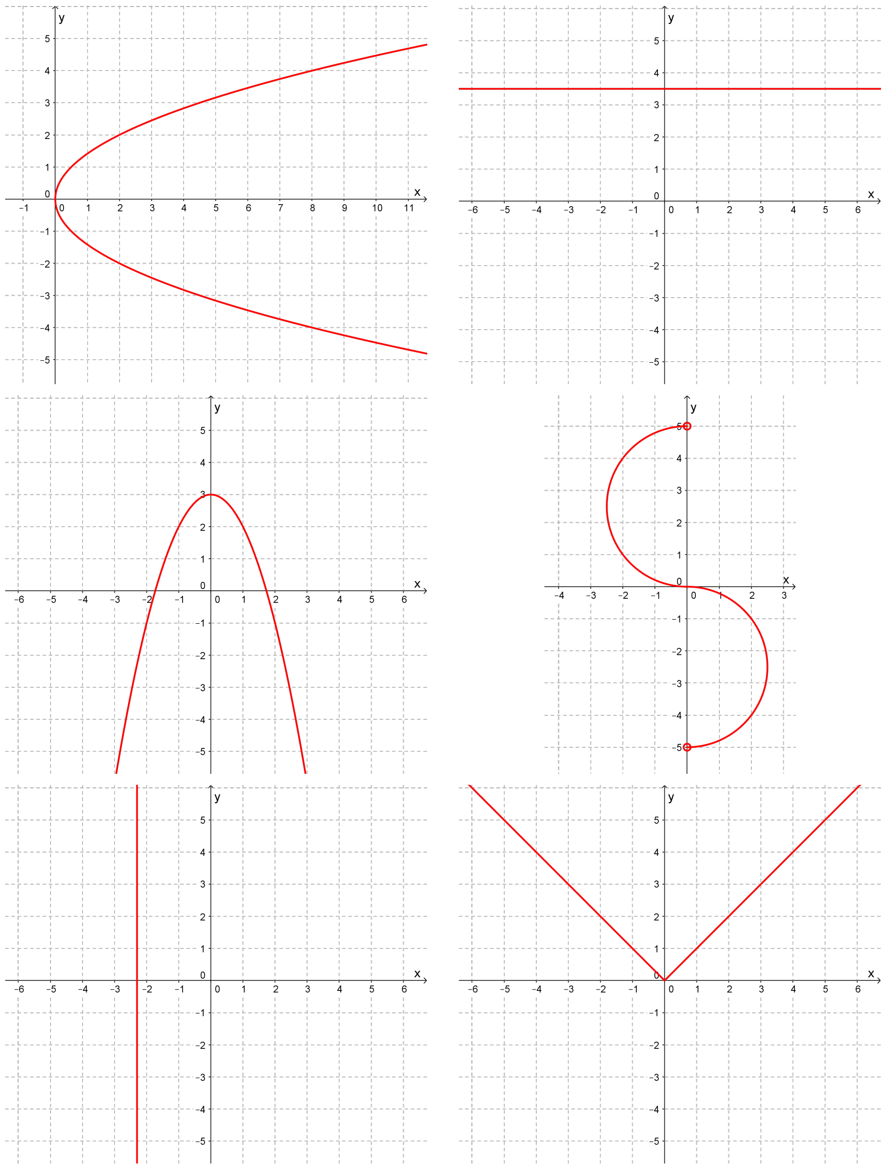
   (i) $f(x) = \left|\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x-1} - 2\right|$

   (j) $f(x) = 2\left|3 - \sqrt{1-2x}\right|$

   (k) $f(x) = 3 - 2(1-2x)^2$

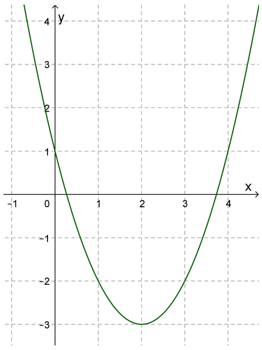
### 11.1.2 Fonctions : aspects graphiques (rappels)

1. Parmi les courbes suivantes, déterminer celles qui représentent une fonction.

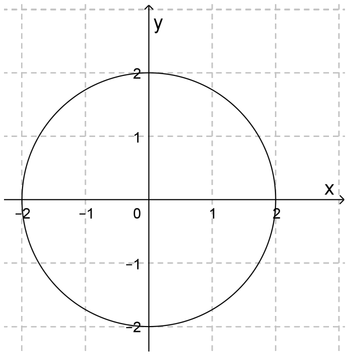


2. Tous les graphiques suivants représentent des relations. Parmi ceux-ci, quels sont ceux qui représentent une fonction ?

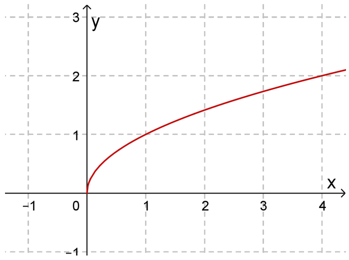
(a)



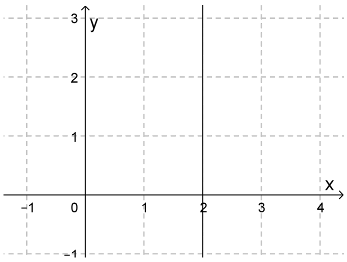
(b)



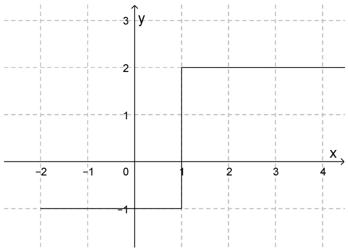
(c)



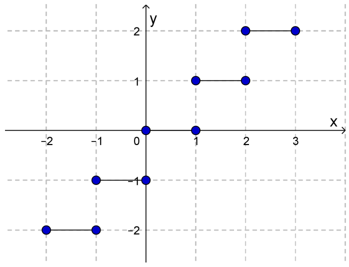
(d)



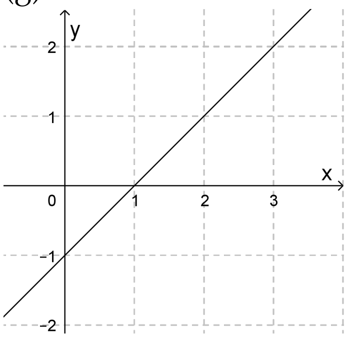
(e)



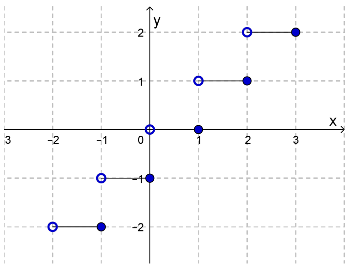
(f)



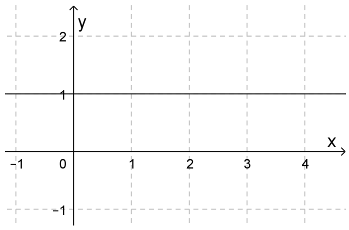
(g)



(h)

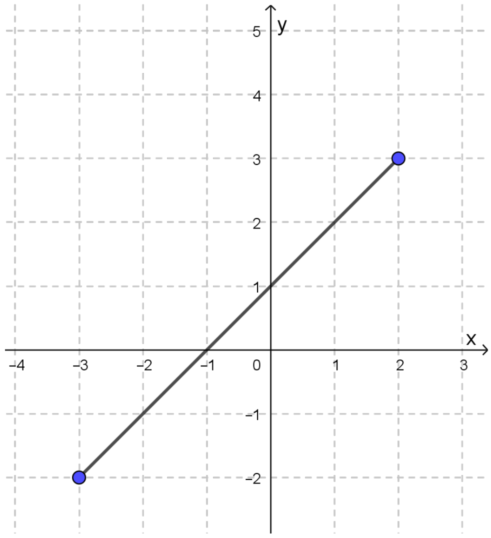


(i)



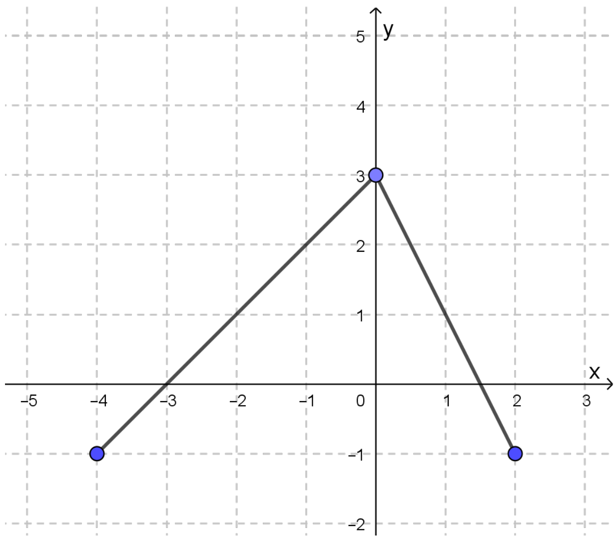
3. Pour chacune des fonctions représentées ci-dessous, déterminer le domaine, l'ensemble image, le(s) zéro(s), l'ordonnée à l'origine et compléter les égalités.

(a)



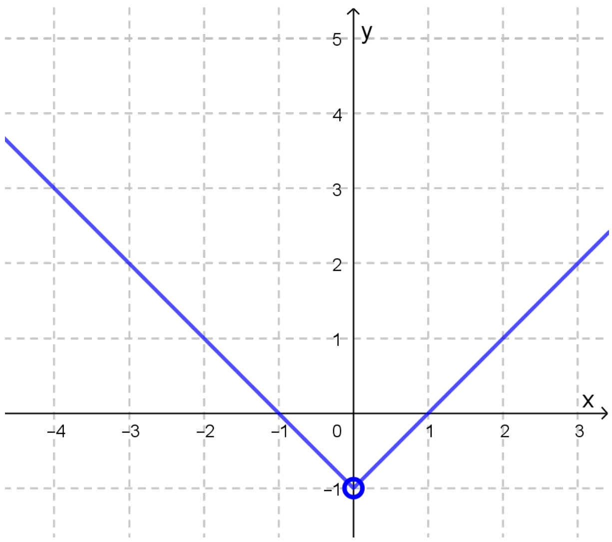

- $dom_f$ :
- $im_f$ :
- Zéro(s) :
- Ord. à l'origine :
- $f(1)$=
- $f(-2)$=
- $f(.....)$= 2
- $f(.....)$= -1

(b)



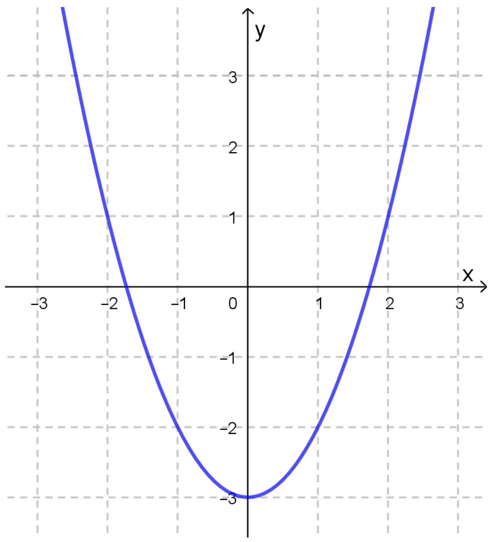

- $dom_f$ :
- $im_f$ :
- Zéro(s) :
- Ord. à l'origine :
- $f(-1)$=
- $f(2)$=
- $f(.....)$= 1
- $f(.....)$= 2

(c)




- $dom_f$ :
- $im_f$ :
- Zéro(s) :
- Ord. à l'origine :
- $f(2)$=
- $f(-2)$=
- $f(.....)$= 2
- $f(.....)$= 0

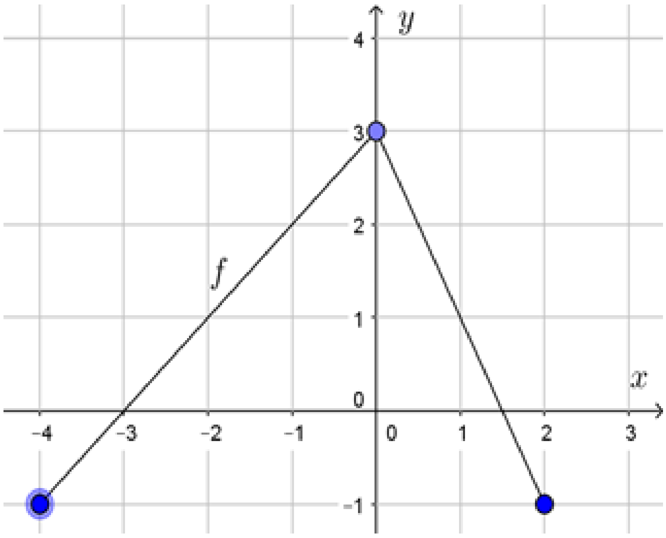
(d)



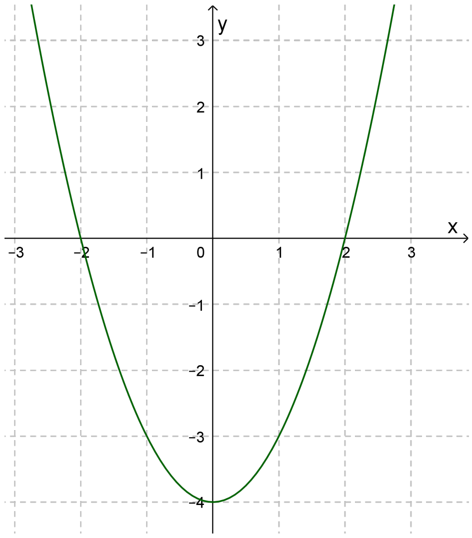

- $dom_f$ :
- $im_f$ :
- Zéro(s) :
- Ord. à l'origine :
- $f(2)$=
- $f(-2)$=
- $f(.....)$= -2
- $f(.....)$= 2

4. Etudier le signe des fonctions suivantes :

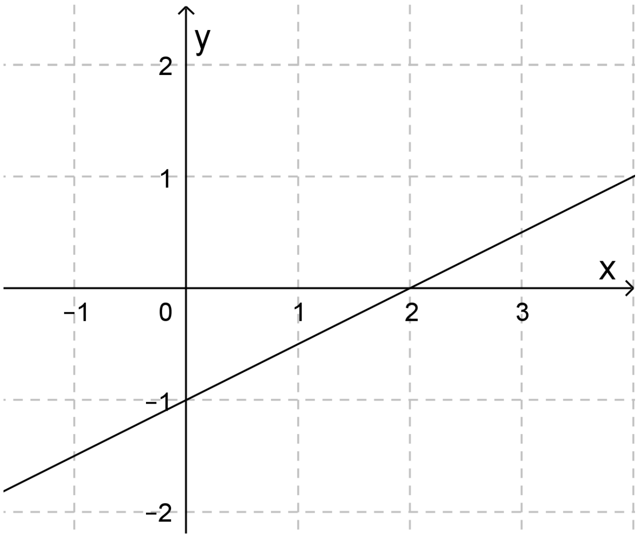
(a)



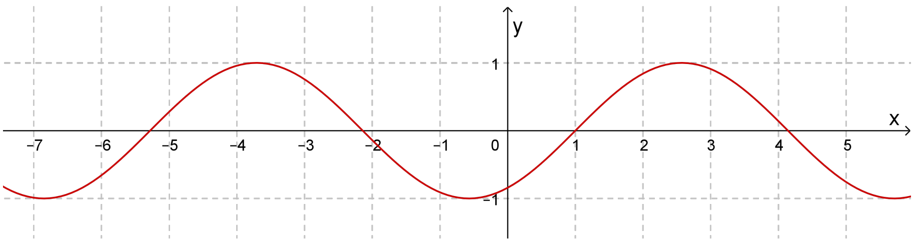

(b)




(c)

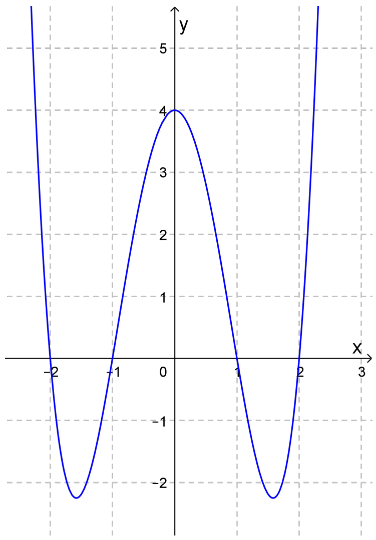



(d)

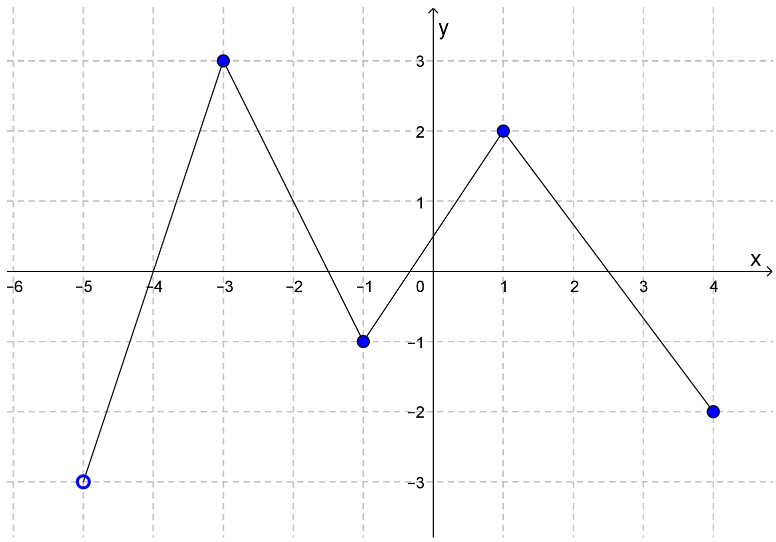


5. Etudier la variation et les extrémums des fonctions suivantes.

(a)




(b)




6. Représenter une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

(a)

| $x$ | $-\infty$ | | -2 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | -4 | $\nearrow$ | -1 | $\searrow$ | |
| | | | m | | M | | |

(b)

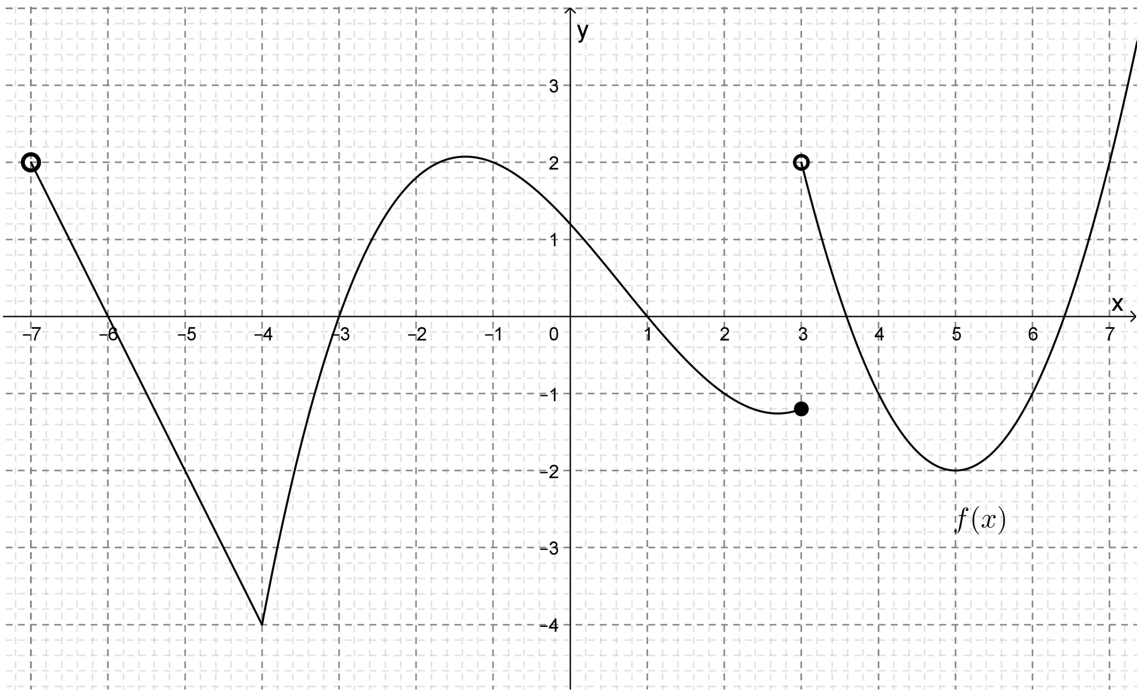
| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | 3 | $\searrow$ | -4 | $\nearrow$ | $-\dfrac{5}{3}$ | $\searrow$ | |
| | | | M | | m | | M | | |

(c)

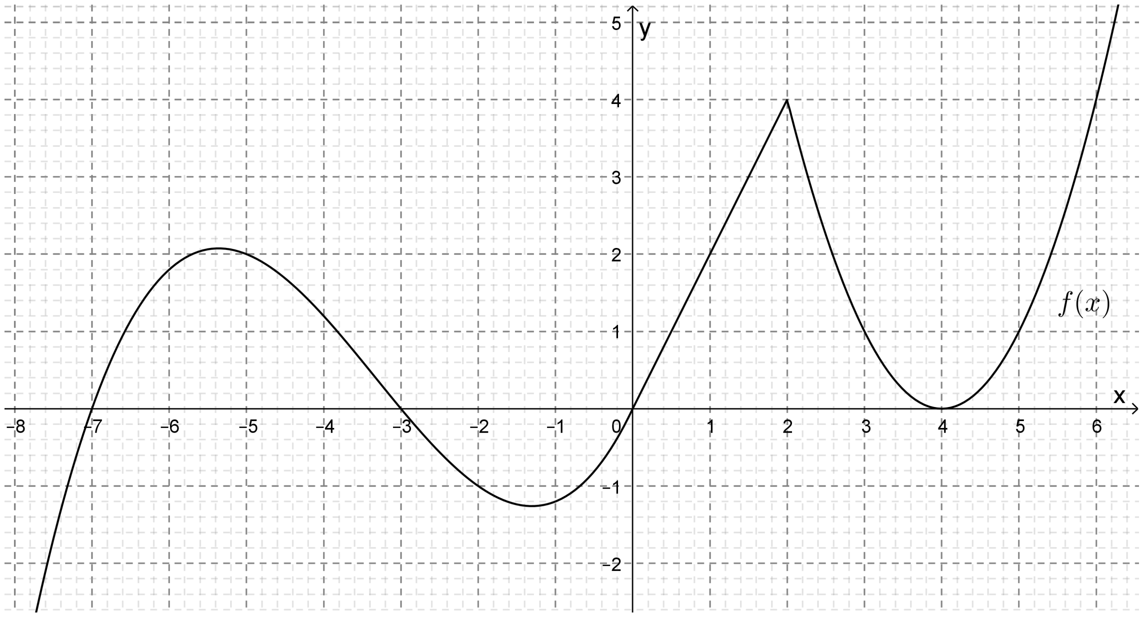
| $x$ | $-\infty$ | -2 | | 0 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | -2 | $\nearrow$ | 3 | $\searrow$ | - 2 | $\nearrow$ | |
| | | | | M | | m | | |

7. On donne le graphe des fonctions suivantes ci-dessous. Pour chaque fonctions, déterminer :
   - le domaine de définition,
   - l'ensemble image,
   - l'image de $-5$ et 2 par la fonction (pour le dernier graphe, on rajoutera l'image de $-1$) ;
   - le (les) antécédent(s) de 1 par la fonction,
   - le(s) zéro(s) de la fonction,
   - l'ordonnée à l'origine de la fonction,
   - le signe de la fonction,
   - le tableau de variation de la fonction.

   (a)

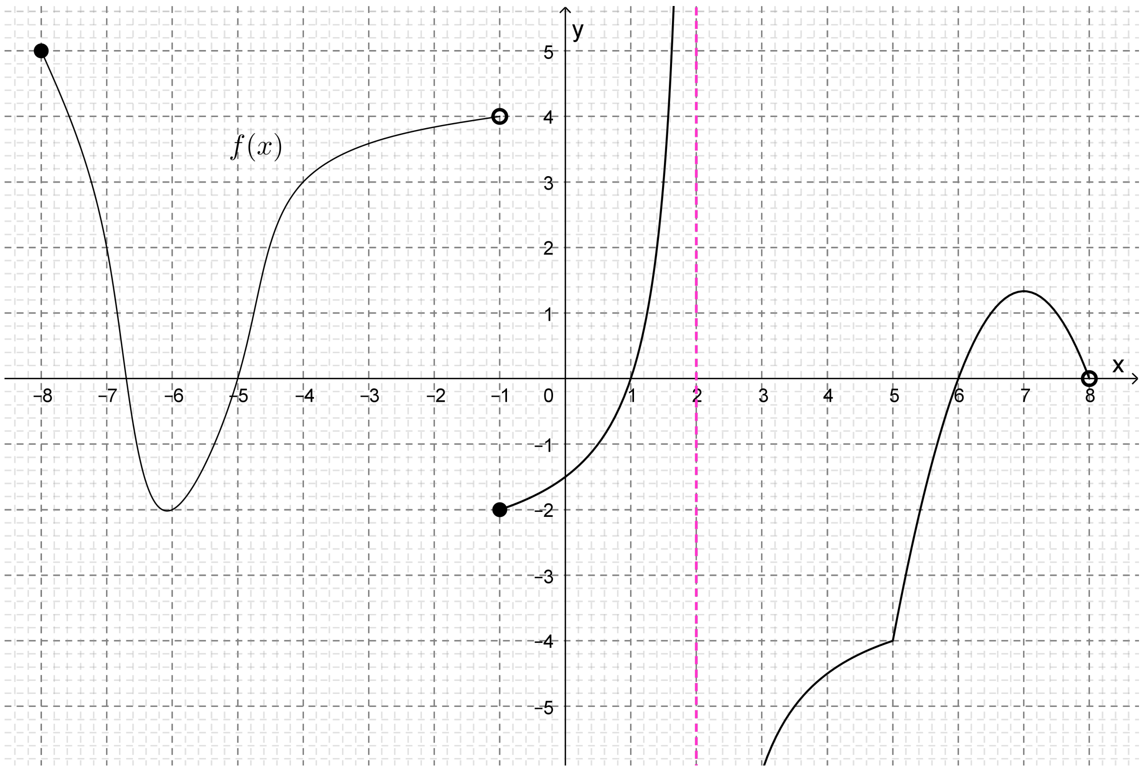


(b)



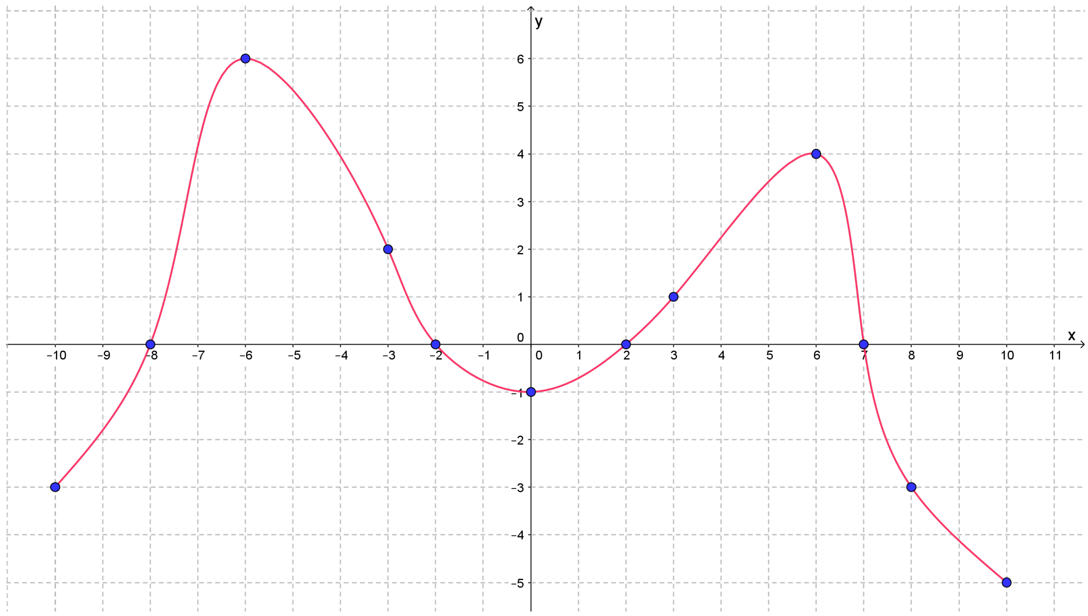
y
x
f(x)
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
5
4
3
2
1
-1
-2


(c)

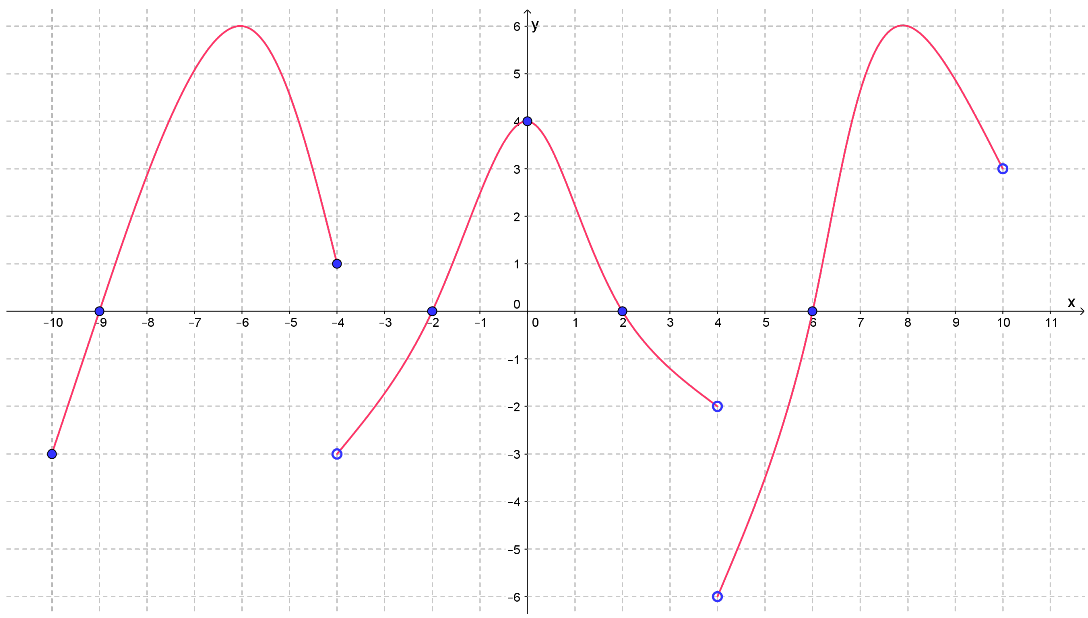


y
x
f(x)
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5

8. On donne les courbes suivantes, représentations graphiques de fonctions.
Courbe 1




Courbe 2




Pour chacune des deux courbes, répondre par vrai ou faux :
- la fonction est paire ;
- la fonction est croissante sur $[0,6]$
- la fonction est positive sur $[0,2]$
- l'équation $f(x) = 0$ possède quatre solutions
- la fonction présente un maximum en -6
- $f(3) > f(-1)$

Pour chacune des deux courbes, déterminer
- $dom_f$
- $im_f$
- $f(3)$
- les racines de $f$
- les solutions de l'équation $2f(x) + 6 = 0$

### 11.1.3 Fonctions : aspects algébriques

1. Soit la fonction $f(x) = x - 3$.
   (a) Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{2}{5}\right)$ ;
   (b) Calculer les images de 1,2 et 5 par la fonction $f$ ;
   (c) Calculer l'(les) antécédent(s) de 1, 2 et 5 par $f$.
2. Soit la fonction $f(x) = 2x^2 - 3$.
   (a) Calculer $f(0)$, $f(-2)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$ et $f\left(\sqrt{2}+1\right)$ ;
   (b) Calculer les images de 0,1 et -1 par la fonction $f$ ;
   (c) Calculer l'(les) antécédent(s) de 5 par $f$.
3. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$.
   (a) Calculer $f(1)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{2}{3}\right)$ et $f\left(\sqrt{2}\right)$ ;
   (b) Calculer l'image de 2 par la fonction $f$ ;
   (c) 1 a-t-il un antécédent par $f$ ?
4. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.
   (a) Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(-3)$ et $f\left(-\sqrt{3}\right)$
   (b) Calculer l'image de -1 par la fonction $f$
   (c) Calculer l'(les) antécédent(s) de $-\frac{1}{2}$ par $f$
5. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+9}$.
   (a) Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$ et $f\left(-\sqrt{3}\right)$
   (b) Calculer l'image de 4 par la fonction $f$
   (c) Calculer l'(les) antécédent(s) de 5 par $f$
6. Soit la fonction $f(x) = -\sqrt{x^2-3}$ définie pour $x \leq -\sqrt{3}$ ou $x \geq \sqrt{3}$.
   (a) Calculer les images de 2, 3 et $\sqrt{3}$ par la fonction $f$
   (b) 1 a-t-il une image par la fonction ?
   (c) Déterminer deux nombres qui ont la même image.
   (d) Un nombre réel strictement positif a-t-il un antécédent par f ?

7. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer algébriquement
   - le domaine de définition[1]
   - le(s) zéro(s)
   - l'intersection avec l'axe $Oy$
   - la parité

   (a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

   (b) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

   (c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+4x-5}$

   (d) $f(x) = \sqrt{2x-5}$

   (e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2+4x+3}}$

   (f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x^2-9x+4}}$

8. Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou ni l'une ni l'autre.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-3}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+5}$

   (c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x+5}$

   (d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^5-x}}$

---

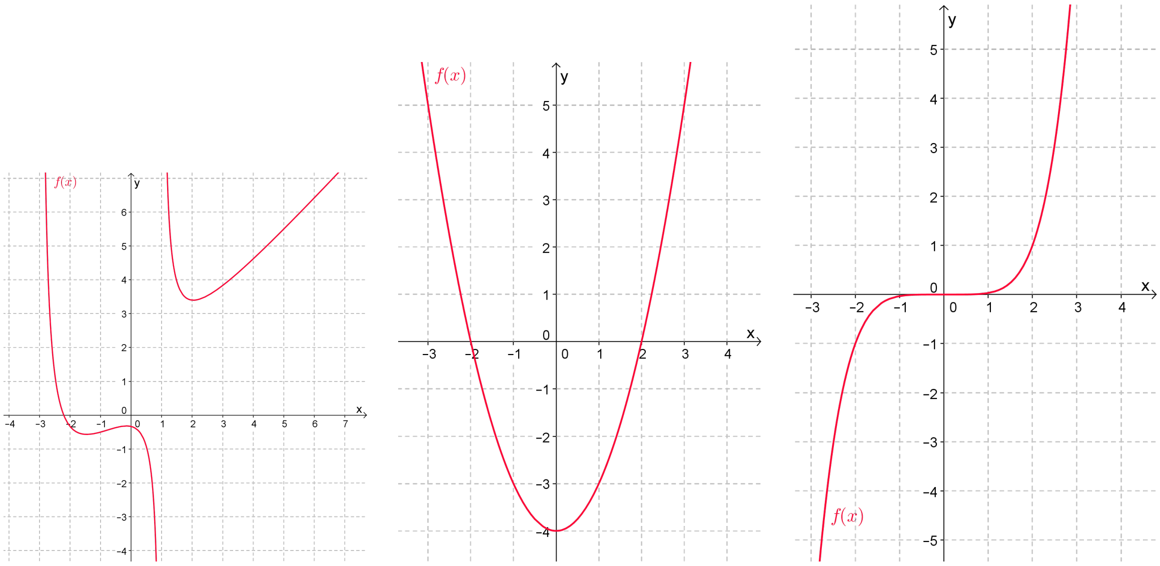
1. Voici tous les cas de figures susceptibles d'être rencontrés en 4$^{\text{ème}}$ :
- $f(x) = P(x)$ : CE :/ et $\text{dom}_f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ : CE : $Q(x) \neq 0$ (équation) et $\text{dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{...\}$
- $f(x) = \sqrt{R(x)}$ : CE : $R(x) \geq 0$ (inéquation : tableau de signe)
- $f(x) = \sqrt{\dfrac{R(x)}{S(x)}}$ : CE : $\dfrac{R(x)}{S(x)} \geq 0$ (inéquation : tableau de signe)
- $f(x) = \dfrac{\sqrt{R(x)}}{Q(x)}$ :
  - CE$_1$ : $R(x) \geq 0$ (inéquation : tableau de signe)
  - CE$_2$ : $Q(x) \neq 0$ (équation)

  Pour trouver le domaine on résume les informations obtenues sur la droite des réels.
- $f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{S(x)}}$ : CE : $S(x) > 0$ (inéquation : tableau de signe)
- $f(x) = \dfrac{\sqrt{R(x)}}{\sqrt{S(x)}}$ :
  - CE$_1$ : $R(x) \geq 0$ (inéquation : tableau de signe)
  - CE$_2$ : $S(x) > 0$ (inéquation : tableau de signe)

  Pour trouver le domaine on résume les informations obtenues sur la droite des réels.

Dans les expressions ci-dessus, $P(x), Q(x), R(x)$ et $S(x)$ représentent des polynômes.

9. Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou ni l'une ni l'autre.




10. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer ***algébriquement et graphiquement*** :

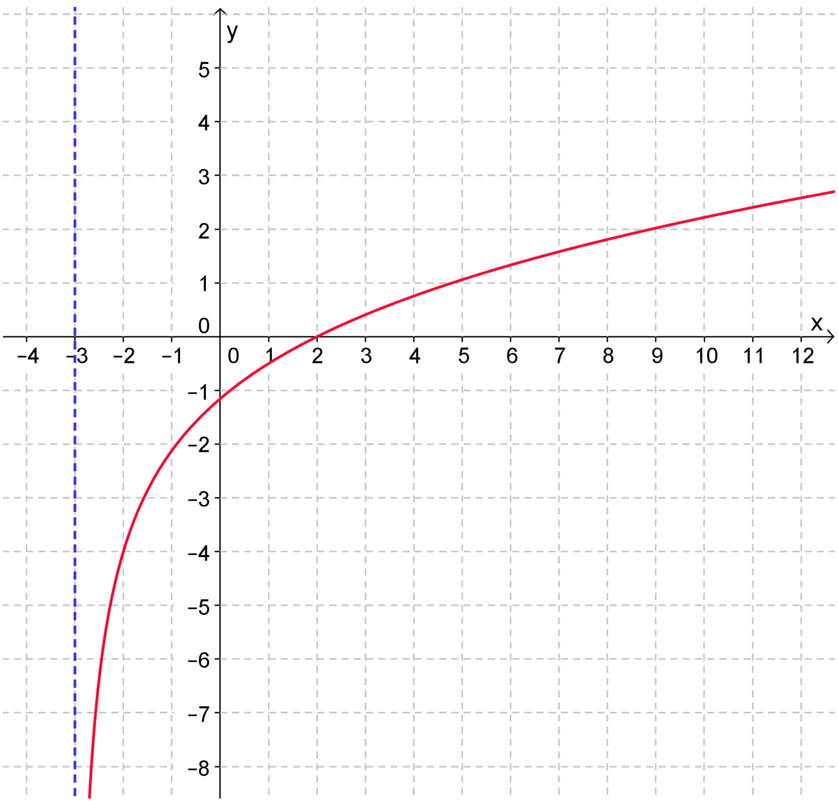
    (a) le domaine de définition ;

    (b) le(s) zéro(s) ;

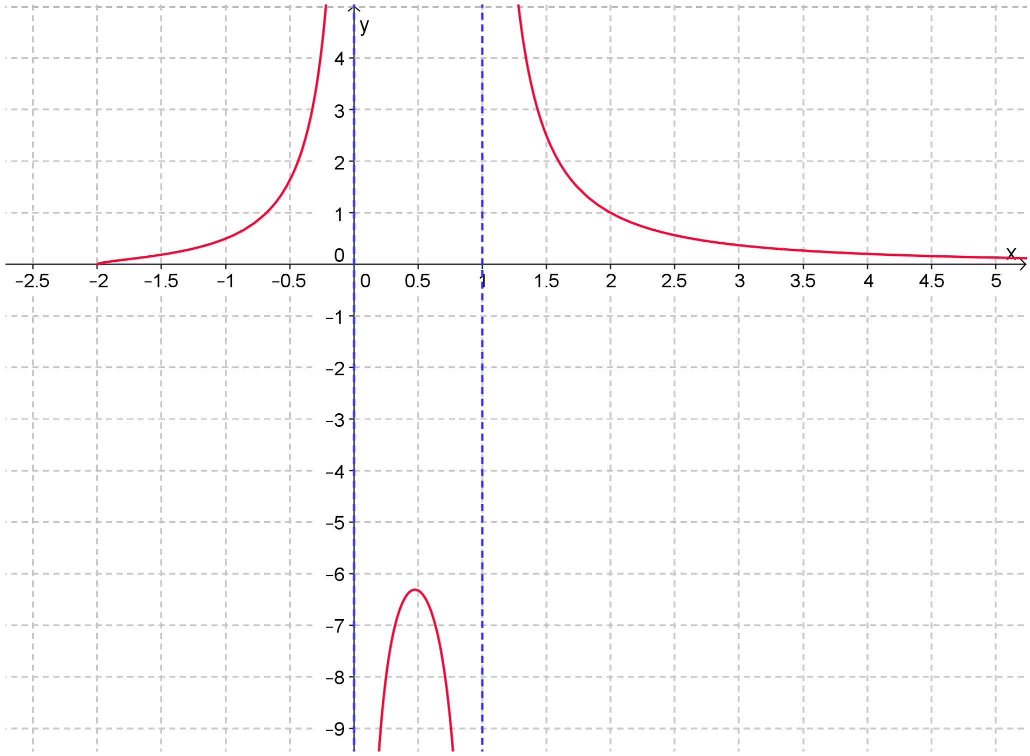
    (c) la parité ;

    (d) le signe ;

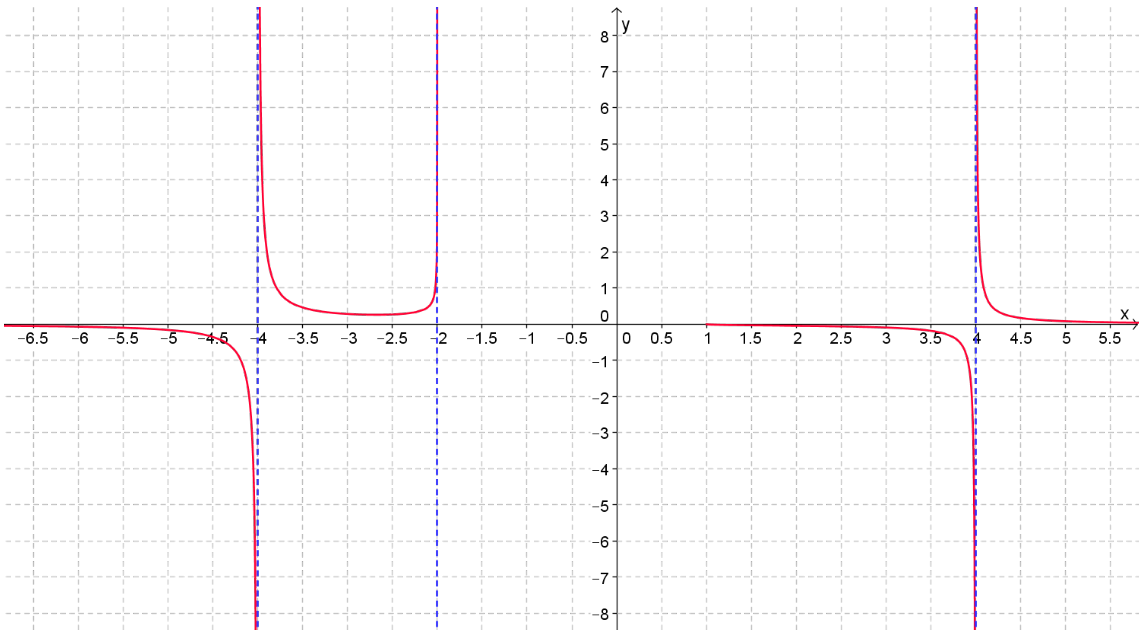
    (a) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}}$



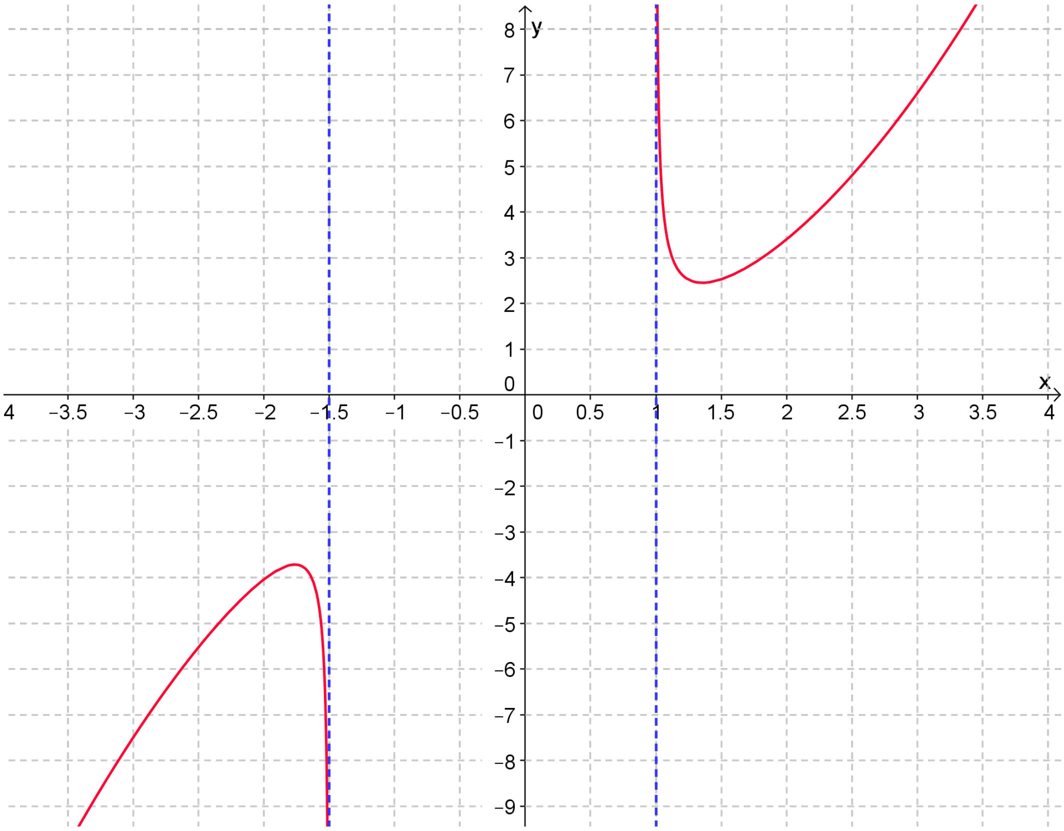
(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2 - x}$




(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x^3 + 2x^2 - 16x - 32}$



(d) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$

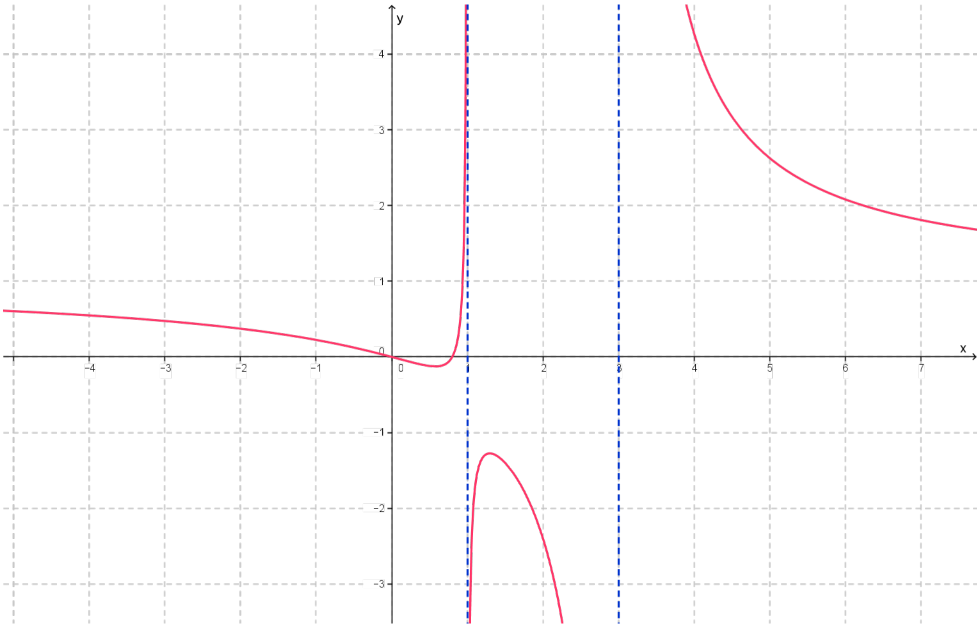



11. Tracer le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{2} - 4$

(a) Représenter sur le graphe le(s) valeur(s) de $x$ pour laquelle (lesquelles) $f(x)$ est égale à -4 et expliquer algébriquement le résultat

(b) Représenter sur le graphe les valeurs de $x$ pour lesquelles $f(x)$ est comprise entre -2 et 1 et expliquer algébriquement le résultat

12. On donne le graphique de la fonction $f(x)$.



On demande de résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

(a) $f(x) = 0$

(b) $f(x) = 2$

(c) $f(x) < 2$

(d) $f(x) \geq -2$

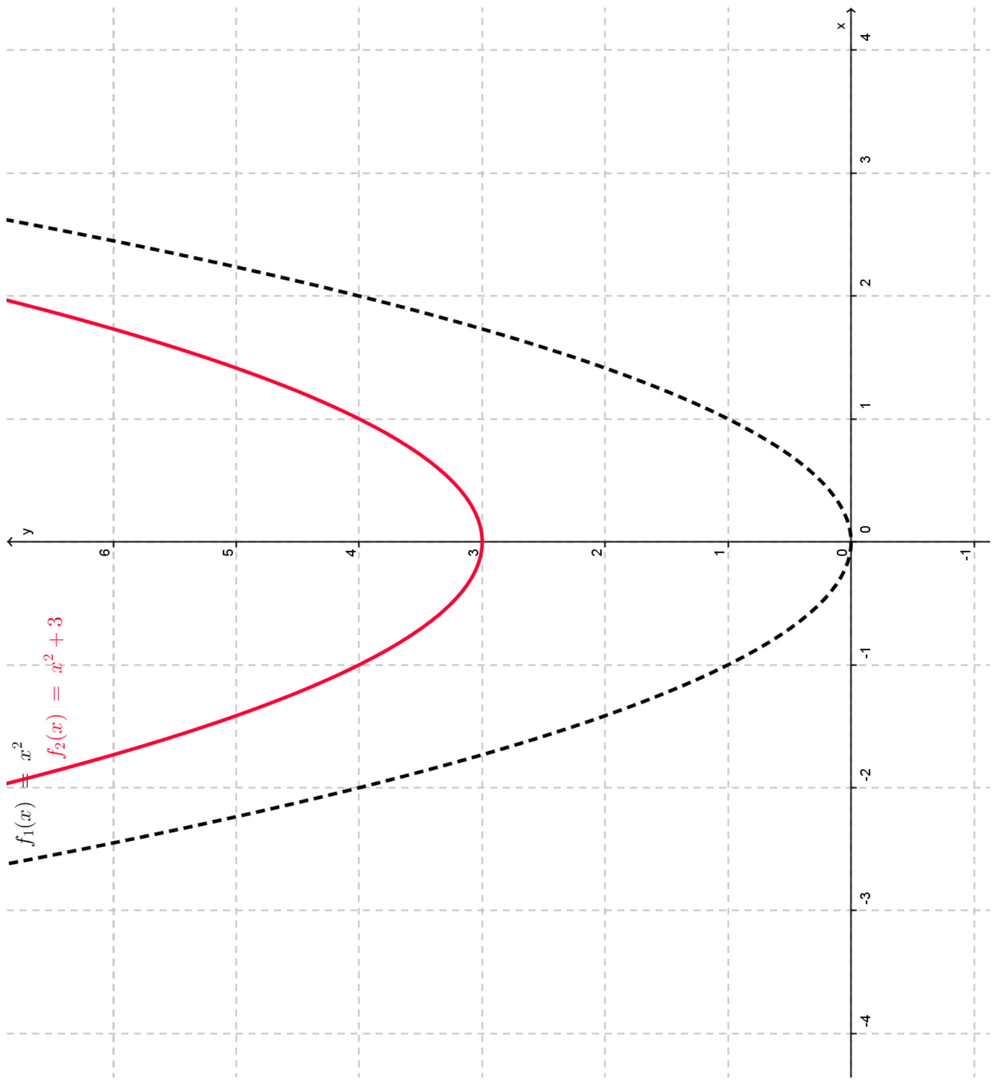
## 11.2 Solutions

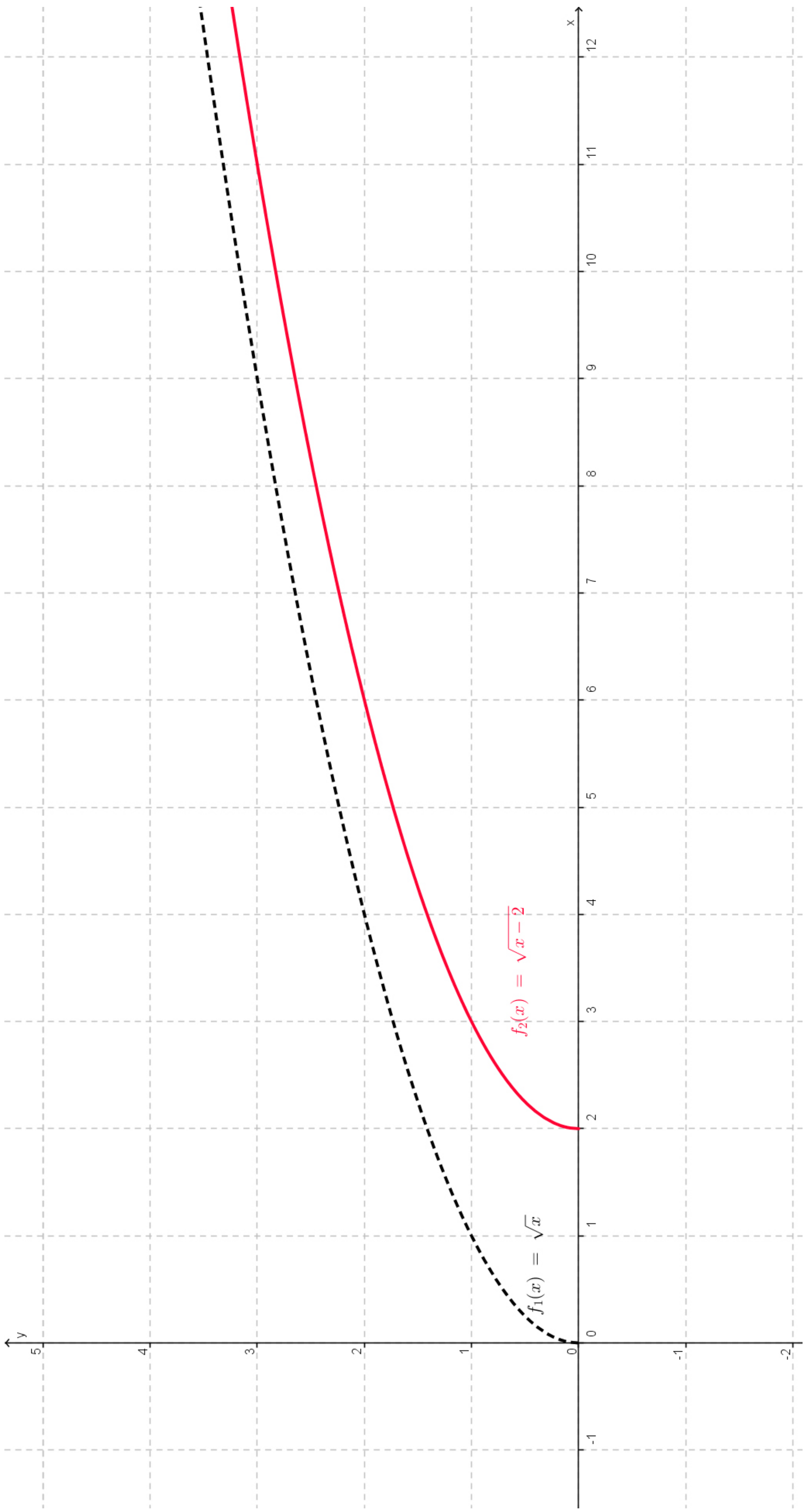
### 11.2.1 Manipulations graphiques de fonctions

1.

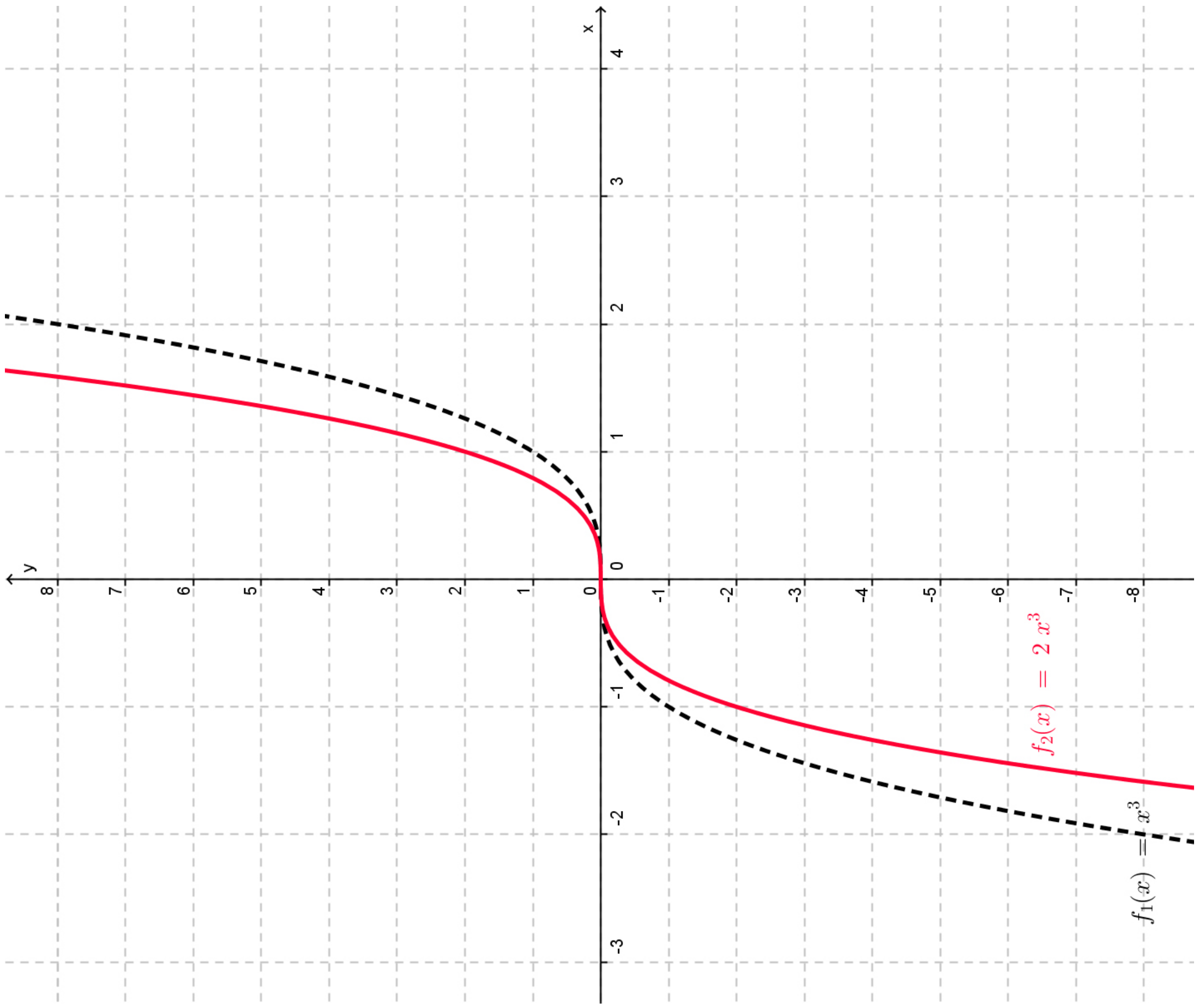
| N° | f(x) | Fonction de base | Op. alg | Action sur $x$ | Action sur $f(x)$ | Transformations graphiques |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x^2-4$ | $x^2$ | -4 | | X | TV(4↓) |
| 2 | $\frac{3}{x}$ | $\frac{1}{x}$ | $*3$ | | X | EV(3) |
| 3 | $\sqrt[3]{x-3}$ | $\sqrt[3]{x}$ | -3 | X | | TH(3→) |
| 4 | $\frac{1}{5x}$ | $\frac{1}{x}$ | $*5$ | X | | EH$\left(\frac{1}{5}\right)$ |
| | | | | OU | | |
| | | | | | X | EV$\left(\frac{1}{5}\right)$ |
| 5 | $2(x-3)^2$ | $x^2$ | -3 | X | | TH(3→) |
| | | | $*2$ | | X | EV(2) |
| 6 | $4x^2+1$ | $x^2$ | $*4$ | | X | EV(4) |
| | | | +1 | | X | TV(1↑) |
| 7 | $-2x^2+5$ | $x^2$ | $*2$ | | X | EV(2) |
| | | | $*(-1)$ | | X | SO($Ox$) |
| | | | +5 | | X | TV(5↑) |
| 8 | $3-\sqrt{2x}$ | $\sqrt{(x)}$ | $*2$ | X | | EH$\left(\frac{1}{2}\right)$ |
| | | | $*(-1)$ | | X | SO($Ox$) |
| | | | +3 | | X | TV(3↑) |
| 9 | $(2-3x)^3-2$ | $x^3$ | +2 | X | | TH(2←) |
| | | | $*(-1)$ | X | | SO($Oy$) |
| | | | $*3$ | X | | EH$\left(\frac{1}{3}\right)$ |
| | | | -2 | | X | TV(2↓) |
| 10 | $1-2\sqrt{2x-1}$ | $\sqrt{x}$ | -1 | X | | TH(1→) |
| | | | $*2$ | X | | EH$\left(\frac{1}{2}\right)$ |
| | | | $*(-1)$ | | X | SO($Ox$) |
| | | | $*2$ | | X | EV(2) |
| | | | +1 | | X | TV(1↑) |

2.

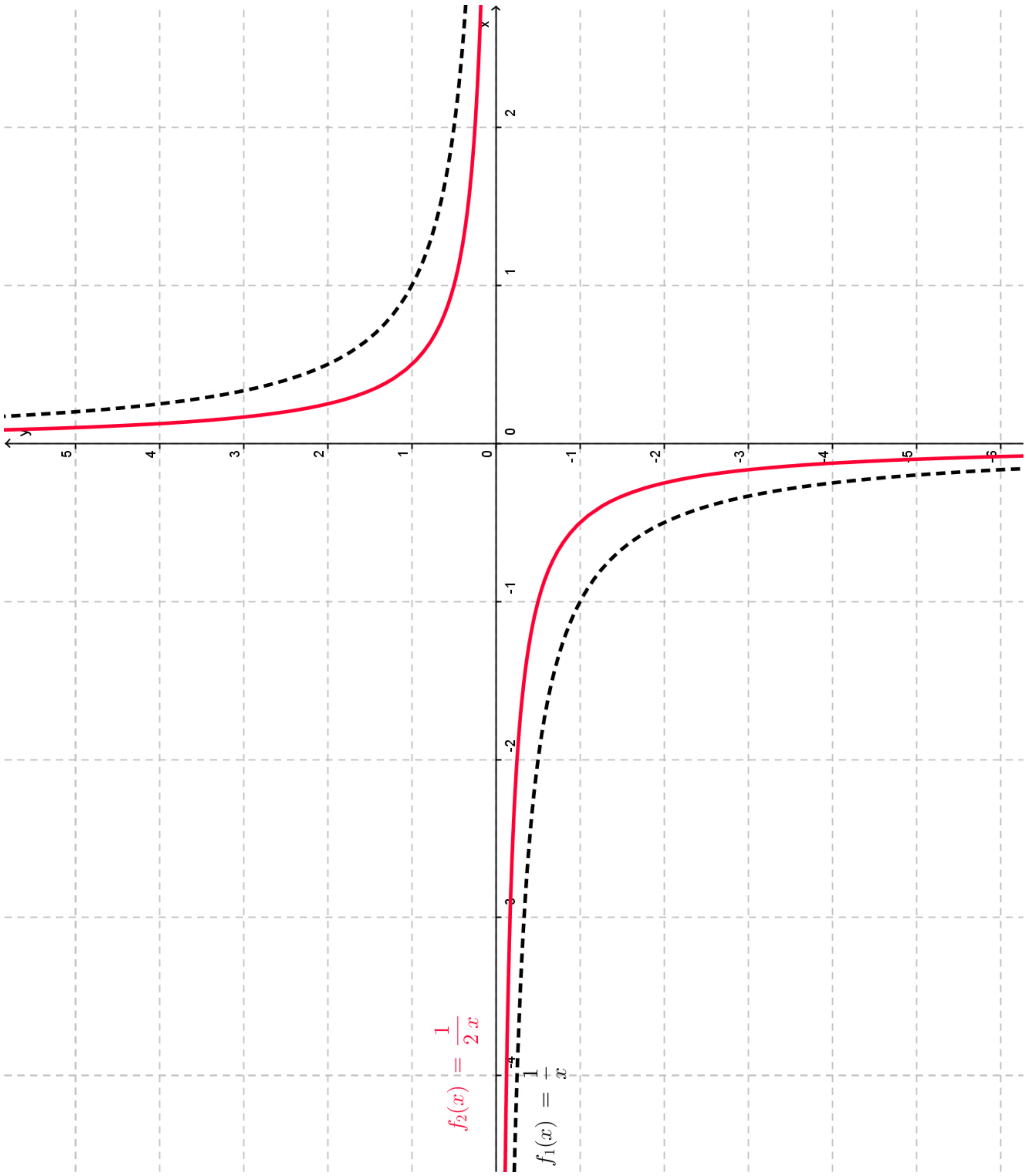




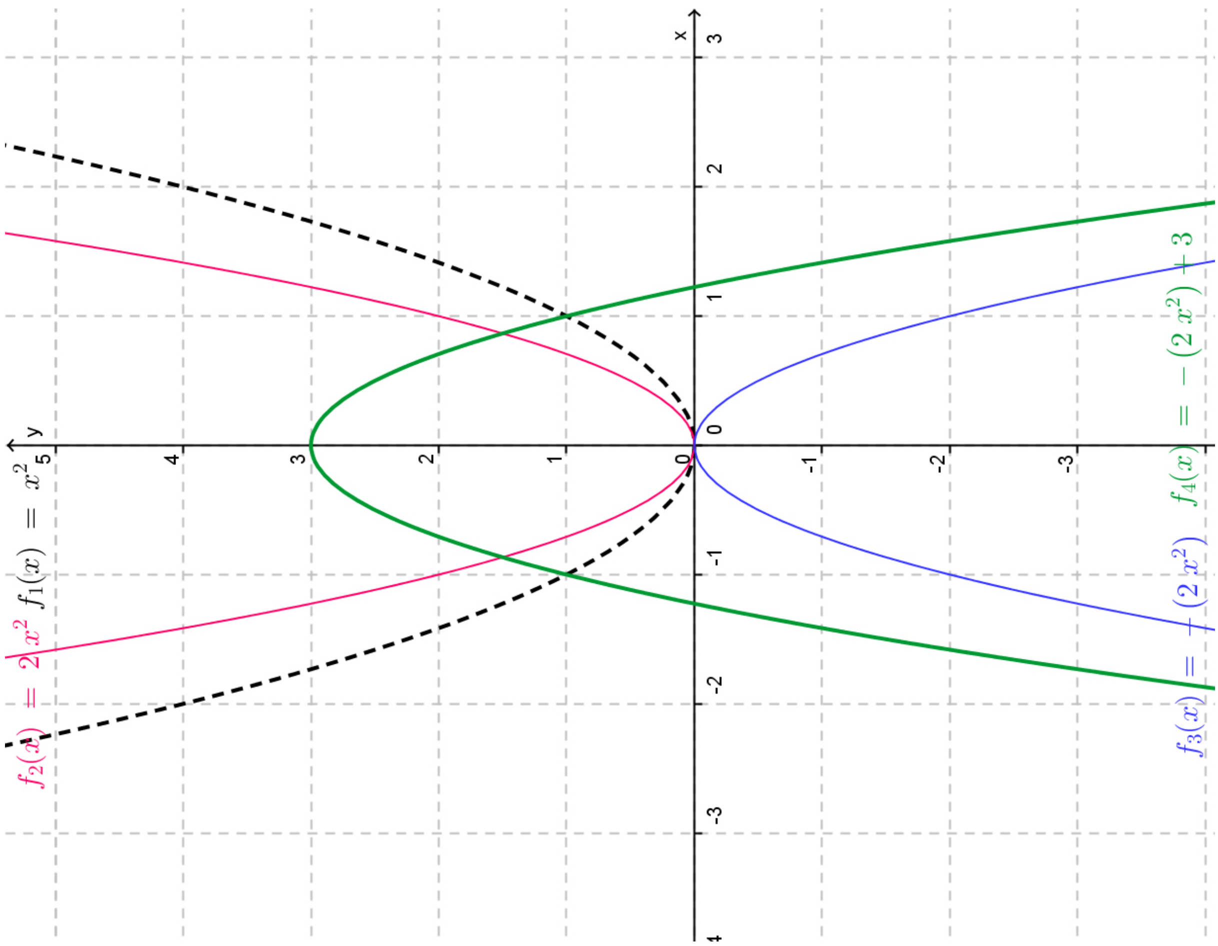
$f_1(x) = \sqrt{x}$
$f_2(x) = \sqrt{x-2}$
x
y

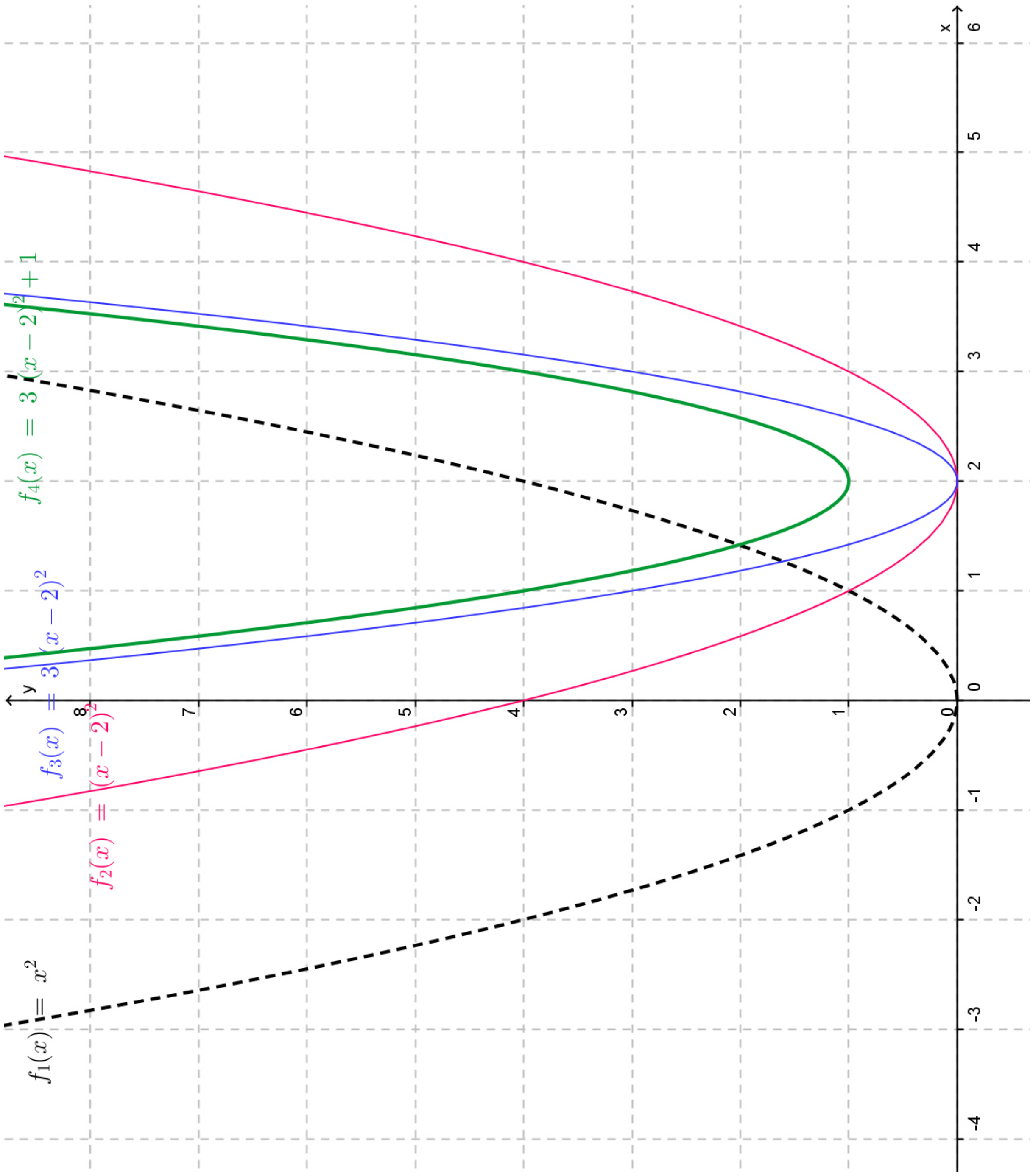


$f_2(x) = 2\,x^3$
$f_1(x) = x^3$

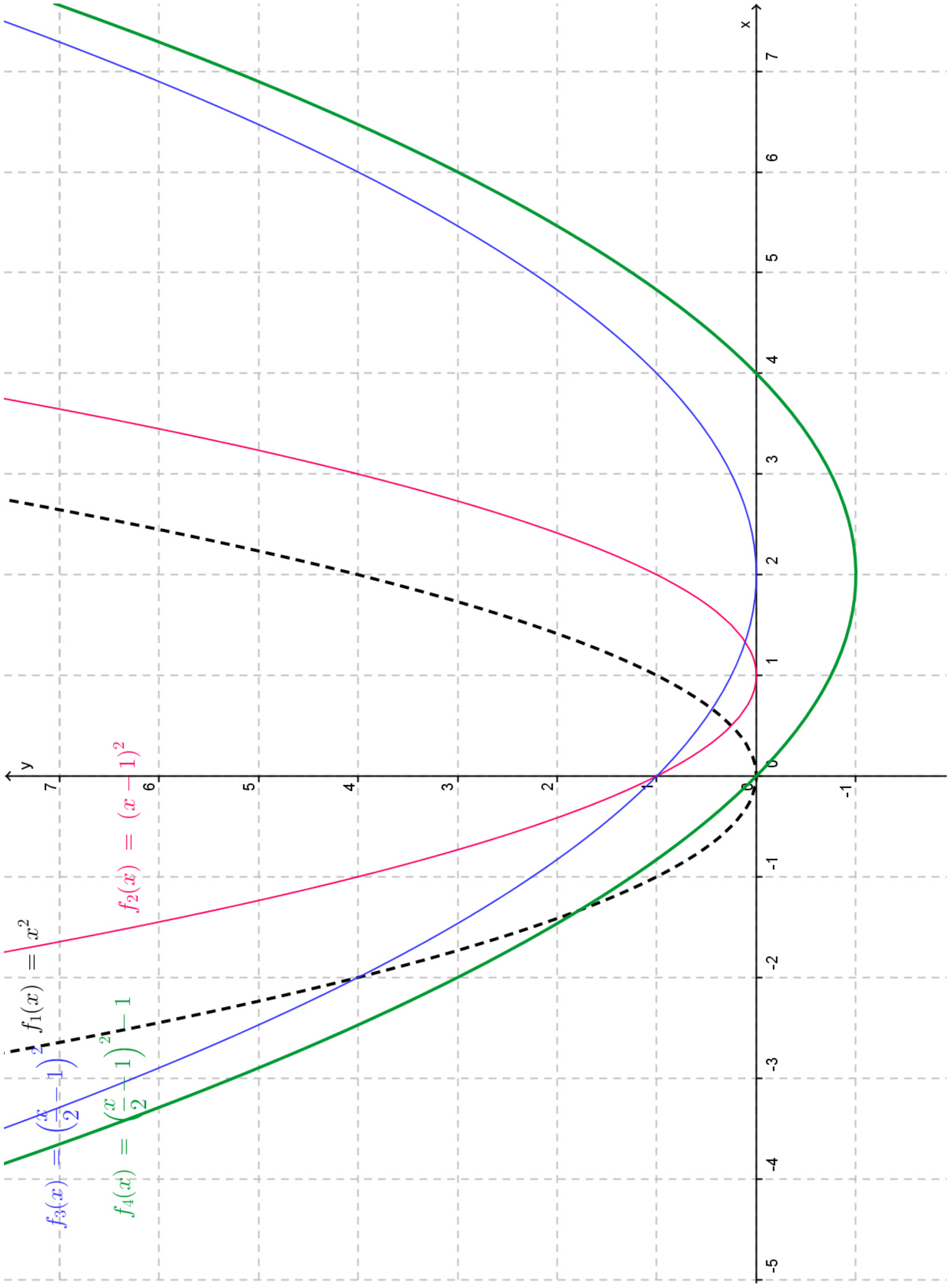


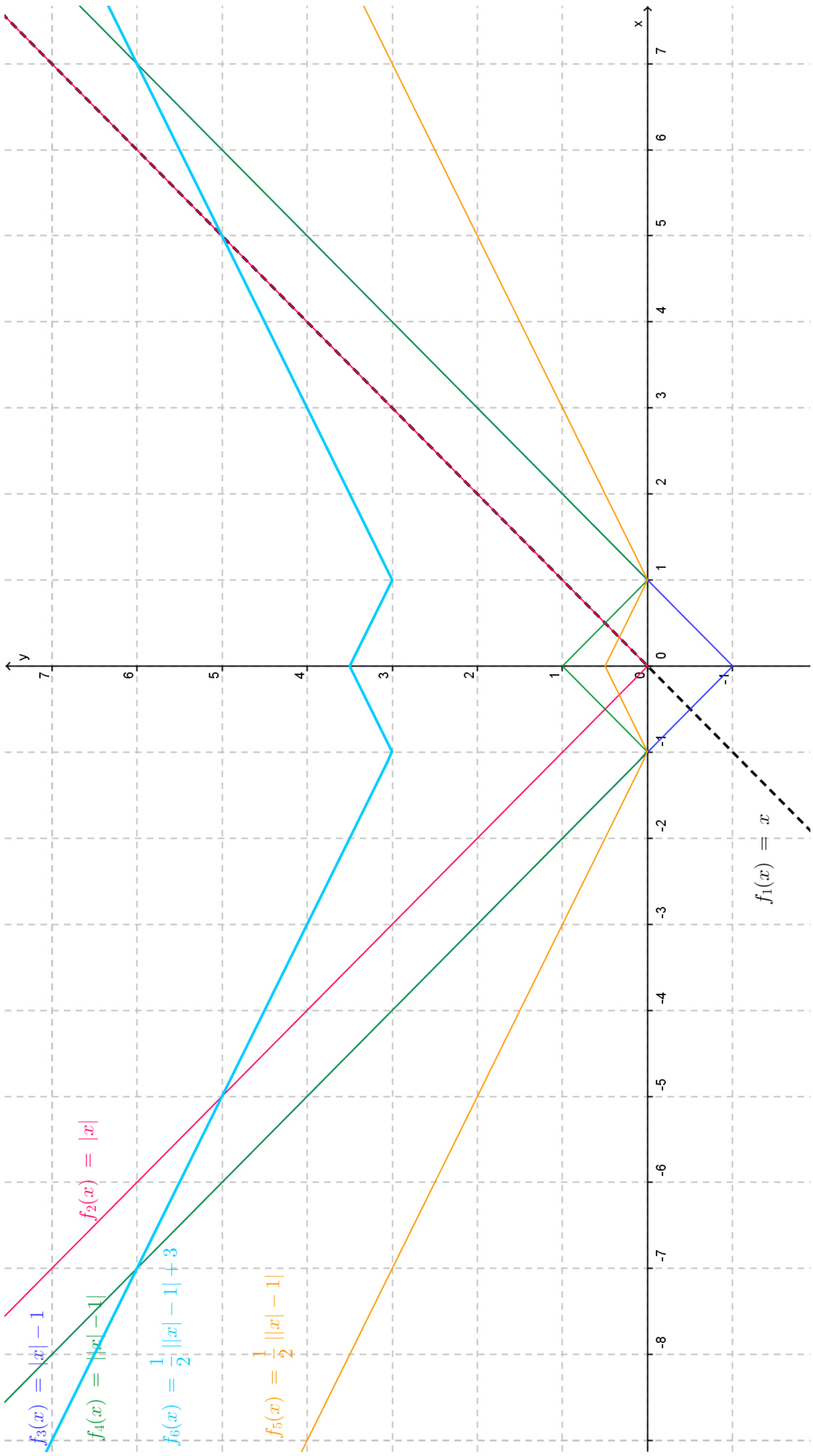
$f_2(x) = \frac{1}{2\,x}$
$f_1(x) = \frac{1}{x}$


$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = 2x^2$
$f_3(x) = -(2x^2)$
$f_4(x) = -(2x^2) + 3$

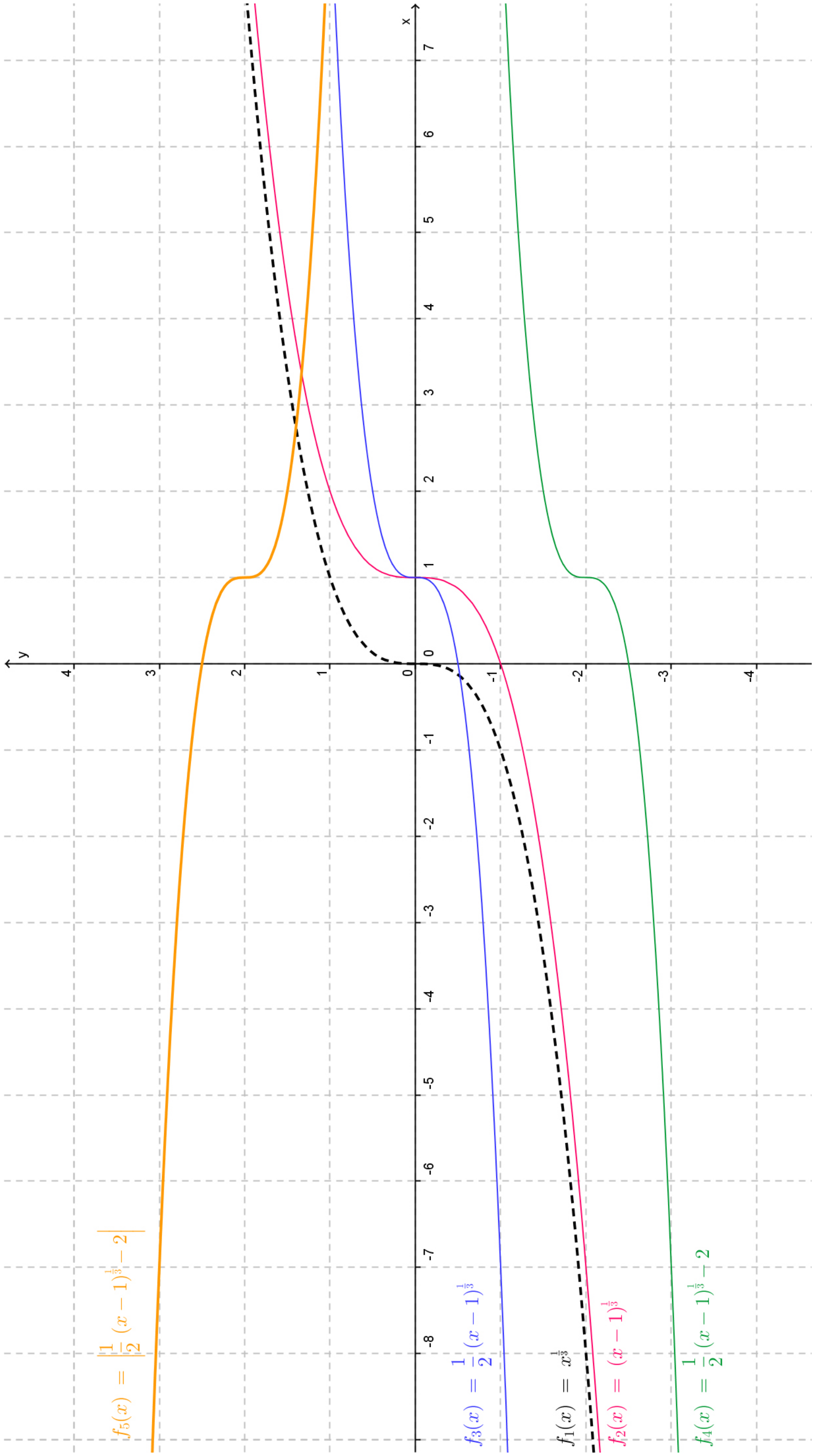


$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = (x-2)^2$
$f_3(x) = 3(x-2)^2$
$f_4(x) = 3(x-2)^2+1$
x
y

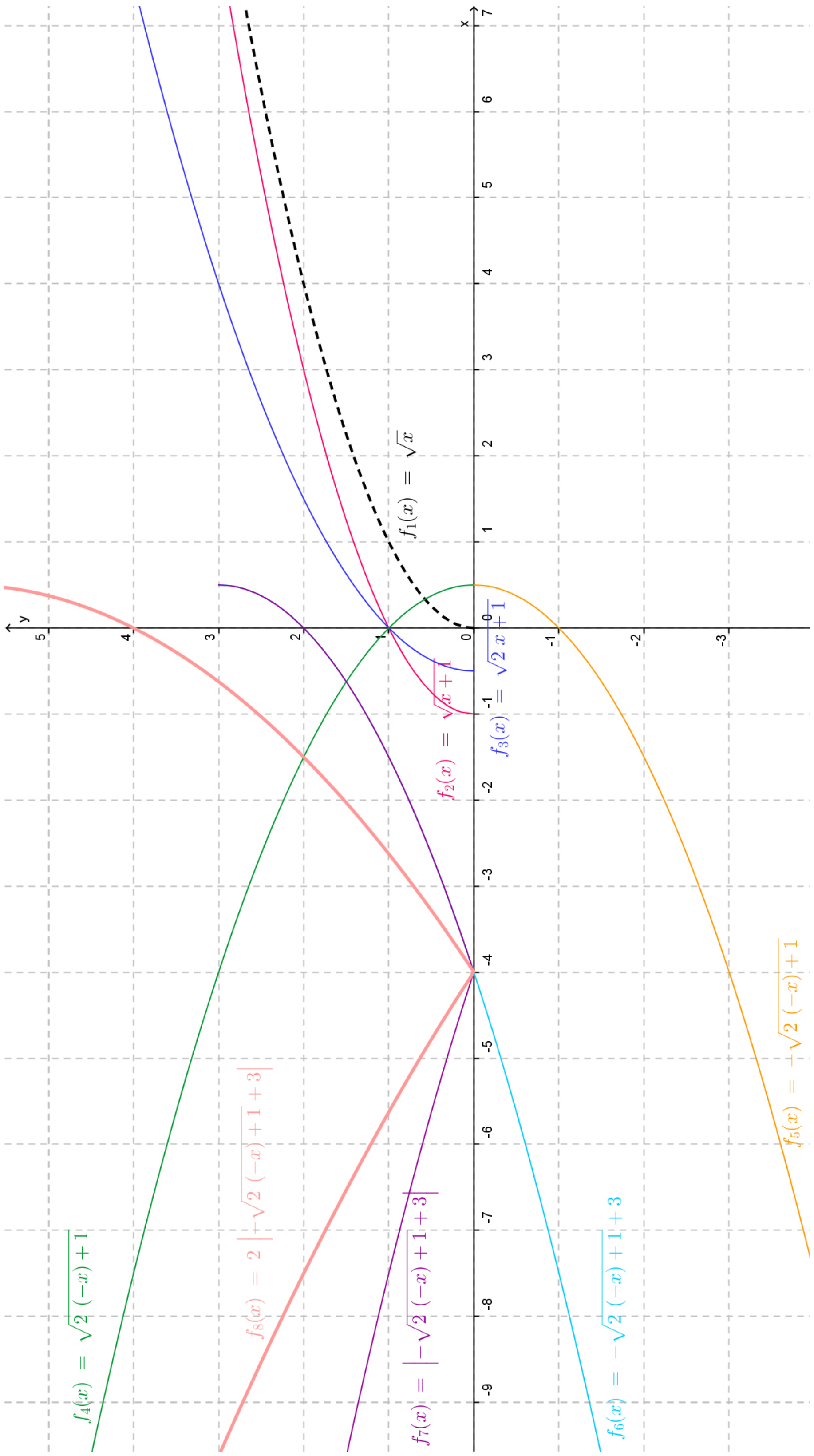

$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = (x-1)^2$
$f_3(x) = \left(\frac{x}{2}-1\right)^2$
$f_4(x) = \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 - 1$
x
y



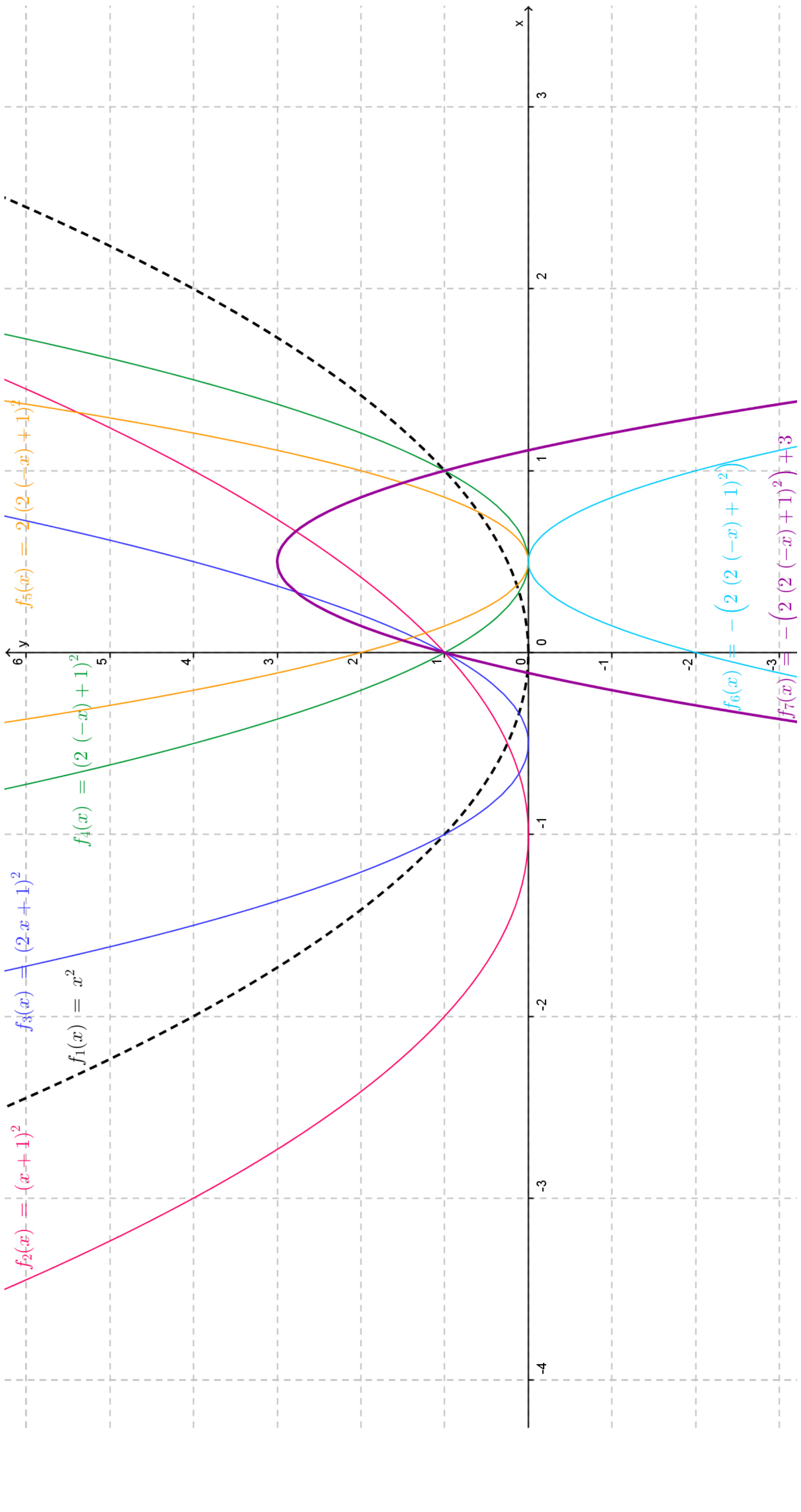
$f_1(x) = x$
$f_2(x) = |x|$
$f_3(x) = |x| - 1$
$f_4(x) = ||x| - 1|$
$f_6(x) = \frac{1}{2}||x| - 1| + 3$
$f_5(x) = \frac{1}{2}||x| - 1|$
x
y



$f_5(x) = \left|\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{3}} - 2\right|$
$f_3(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{3}}$
$f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$
$f_2(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$
$f_4(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{3}} - 2$
x
y



$f_1(x) = \sqrt{x}$
$f_2(x) = \sqrt{x+1}$
$f_3(x) = \sqrt{2\,x+1}$
$f_4(x) = \sqrt{2\,(-x)+1}$
$f_5(x) = -\sqrt{2\,(-x)+1}$
$f_6(x) = -\sqrt{2\,(-x)+1}+3$
$f_7(x) = \left|-\sqrt{2\,(-x)+1}+3\right|$
$f_8(x) = 2\left|-\sqrt{2\,(-x)+1}+3\right|$
x
y


f1(x) = x^2
f2(x) = (x + 1)^2
f3(x) = (2 x + 1)^2
f4(x) = (2 (−x) + 1)^2
f5(x) = 2 (2 (−x) + 1)^2
f6(x) = −(2 (2 (−x) + 1)^2)
f7(x) = −(2 (2 (−x) + 1)^2) + 3
x
y

### 11.2.2 Fonctions : aspects graphiques (rappels)

1. Les graphes qui représentent des fonctions sont les graphes 2, 3 et 6 (de gauche à droite et de haut en bas)

2. (a) oui
   (b) non
   (c) oui
   (d) non
   (e) non
   (f) non
   (g) oui
   (h) oui
   (i) oui

3. (a)
   - $dom_f : [-3, 2]$
   - $im_f : [-2, 3]$
   - Zéro(s) : $x = -1$
   - Ord. à l'origine : $y = 1$
   - $f(1)$=2
   - $f(-2)$=$-1$
   - $f(1)$= 2
   - $f(-2)$= -1

   (b)
   - $dom_f : [-4, 2]$
   - $im_f : [-1, 3]$
   - Zéro(s) :$x = -3$ et $x = \dfrac{3}{2}$
   - Ord. à l'origine : $y = 3$
   - $f(-1)$=2
   - $f(2)$=$-1$
   - $f(-2/1)$= 1
   - $f(-1/\frac{1}{2})$= 2

   (c)
   - $dom_f : \mathbb{R}_0$
   - $im_f : ]-1, +\infty$
   - Zéro(s) : $x = -1$ et $x = 1$
   - Ord. à l'origine :/
   - $f(2)$=1
   - $f(-2)$=$-1$
   - $f(-3/3)$= 2
   - $f(-1/1)$= 0

   (d)
   - $dom_f : \mathbb{R}$
   - $im_f : ]-3, +\infty$
   - Zéro(s) :$x \approx -1.7$ et $x \approx 1.7$
   - Ord. à l'origine : $y = -3$
   - $f(2)$=1
   - $f(-2)$=1
   - $f(-1/1)$= -2
   - $f(-2, 3/2, 3)$= 2

4.

(a)

| $x$ | $-4$ | | $-3$ | | $\frac{3}{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | - | $0$ | + | $0$ | - | $-1$ |

(b)

| $x$ | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + | $0$ | - | $0$ | + |

(c)

| $x$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | - | $0$ | + |

(d)

| $x$ | | $-5,3$ | | $-2,1$ | | $1$ | | $4{,}1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | - | $0$ | + | $0$ | - | $0$ | + | $0$ | - |

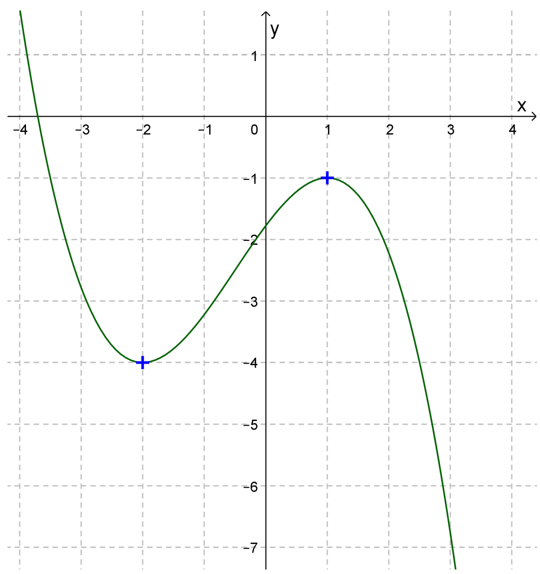
5. (a)

| $x$ | | $-1,5$ | | $0$ | | $1{,}5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |
| | | m | | M | | m | |

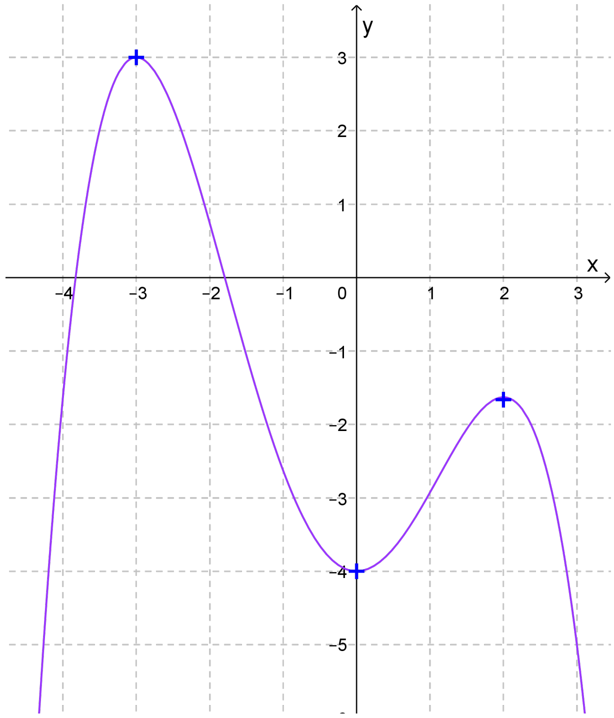
(b)

| $x$ | $-5$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ |
| | | | M | | m | | M | | |

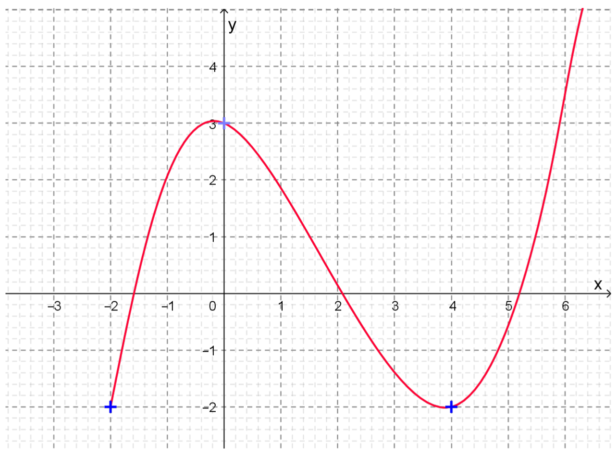
6. (a)



(b)

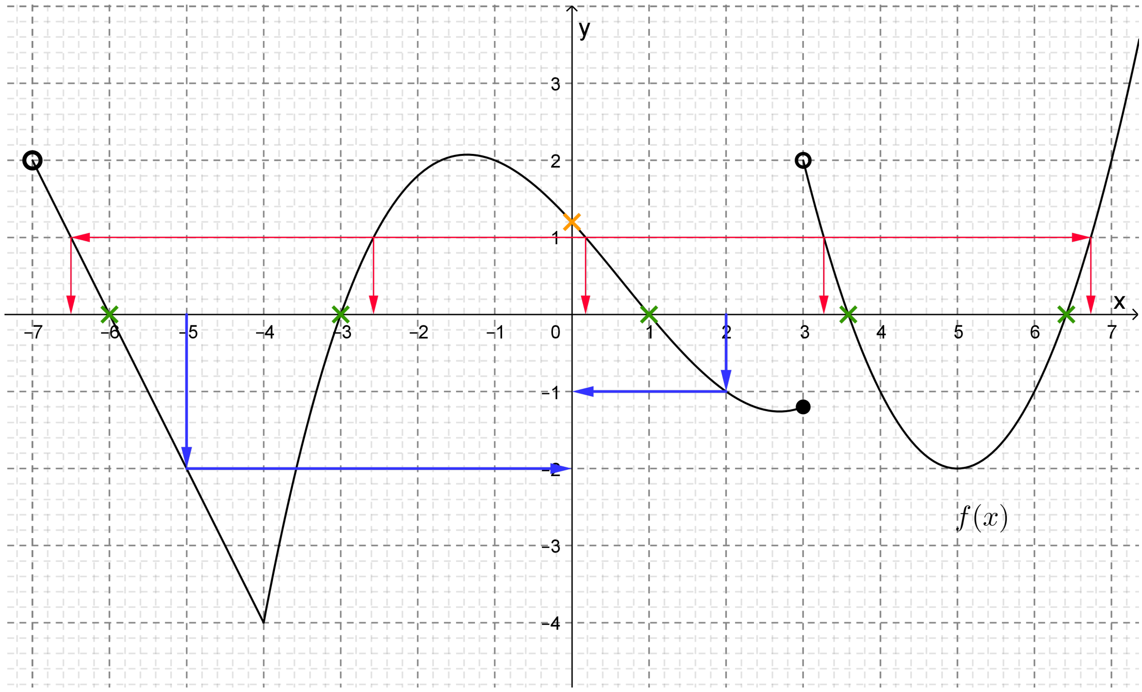



(c)



7.

(a)



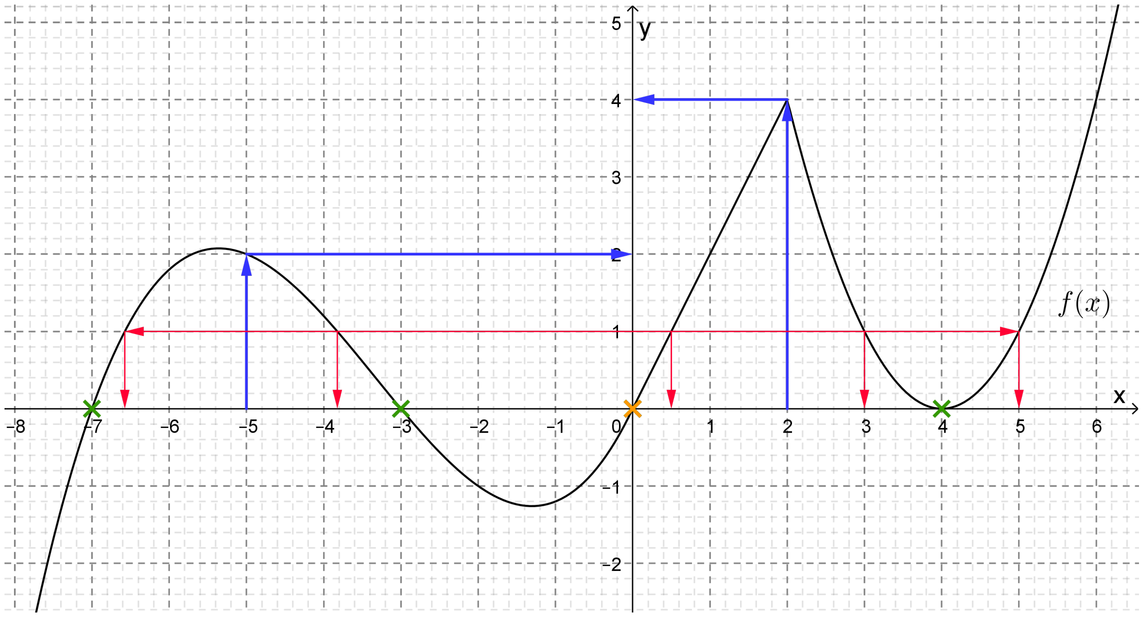

– le domaine de définition : $\mathrm{dom}_f : ]-7, +\infty$,
– l'ensemble image : $\mathrm{im}_f : [-4, +\infty$,
– l'image de $-5$ et 2 par la fonction : image de $-5$ : $-2$ et image de 2 : $-1$ ;
– le (les) antécédent(s) de 1 par la fonction : antécédents de 1 : $x \approx -6.5$, $x \approx -2.6$, $x \approx 0.2$, $x \approx 3.3$, $x \approx 6.7$,
– le(s) zéro(s) de la fonction : $x \approx -6$, $x \approx -3$, $x \approx 1$, $x \approx 3.5$, $x \approx 6.3$
– l'ordonnée à l'origine de la fonction : $y = 1.2$,
– le signe de la fonction :

| $x$ | | -7 | | -6 | | -3 | | 1 | | 3 | | 3,5 | | 6,3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | $^{-1,2}\vert_2$ | + | 0 | - | 0 | + |

– le tableau de variation de la fonction

| $x$ | | -7 | | -4 | | -1,5 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | ↘ | -4 | ↗ | 2,1 | ↘ | -2 | ↗ |
| | | | | m | | M | | m | |

(b)



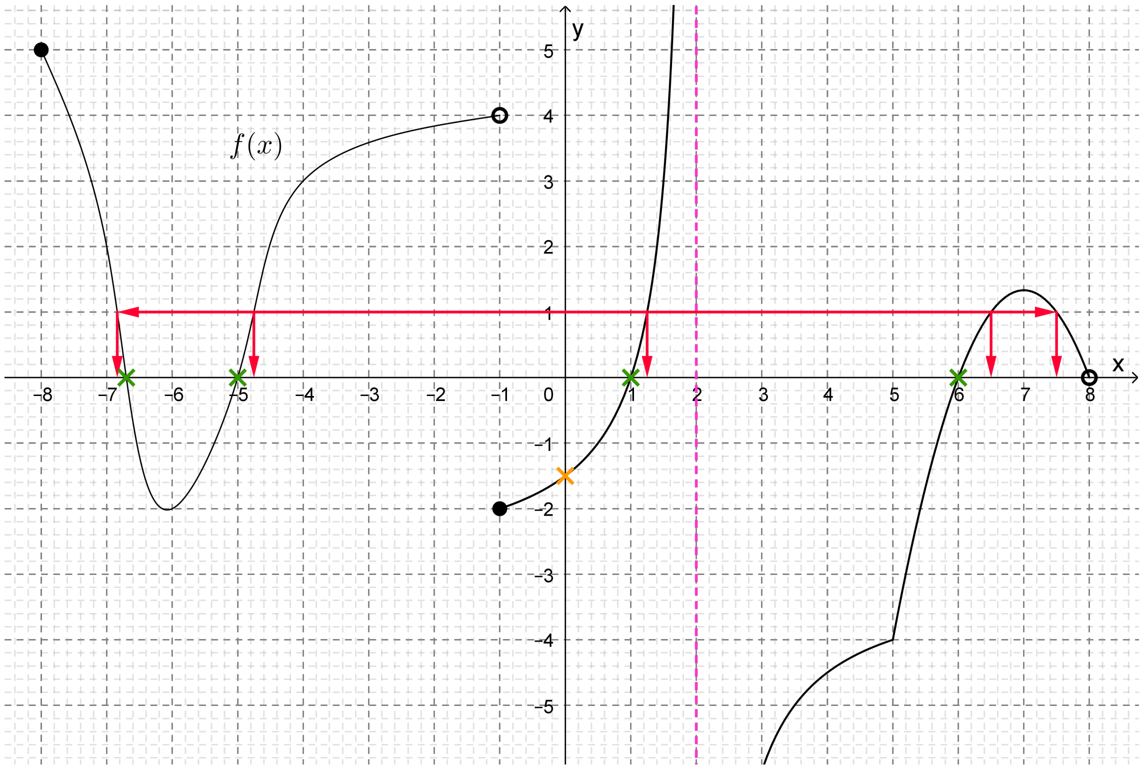

- le domaine de définition : $\text{dom}_f : \mathbb{R}$,
- l'ensemble image : $\text{im}_f : \mathbb{R}$,
- l'image de $-5$ et 2 par la fonction : image de $-5$ : 2 et image de 2 : 4 ;
- le (les) antécédent(s) de 1 par la fonction : antécédents de 1 : $x \approx -6.6$, $x \approx -3.8$, $x \approx 0.5$, $x \approx 3$, $x \approx 5$,
- le(s) zéro(s) de la fonction : $x \approx -7$, $x \approx -3$, $x \approx 0$, $x \approx 4$
- l'ordonnée à l'origine de la fonction : $y = 0$,
- le signe de la fonction :

| $x$ | | -7 | | -3 | | 0 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | + |

- le tableau de variation de la fonction

| $x$ | | -5,3 | | -1,2 | | 2 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 2,2<br>M | $\searrow$ | -1,4<br>m | $\nearrow$ | 4<br>M | $\searrow$ | 0<br>m | $\nearrow$ |

(c)




- le domaine de définition : $\mathrm{dom}_f : [-8, 2[ \cup ]2, 8[$,
- l'ensemble image : $\mathrm{im}_f : \mathbb{R}$,
- l'image de $-5$ et 2 par la fonction : image de $-5 : 0$, image de $2 : \nexists$ et image de $-1 : -2$ ;
- le (les) antécédent(s) de 1 par la fonction : antécédents de 1 : $x \approx -6.8$, $x \approx -4.8$, $x \approx 1.2$, $x \approx 6.5$, $x \approx 7.5$,
- le(s) zéro(s) de la fonction : $x \approx -6.7$, $x \approx -5$, $x \approx 1$, $x \approx 6$
- l'ordonnée à l'origine de la fonction : $y = -1.5$,
- le signe de la fonction :

| $x$ | -8 | | -6,7 | | 5 | | -1 | | 1 | | 2 | | 6 | | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | ${}^{4}\vert_{-2}$ | - | 0 | + | $\nexists$ | - | 0 | + | |

- le tableau de variation de la fonction

| $x$ | -8 | | -6 | | -1 | | 2 | | 7 | | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | -2<br>m | $\nearrow$ | ${}^{4}\vert_{-2}$ | $\nearrow$ | $\nexists$ | $\nearrow$ | 1,4<br>M | $\searrow$ | |

8. Courbe 1 :

| | |
|---|---|
| – Faux<br>– Vrai<br>– Faux<br>– Vrai<br>– Vrai<br>– Vrai | – $dom_f$ : $[-10, 10]$<br>– $im_f$ : $[-5, 6]$<br>– $f(3) = 1$<br>– les racines de $f$ : $x$=-8,$x$=-2,$x$=2 et $x$=7<br>– les solutions de l'équation $2f(x) + 6 = 0$ : $x$=-10 et $x$=8 |

Courbe 2 :

| | |
|---|---|
| – Faux<br>– Faux<br>– Vrai<br>– Vrai<br>– Vrai<br>– Faux | – $dom_f$ : $[-10, 4[\cup]4, 10[$<br>– $im_f$ :$]-6, 6]$<br>– $f(3) \approx -1,2$<br>– les racines de $f$ :$x$=-9, $x$=-2, $x$=2 et $x$=6<br>– les solutions de l'équation $2f(x) + 6 = 0$ : $x$=-10 et $x \approx$ 5,2 |

### 11.2.3 Fonctions : aspects algébriques

1. $f(x) = x - 3$
   (a) $f(0) = -3$, $f(3) = 0$, $f(\frac{1}{3}) = -\frac{8}{3}$, $f(-\frac{2}{5}) = -\frac{17}{5}$
   (b) image de 1 : $f(1) = -2$, $f(2) = -1$ et $f(5) = 2$
   (c) – Antécédent de 1 : on résoud l'équation $f(x) = 1$ ou
   $$\begin{aligned} & x - 3 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 4 \end{aligned}$$
   – Antécédent de 2 : 5
   – Antécédent de 5 : 8
2. $f(x) = 2x^2 - 3$
   (a) $f(0) = -3$, $f(-2) = 5$, $f(\sqrt{3}) = 3$, $f(\sqrt{2} + 1) = 3 + 4\sqrt{2}$
   (b) $f(0) = -3$, $f(1) = -1$ et $f(-1) = -1$
   (c) Antécédents de 5 : $\pm 2$
3. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x}$
   (a) $f(1) = -1$, $f(-1) = 3$, $f(\frac{2}{3}) = -2$, $f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$
   (b) $f(2) = 0$
   (c) Antécédents de 1 : aucun

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$
   (a) $f(0) = 0$, $f(3) = \frac{9}{2}$, $f(-3) = -\frac{9}{4}$, $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$
   (b) $f(-1) = -\frac{1}{2}$
   (c) Antécédents de $-\frac{1}{2}$ : $x = -1$ et $x = \frac{1}{2}$
5. $f(x) = \sqrt{x^2+9}$
   (a) $f(0) = 3$, $f(2) = \sqrt{13}$, $f(-2) = \sqrt{13}$, $f(-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$
   (b) $f(4) = 5$
   (c) Antécédents de 5 : $\pm 4$
6. $f(x) = -\sqrt{x^2-3}$
   (a) $f(2) = -1$, $f(3) = -\sqrt{6}$, $f(\sqrt{3}) = 0$
   (b) 1 n'a pas d'image par la fonction car il n'appartient pas au domaine de définition de la fonction
   (c) $\pm a$ où $|a| \geq \sqrt{3}$
   (d) non car la fonction est toujours négative ou nulle
7. (a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$
      i. $dom_f = \mathbb{R}$
      ii. zéro(s) : $x = -3$ et $x = 1$
      iii. intersection avec $Oy$ : $y = -3$
      iv. Fonction quelconque

   (b) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$
      i. $dom_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
      ii. zéro(s) : aucun
      iii. intersection avec $Oy$ : $y = -\dfrac{3}{2}$
      iv. Fonction quelconque

   (c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+4x-5}$
      i. $dom_f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$
      ii. zéro(s) : $x = -\dfrac{1}{2}$
      iii. intersection avec $Oy$ : $y = -\dfrac{1}{5}$
      iv. Fonction quelconque

(d) $f(x) = \sqrt{2x-5}$

i. $dom_f = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right.$

ii. zéro(s) : $x = \frac{5}{2}$

iii. intersection avec $Oy$ : $0 \notin dom_f$

iv. Fonction quelconque

(e) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x^2+4x+3}}$

i. $dom_f = ]-3, -1[ \cup [3, +\infty$

ii. zéro(s) : $x = 3$

iii. intersection avec $Oy$ : $0 \notin dom_f$

iv. Fonction quelconque

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x^2-9x+4}}$

i. $dom_f = \left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right[ \cup ]4, +\infty$

ii. zéro(s) : $x = -\frac{5}{2}$

iii. intersection avec $Oy$ : $y = \frac{\sqrt{5}}{2}$

iv. Fonction quelconque

8. La fonction est :

(a) paire
(b) impaire
(c) quelconque
(d) paire

9. La fonction est :

(a) quelconque
(b) paire
(c) impaire

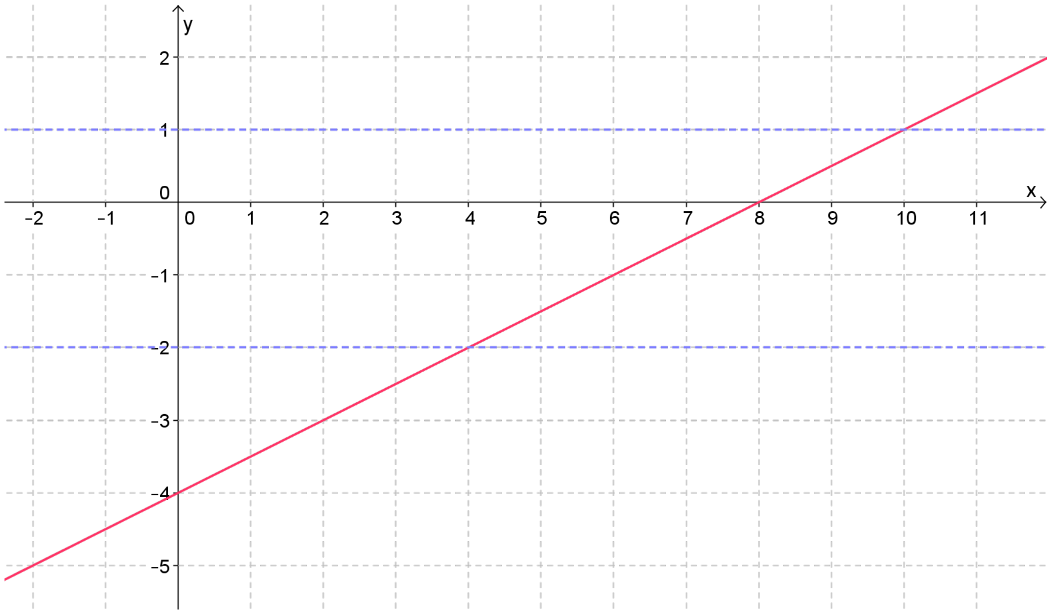
10. (a) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}}$
    i. $dom_f = ]-3, +\infty$
    ii. zéro(s) : $x = 2$
    iii. Fonction quelconque
    iv. $f(x)$ positive si $x \geq 2$

    (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2 - x}$
    i. $dom_f = [-2, +\infty \setminus \{0, 1\}$
    ii. zéro(s) : $x = -2$
    iii. Fonction quelconque
    iv. $f(x)$ positive si $x \in [-2, 0[\cup]1, +\infty$

    (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x^3 + 2x^2 - 16x - 32}$
    i. $dom_f = -\infty, -4[\cup]-4, -2[\cup[1, 4[\cup]4, +\infty$
    ii. zéro(s) : $x = 1$ ($x = -2$ est rejeté du domaine)
    iii. Fonction quelconque
    iv. $f(x)$ positive si $x \in ]-4, -2[\cup]4, +\infty$

    (d) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{\sqrt{2x^2 + x - 3}}$
    i. $dom_f = -\infty, -\dfrac{3}{2}\left[\cup\right]1, +\infty$
    ii. zéro(s) : aucun ($x = -1$ est rejeté du domaine)
    iii. Fonction quelconque
    iv. $f(x)$ positive si $x \in ]1, +\infty$

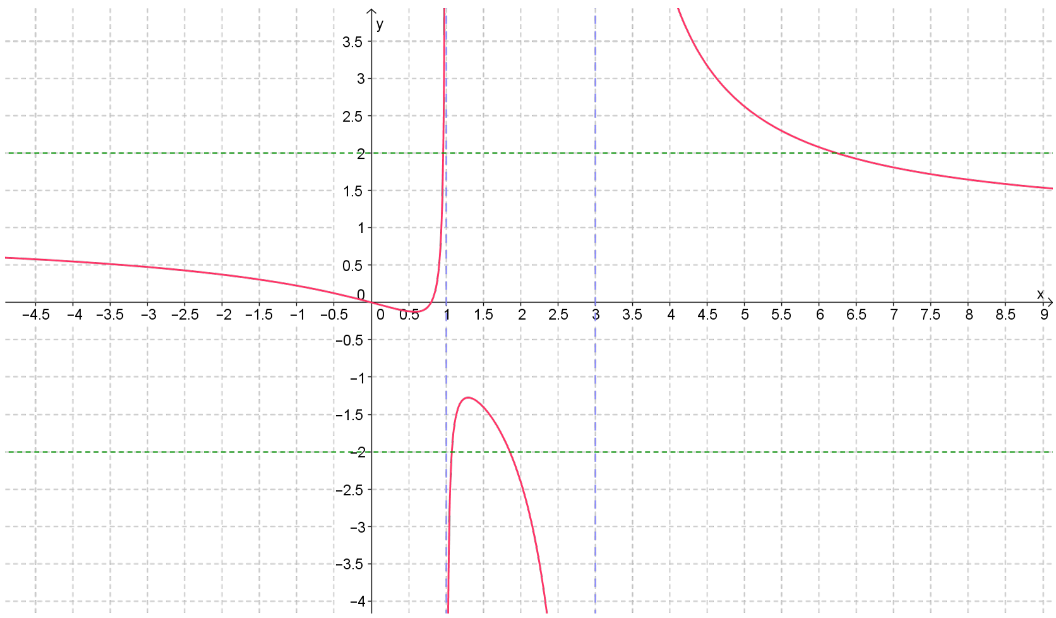
11.




(a) $f(x) = -4 \Leftrightarrow x = 0$

(b) $f(x) \in [-2, 1] \Leftrightarrow x \in [4, 10]$

12.



(a) $x = 0$ et $x \approx 0.8$

(b) $x \approx 0.95$ et $x \approx 6.2$

(c) $-\infty, 0.95[ \cup ]1, 3[ \cup ]6.2, +\infty$

(d) $-\infty, 1[ \cup ]1.2, 1.8[ \cup ]3, +\infty$

# Sixième partie

# 4UAA5 - Le second degré

12

# Equations et inéquations du second degré

## A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | *Degré d'acquisition* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Résoudre des équations du second degré ($\Delta$, somme et produit) | 1-2 | | | |
| 2 | Résoudre des problèmes algébriques mettant en œuvre une équation du second degré ou la somme et le produit des racines | 3-4-5-6-7 | | | |
| 3 | Factoriser des expressions du second degré et simplifier des fractions algébriques du second degré | 8-9 | | | |
| 4 | Résoudre des inéquations du second degré | 10 | | | |
| 5 | Résoudre des équations et des inéquations réductibles au second degré | 11-12 | | | |
| 6 | Résoudre des problèmes du second degré | 13 | | | |

## 12.1 Exercices

1. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

   (a) $x^2 - 4x - 5 = 0$
   (b) $x^2 + 16x + 23 = 0$
   (c) $x^2 - 11x + 28 = 0$
   (d) $x^2 + x - 1 = 0$
   (e) $-5x^2 + 2\sqrt{5}x = 1$
   (f) $-4x^2 - x - 6 = 0$
   (g) $23x - 6x^2 + 4 = 0$
   (h) $3x^2 - 2\sqrt{6}x - 3 = 0$
   (i) $-\frac{11}{3}x - \frac{7}{6} = \frac{1}{2}x^2$
   (j) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 4x = 0$

2. En utilisant la technique de la somme et du produit, résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

   (a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
   (b) $x^2 - 5x + 4 = 0$
   (c) $x^2 - 4x - 21 = 0$

3. Déterminer deux nombres dont la somme vaut 29 et le produit 198.

4. Trouver, si possible, deux réels connaissant leur somme $S$ et leur produit $P$

   (a) $S = 2a + 1$ et $P = a^2 + a - 2$
   (b) $S = a + b - 1$ et $P = ab - b$

5. Vérifier que le nombre $a$ donné est solution de l'équation proposée et en déduire l'autre solution (sans utiliser $\Delta$)

   (a) $x^2 - \sqrt{3}x - 2(2 + \sqrt{3}) = 0$, $a$ =-2
   (b) $-5x^2 + 18 = -x$, $a$ =2

6. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x$ (les autres lettres représentent des nombres réels non nuls)

   (a) $(x - 4c)^2 - 13c(2c - x) = 2cx$
   (b) $\frac{x}{p}\left(x - \frac{p}{r}\right) = \frac{1}{r}(p - rx)$

7. Soit l'équation $x^2 - 4x - 15 = 0$ dont les solutions sont $x'$ et $x''$. Sans caculer $x'$ et $x''$, déterminer la valeur de

   (a) $2x' + 2x''$
   (b) $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$
   (c) $\frac{x''}{x'} + \frac{x'}{x''}$

8. Factoriser les expressions suivantes :

   (a) $3x^2 + 2x$
   (b) $2x^2 - 9x - 5$
   (c) $-3x^2 + 11x - 8$
   (d) $\frac{1}{2}x^2 - 12 - \frac{5}{2}x$
   (e) $x^2 + x - 1$

9. Simplifier les fractions suivantes après avoir posé les conditions d'existence :

   (a) $\frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 5x + 2}$
   (b) $\frac{2x^2 + 4x - 6}{-x^2 - x + 6}$
   (c) $\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 1}$

10. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

    (a) $-x^2 - 4x + 5 \geq 0$

    (b) $x^2 + x - 3 \geq 0$

    (c) $-3x^2 - 4x > 2$

    (d) $4x^2 + 1 > -3x$

11. Résoudre dans $\mathbb{R}$

    (a) $\dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{5}{x} - 4 = \dfrac{18}{x^2+3x}$

    (b) $\dfrac{5x}{x-3} + \dfrac{4}{x+3} = \dfrac{90}{x^2-9}$

    (c) $\dfrac{x+1}{3x+2} = \dfrac{x-2}{2x-3}$

    (d) $\dfrac{3x-1}{x-2} + \dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2-x-2}$

    (e) $1 - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+4}{x+1}$

    (f) $\dfrac{1-x}{x^2+2x-8} - \dfrac{x-1}{x^2-6x+8} = \dfrac{x+1}{x^2-2x-8} + \dfrac{x+1}{x^2+6x+8}$

12. Résoudre dans $\mathbb{R}$

    (a) $\dfrac{2x(25x^2-16)}{(4x^2-1)(-x^2+6x-9)} \leq 0$

    (b) $\dfrac{2x^2-10x-14}{x^2-3x+2} > 1$

    (c) $2x(x^2-1)(x+2) + 3(x+2) \leq 3x^2(x+2)$

    (d) $\dfrac{3x^2-x-18}{x^2-6-x} > 2$

    (e) $\dfrac{24-4x^2-20x}{4x^2-12x+9} \leq -1$

    (f) $\dfrac{x+2}{6x^3-11x^2-3x+2} \leq \dfrac{x+1}{6x^3-13x^2+x+2}$

    (g) $\begin{cases} 3-2x < 0 \\ \\ x^2-5x+6 > 0 \end{cases}$

    (h) $\begin{cases} \dfrac{-x^2+4x-3}{2x(x^2-4)} < 0 \\ \\ \dfrac{10x(x-3)}{4x^2-5x+1} > 0 \end{cases}$

13. Problèmes du second degré :

   (a) Un brocanteur achète une caisse contenant un lot "soldé" de vases en verre blanc pour 360€, 3 sont cassés et vend les autres 5€ de plus par vase qu'ils ne lui ont couté. Il gagne ainsi 15€ sur son marché ; combien chaque vase lui avait-il couté ?

   (b) Deux villes "A" et "B" sont situées sur un fleuve ;" A" à 42 km en aval de " B".Un bateau fait le service entre les deux villes. Sachant que la vitesse du courant est de 4 km/h et que la différence des trajets " AB" et " BA" est de 1h 12 min. Calculer la vitesse du bateau.

   (c) Une amicale d'anciens élèves organise une excursion en autocars. Le prix global de l'excursion s'élève à 1200€. Le nombre des participants étant supérieur de " 4"au nombre prévu chacun peut ainsi payer 10€en moins. Quel était primitivement le nombre d'excursionnistes ?

   (d) Un ascenseur monte dans une cage d'escalier à la vitesse constante de 2 mètres par seconde. Quand il a parcouru 10 mètres, on abandonne, à 20 mètres du bas de la cage une pierre qui descend avec une accélération de 9,80 mètre à la seconde par seconde. A quelle distance du haut de la cage , la rencontre se produira-t-elle ?.

   (e) Un robinet B met 40 min de plus qu'un robinet A pour vider un réservoir. Lorsqu'on ouvre simultanément les deux robinets le réservoir est vidé en 48 min. Quel temps faut-il à chacun pour vider le réservoir ?
   La notion physique est le débit de vidange d'un réservoir. Le débit représente le volume écoulé par unité de temps :

$$d = \frac{V}{t}$$

   On suppose que la vidange du réservoir se fait à débit constant. De plus le débit avec les deux robinets ouverts est égal à la somme des débits du robinet A et du robinet B.

## 12.2 Solutions

1. (a) S :$\{-1,5\}$
   (b) S :$\left\{-8-\sqrt{41},-8+\sqrt{41}\right\}$
   (c) S :$\{4,7\}$
   (d) S :$\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
   (e) S :$\left\{\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right\}$
   (f) S :$\phi$
   (g) S :$\left\{-\dfrac{1}{6},4\right\}$
   (h) S :$\left\{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3},\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{2}\right\}$
   (i) S :$\left\{-\dfrac{1}{3},-7\right\}$
   (j) S :$\left\{\dfrac{-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2},\dfrac{-2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right\}$
2. (a) S :$\{2,3\}$
   (b) S :$\{1,4\}$
   (c) S :$\{-3,7\}$
3. S :$\{11,18\}$
4. (a) S :$\{a+2,a-1\}$
   (b) S :$\{a-1,b\}$
5. (a) $(-2)^2-\sqrt{3}(-2)-2(2+\sqrt{3})=0$ et $S=\sqrt{3}$ donc $x=2+\sqrt{3}$
   (b) $-5(2)^2+18=-(2)$, et $S=\dfrac{1}{5}$ donc $x=-\dfrac{9}{5}$
6. (a) S :$\{-5c,2c\}$
   (b) S :$\left\{-p,\dfrac{p}{r}\right\}$
7. (a) $2x'+2x''=8$
   (b) $\dfrac{1}{x'}+\dfrac{1}{x''}=-\dfrac{4}{15}$
   (c) $\dfrac{x''}{x'}+\dfrac{x'}{x''}=-\dfrac{46}{15}$

8. (a) $3x^2 + 2x = x(3x+2)$
   (b) $2x^2 - 9x - 5 = (x-5)(2x+1)$
   (c) $-3x^2 + 11x - 8 = -(x-1)(3x-8)$
   (d) $\frac{1}{2}x^2 - 12 - \frac{5}{2}x = \frac{1}{2}(x+3)(x-8)$
   (e) $x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$
9. (a) C.E. :$x \neq 2, \frac{1}{2}$ : $\frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{x+1}{2x-1}$
   (b) C.E. :$x \neq 2, -3$ : $\frac{2x^2 + 4x - 6}{-x^2 - x + 6} = \frac{-2x+2}{x-2}$
   (c) C.E. :$x \neq \sqrt{2} \pm 1$ : $\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 1} = \frac{x + 1 + \sqrt{2}}{x - 1 - \sqrt{2}}$
10. (a) S :$[-5, 1]$
    (b) S :$-\infty, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\Bigg] \cup \Bigg[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \infty$
    (c) S :$\phi$
    (d) S :$\mathbb{R}$
11. (a) S :$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
    (b) S :$\left\{-\frac{34}{5}\right\}$
    (c) S :$\left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$
    (d) S :$\left\{0, \frac{3}{5}\right\}$
    (e) S :$\left\{1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\right\}$
    (f) S :$\left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$
12. (a) S :$\left[-\frac{4}{5}, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left[0, \frac{1}{2}\right[ \cup \left[\frac{4}{5}, 3\right[ \cup ]3, +\infty$
    (b) S :$-\infty, \frac{7-\sqrt{113}}{2}\Bigg[ \cup ]1, 2[ \cup \Bigg]\frac{7+\sqrt{113}}{2}, +\infty$
    (c) S :$[-2, -1] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right]$
    (d) S :$-\infty, -3[ \cup ]-2, 2[ \cup ]3, +\infty$
    (e) S :$\left[\frac{33}{32}, \frac{3}{2}\right[ \cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right.$
    (f) S :$-\infty, -\frac{1}{2}\Bigg[ \cup \Bigg] -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\Bigg] \Bigg]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\Bigg[ \cup [1, 2[$
    (g) S :$\left]\frac{3}{2}, 2\right[ \cup ]3, +\infty$
    (h) S :$]-2, 0[ \cup ]3, +\infty$

13. Problèmes du second degré :
    (a) prix du vase : 20€ ;
    (b) vitesse du bateau : 17,2 km/h ;
    (c) nombre d'excursionistes : 20 ;
    (d) $e \approx 7,65$m ;
    (e) $T_A$ =80 min et $T_B$=120 min.

# 13

## La fonction du second degré

### A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | *Degré d'acquisition* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Etablir le graphe de paraboles sur base de leurs caractérisitques | 1 | | | |
| 2 | Trouver l'équation de parabole répondant à des critères donnés | 2-3-4-5 | | | |
| 3 | Résoudre des problèmes géométriques mettant en oeuvre des paraboles | 6-7-8-9 | | | |

## 13.1 Exercices

1. Dessiner les paraboles suivantes après en avoir déterminé les caractéristiques :

   (a) $y = x^2 - 3x + 2$
   (b) $y = -x^2 + 2x + 8$
   (c) $y = 2x^2 + 4x + 2$
   (d) $y = -x^2 + 2x - 1$
   (e) $y = -2x^2 - 1$
   (f) $y = x^2 - 9$

2. Déterminer $m$ et $p$ pour que la parabole d'équation $y = -x^2 + mx + p$ admette un maximum en $x = 1$ et un zéro en $x = -2$.

3. Soit la famille de parabole $y = mx^2 + 2x + m - 2$. Chaque cas étant pris séparément, déterminer $m$ pour que la parabole :

   (a) passe par le point (-1,4) ;
   (b) admette la droite $d \equiv 2x + 3 = 0$ comme axe de symétrie ;
   (c) ne coupe pas l'axe $Ox$
   (d) ait son sommet sur la droite $d' \equiv y = x - 3$
   (e) ait son sommet à gauche de l'axe $Oy$.

4. Déterminer algébriquement et graphiquement les points d'intersection de $P \equiv y = x^2 - 9$ et $d \equiv y - 2x + 1 = 0$

5. Construire les paraboles $y = -x^2 + 2x$ et $y = 2x^2 + 7x + 2$

   (a) Déterminer les points d'intersection des deux courbes ;
   (b) Résoudre algébriquement et graphiquement l'inéquation $-x^2 + 2x < 0$
   (c) Résoudre algébriquement et graphiquement l'inéquation $-x^2 + 2x \geq 2x^2 + 7x + 2$

## 13.2 Solutions

1. (a)

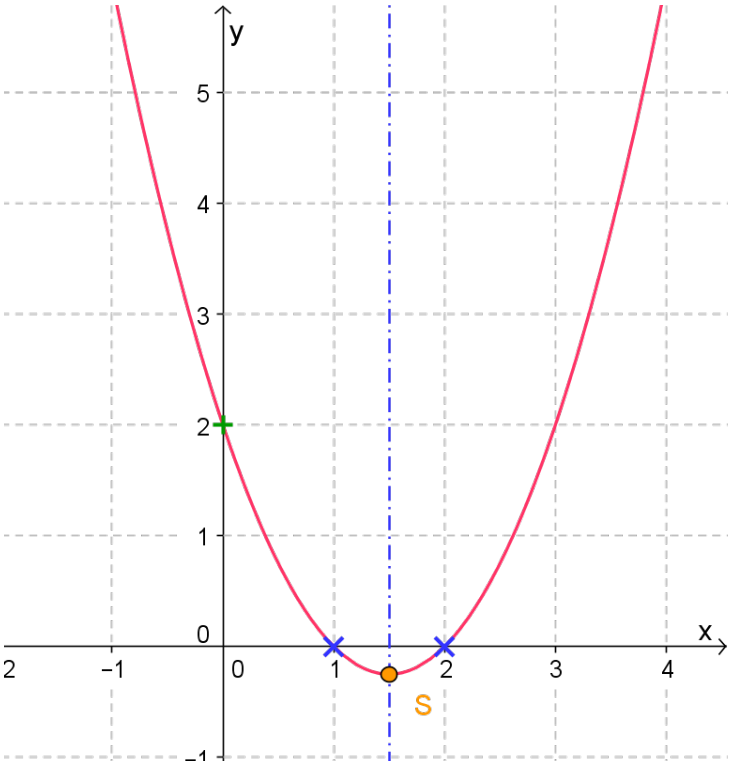
$S : \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$AS \equiv x = \frac{3}{2}$

$\cap Ox : (1, 0)$ et $(2, 0)$

$\cap Oy : (0, 2)$

$a > 0$ donc $S =$minimum




(b)

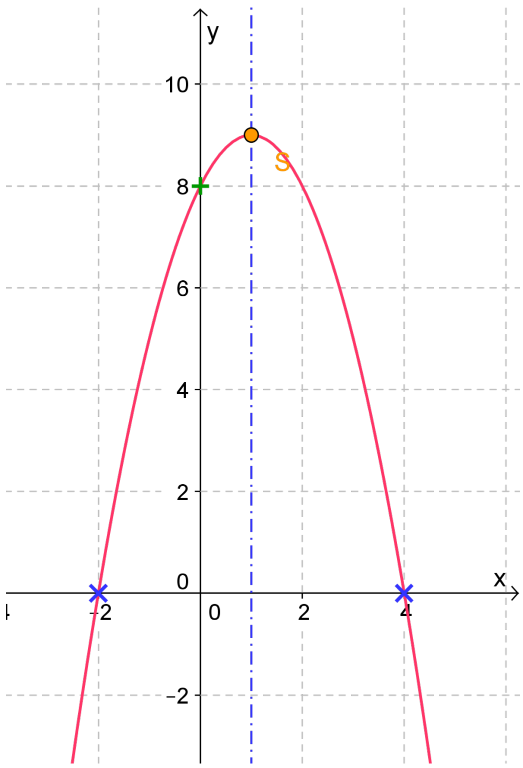
$S : (1, 9)$

$AS \equiv x = 1$

$\cap Ox : (-2, 0)$ et $(4, 0)$

$\cap Oy : (0, 8)$

$a < 0$ donc $S =$maximum



(c)

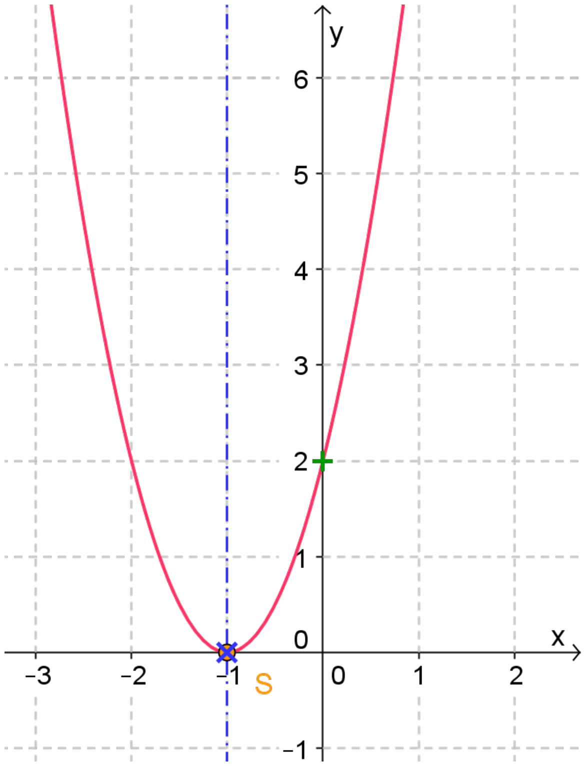
$S : (-1, 0)$

$AS \equiv x = -1$

$\cap Ox : (-1, 0)$

$\cap Oy : (0, 2)$

$a > 0$ donc $S =$minimum




(d)

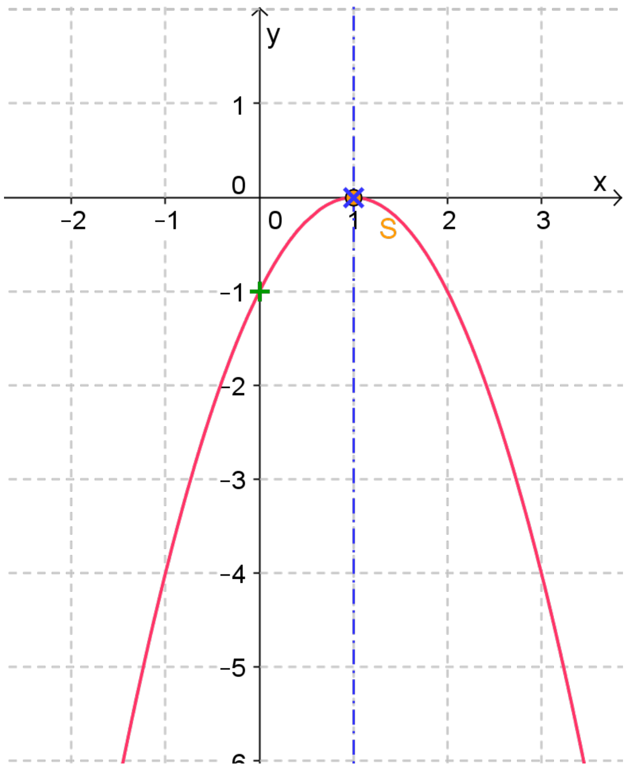
$S : (1, 0)$

$AS \equiv x = 1$

$\cap Ox : (1, 0)$

$\cap Oy : (0, -1)$

$a < 0$ donc $S =$maximum



(e)

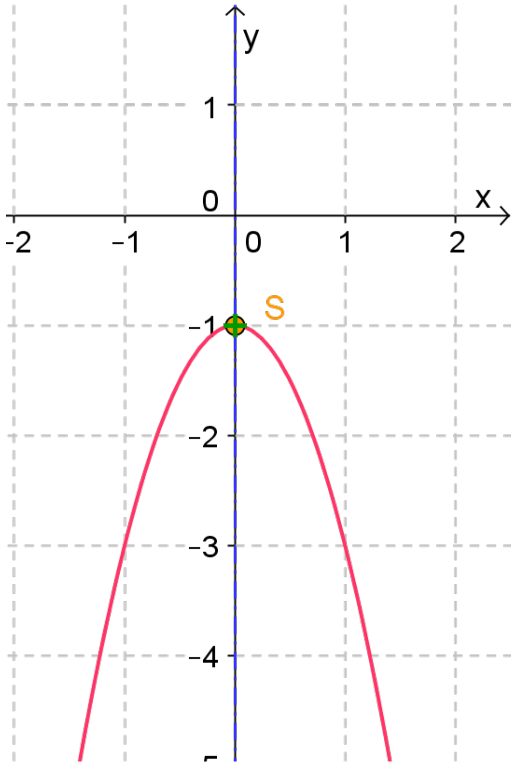
$S : (0, -1)$

$AS \equiv x = 0$

$\cap Ox$ : aucune

$\cap Oy : (0, -1)$

$a < 0$ donc $S$ =maximum




(f)

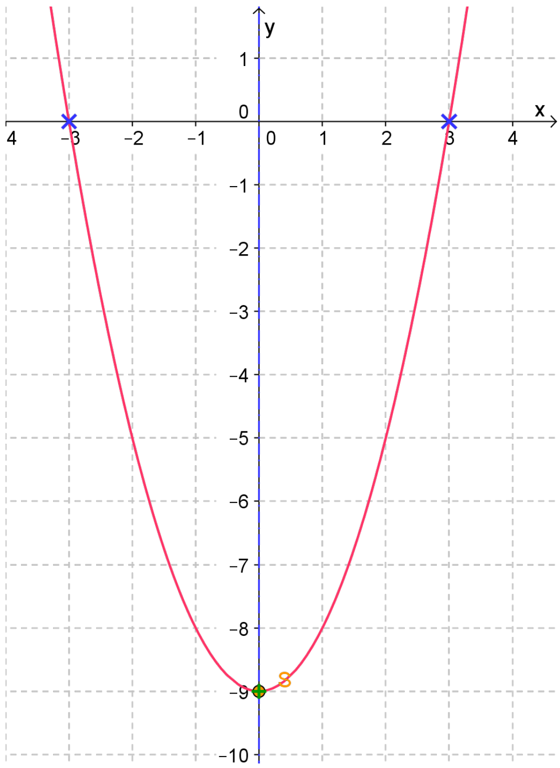
$S : (0, -9)$

$AS \equiv x = 0$

$\cap Ox : (-3, 0)$ et $(3, 0)$

$\cap Oy : (0, -9)$

$a > 0$ donc $S$ =minimum



2. $\mathcal{P} \equiv y = -x^2 + 2x + 8$
3. (a) $m = 4$
   (b) $m = \dfrac{2}{3}$
   (c) $m \in \left]-\infty, -1-\sqrt{2}\right[ \cup \left[-1+\sqrt{2}, +\infty\right[$
   (d) $m = -1$
   (e) $m > 0$
4. $A(-2, -5)$ et $B(4, 7)$
5. (a) $A\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{16}{9}\right)$ et $B(-1, -3)$
   (b) $x \in \left]-\infty, 0\right[ \cup \left]2, +\infty\right[$
   (c) $x \in \left[-1, -\dfrac{2}{3}\right]$

# Septième partie

# 4UAA6 - Géométrie analytique plane

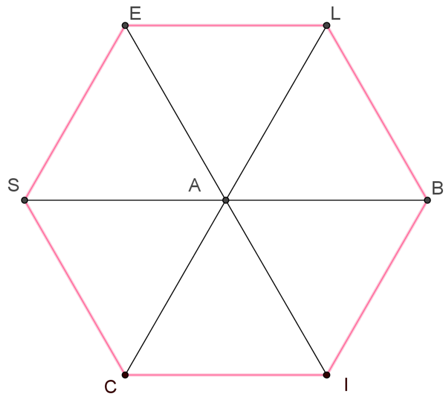
# 14

## Calcul vectoriel dans le plan

| | | | *Degré d'acquisition* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :** | | | | | |
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Trouver des représentants de vecteurs sur des configurations géométriques | 1 | | | |
| 2 | Trouver des représentants de la somme, la différence, la combinaison linéaire de plusieurs vecteurs sur des configurations géométriques | 1-2-3-4-5-6 | | | |
| 3 | Déterminer graphiquement la position d'un point répondant à une égalité vectorielle | 7 | | | |

## 14.1 Exercices

1. La figure suivante représente un hexagone régulier.



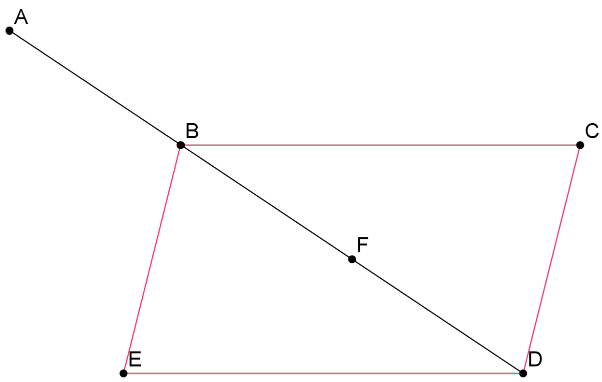

Déterminer un représentant des vecteurs suivants :

(a) $\overrightarrow{AB}$
(b) $\overrightarrow{EA}$
(c) $\overrightarrow{IB}$
(d) $2\overrightarrow{SC}$
(e) $2\overrightarrow{CI}$

Compléter ensuite les relations suivantes en n'utilisant que les lettres du dessin :

(a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$
(b) $\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CI}$
(c) $\overrightarrow{ES} + \overrightarrow{LB}$
(d) $\overrightarrow{ES} + \overrightarrow{BI}$
(e) $\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{LC}$
(f) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE}$
(g) $\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{LE}$
(h) $\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{CI}$
(i) $\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{CI}$

2. La figure suivante représente un parallélogramme. Le point $A$ est le symétrique de $F$ par rapport à $B$.



Compléter les relations suivantes :

(a) $\overrightarrow{BD} = .....\overrightarrow{DA}$

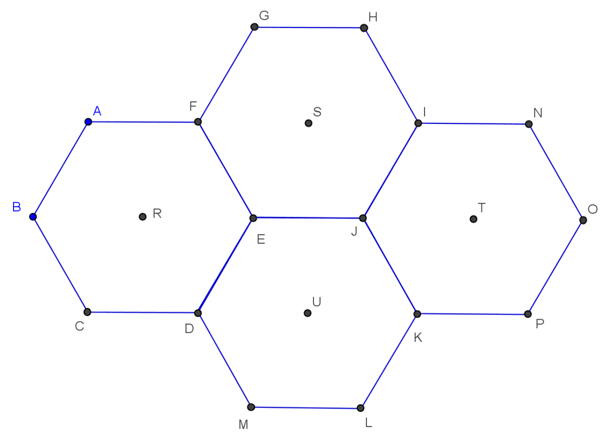
(b) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE} - ....$

(c) $\overrightarrow{FA} = .... + 2\overrightarrow{DF}$

(d) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DF} + ....$

(e) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} = ....$

3. Voici quatre hexagones réguliers, les points $R$, $S$, $T$ et $U$ étant le centre de chacun d'eux.




(a) Les égalités suivantes sont-elles vraies ? Justifier !

i. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EH}$ : Vrai - Faux

ii. $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{LM}$ : Vrai - Faux

iii. $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$ : Vrai - Faux

iv. $\overrightarrow{OJ} = 2\overrightarrow{FA}$ : Vrai - Faux

v. $\overrightarrow{JB} = 3\overrightarrow{KP}$ : Vrai - Faux

vi. $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ : Vrai - Faux

vii. $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{ER}$ : Vrai - Faux

viii. $\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{EJ} + 2\overrightarrow{KT}$ : Vrai - Faux

ix. $\overrightarrow{UK} = -\overrightarrow{AF}$ : Vrai - Faux

x. $\overrightarrow{DU} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AN}$ : Vrai - Faux

(b) Compléter les pointillés pour que les égalités suivantes soient vraies.

i. $\overrightarrow{BJ} = ..........\overrightarrow{AF}$

ii. $\overrightarrow{EJ} = ..........\overrightarrow{EO}$

iii. $\overrightarrow{TJ} = ..........\overrightarrow{BO}$

iv. $\overrightarrow{ML} = ..........\overrightarrow{HG}$

v. $\overrightarrow{DK} = ..........\overrightarrow{NI}$

vi. $\overrightarrow{DK} = ..........\overrightarrow{FH} + ..........\overrightarrow{FE}$

vii. $\overrightarrow{FK} = ..........\overrightarrow{RT} + ..........\overrightarrow{GS}$

viii. $\overrightarrow{JT} = ..........\overrightarrow{CD} + ..........\overrightarrow{KO}$

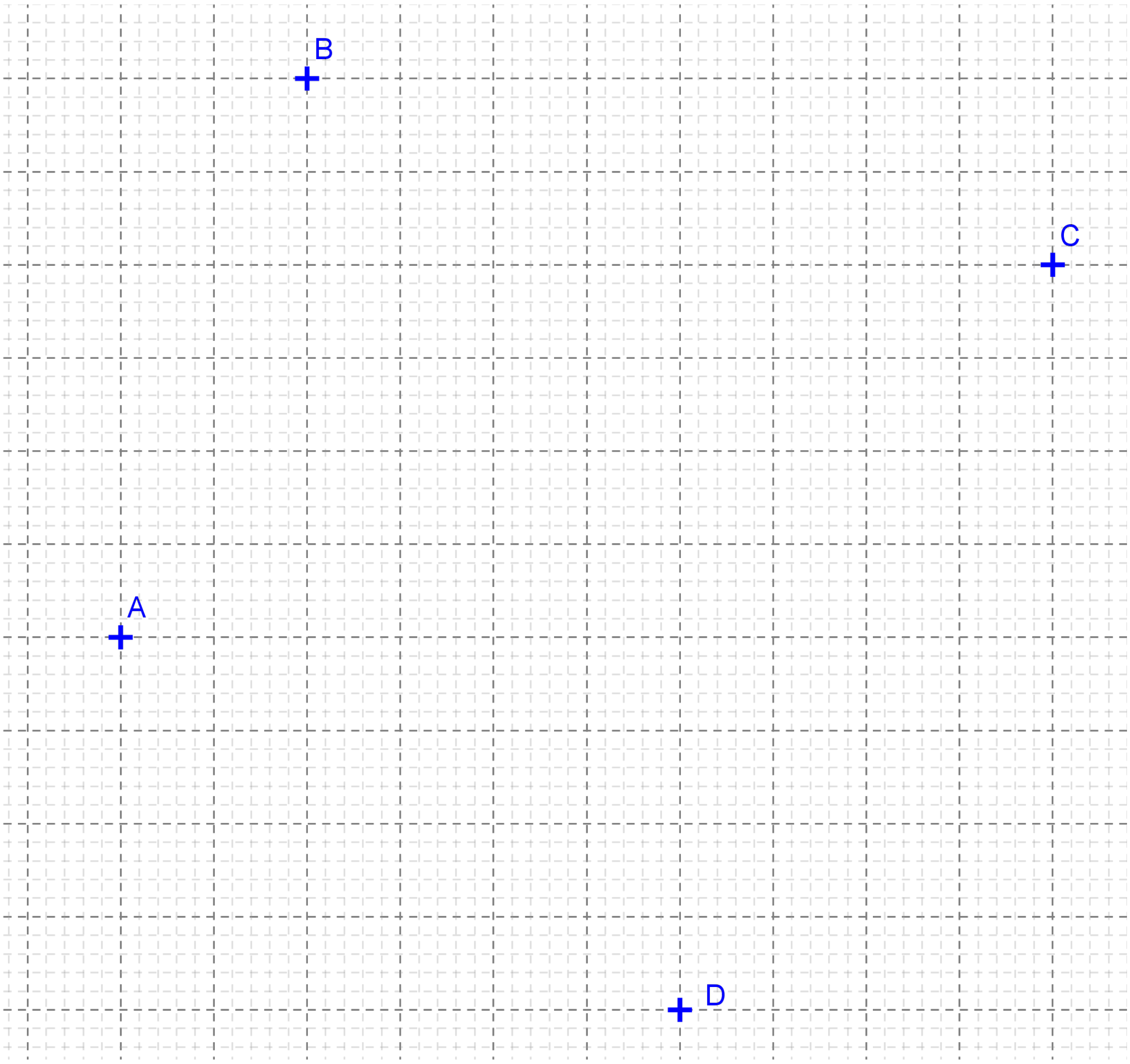
ix. $\overrightarrow{NL} = ..........\overrightarrow{KP} + ..........\overrightarrow{DE}$

x. $\overrightarrow{BF} = ..........\overrightarrow{AN} + ..........\overrightarrow{IU}$

4. Soient deux points $A$ et $B$ distants de 3cm. Déterminer précisément, et en justifiant les constructions, les vecteurs

(a) $2\overrightarrow{AB}$ (b) $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (c) $-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

5. On donne les points $A$, $B$, $C$ et $D$ comme indiqués sur la figure suivante.




Construireun représentant des vecteurs suivants :

(a) $2\overrightarrow{AC}$

(b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

(c) $\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

(d) $\frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$

(e) $\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA}$

(f) $\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

(g) $2(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC}$

6. Sur la droite $AB$, déterminer un point $X$ tel que

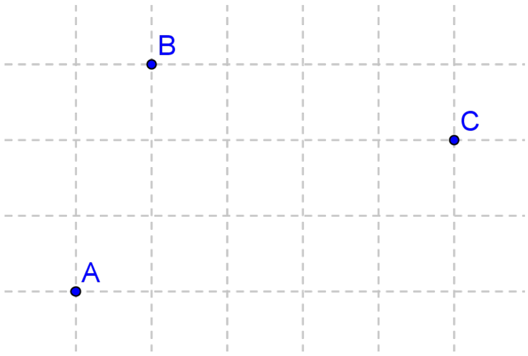
(a) $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{AB}$

(b) $\overrightarrow{AX} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(c) $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB}$

(d) $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BX}$

7. Soient trois points non alignés $A$, $B$ et $C$. Déterminer graphiquement le point $X$ tel que :




(a) $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

(b) $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{BX} + \overrightarrow{BC}$

(c) $2\overrightarrow{AX} = 3\overrightarrow{BX}$

(d) $\overrightarrow{AX} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BX} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CX}$

## 14.2 Solutions

1.

(a) $\overrightarrow{AB}= \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{CI}$

(b) $\overrightarrow{EA}= \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{SC}$

(c) $\overrightarrow{IB}= \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{SE}$

(d) $2\overrightarrow{SC}= \overrightarrow{EI}$

(e) $2\overrightarrow{CI}= \overrightarrow{SB}$

(a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}= \overrightarrow{AI}$

(b) $\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CI}= \overrightarrow{CA}$

(c) $\overrightarrow{ES} + \overrightarrow{LB}= \overrightarrow{EC}$

(d) $\overrightarrow{ES} + \overrightarrow{BI}= \overrightarrow{LC}$

(e) $\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{LC}= \overrightarrow{LS}$

(f) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE}= \overrightarrow{0}$

(g) $\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{LE}= \overrightarrow{0}$

(h) $\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{CI}= \overrightarrow{BS}$

(i) $\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{CI}= \overrightarrow{ES}$

2.

(a) $\overrightarrow{BD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$

(b) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DE}$

(c) $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{0} + 2\overrightarrow{DF}$

(d) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CD}$

(e) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

3.

(a)

i. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EH}$ : ~~Vrai~~ - Faux

ii. $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{LM}$ : ~~Vrai~~ - Faux

iii. $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$ : Vrai - ~~Faux~~

iv. $\overrightarrow{OJ} = 2\overrightarrow{FA}$ : Vrai - ~~Faux~~

v. $\overrightarrow{JB} = 3\overrightarrow{KP}$ : ~~Vrai~~ - Faux

vi. $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ : Vrai - ~~Faux~~

vii. $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{ER}$ : Vrai - ~~Faux~~

viii. $\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{EJ} + 2\overrightarrow{KT}$ : Vrai - ~~Faux~~

ix. $\overrightarrow{UK} = -\overrightarrow{AF}$ : ~~Vrai~~ - Faux

x. $\overrightarrow{DU} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AN}$ : Vrai - ~~Faux~~

(b)

i. $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{AF}$

ii. $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EO}$

iii. $\overrightarrow{TJ} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BO}$

iv. $\overrightarrow{ML} = -\overrightarrow{HG}$

v. $\overrightarrow{DK} = -2\overrightarrow{NI}$

vi. $\overrightarrow{DK} = 1\overrightarrow{FH} + 1\overrightarrow{FE}$

vii. $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{RT} + 2\overrightarrow{GS}$

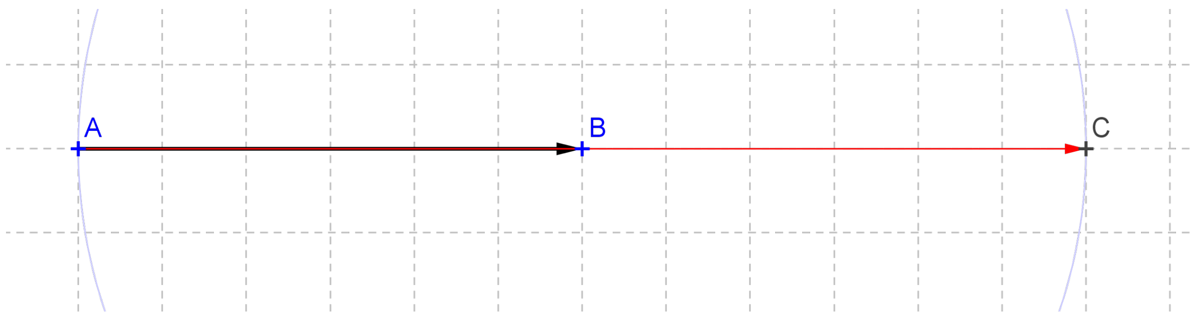
viii. $\overrightarrow{JT} = 1\overrightarrow{CD} + 0\overrightarrow{KO}$

ix. $\overrightarrow{NL} = 0\overrightarrow{KP} + -3\overrightarrow{DE}$

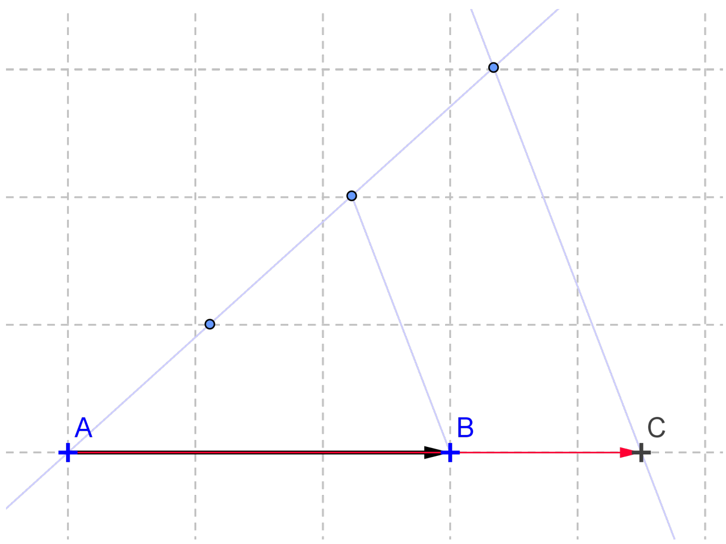
x. $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AN} + -\frac{1}{2}\overrightarrow{IU}$

4.

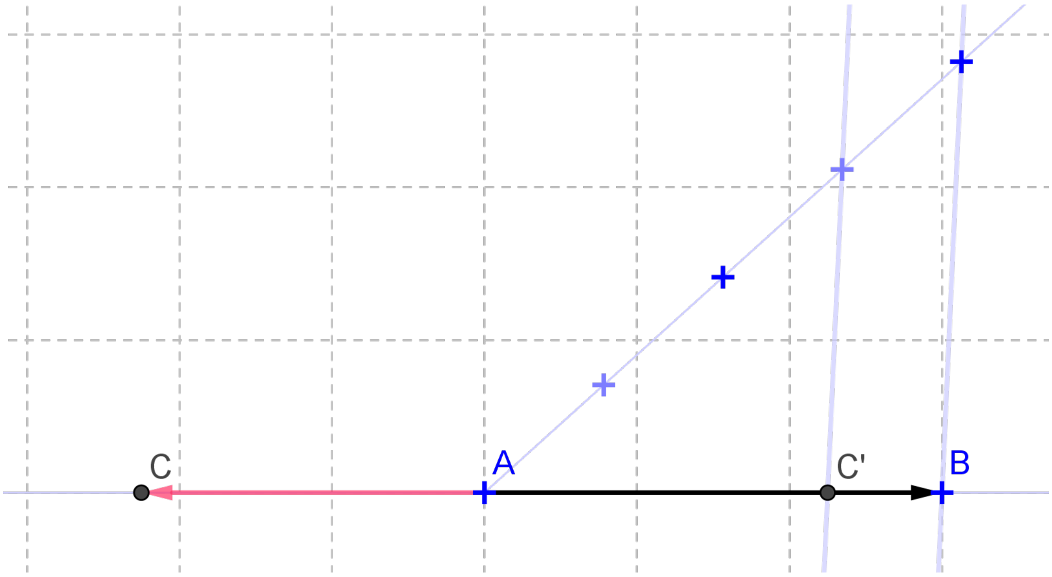
(a)




(b)

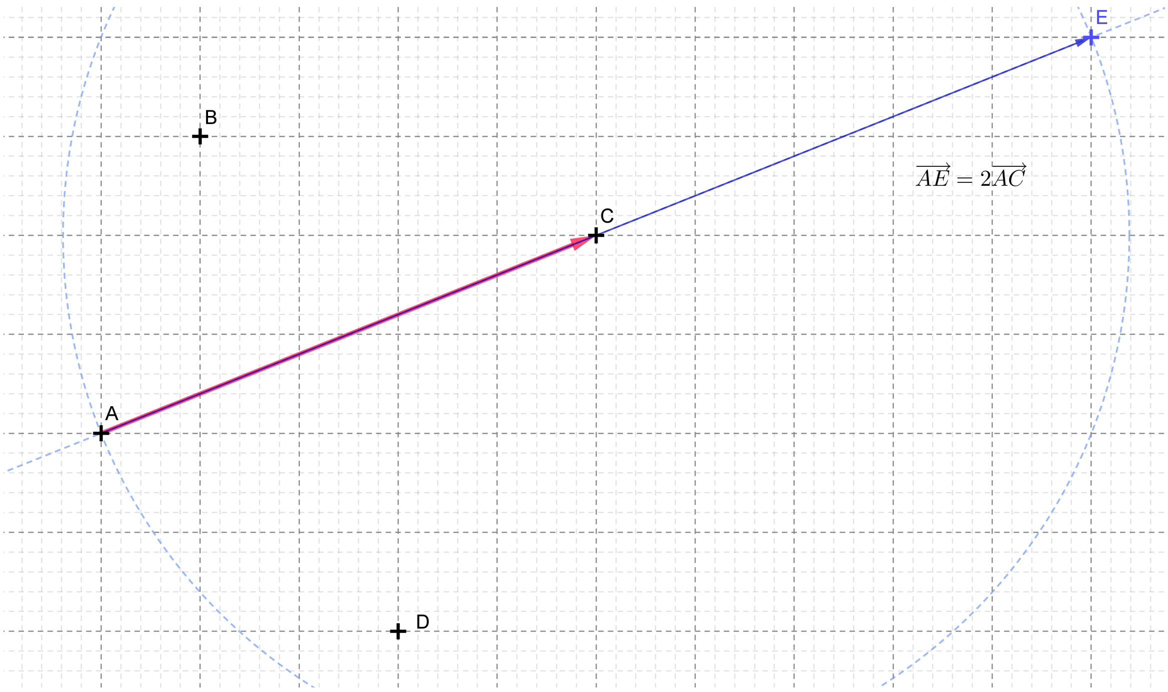


(c)

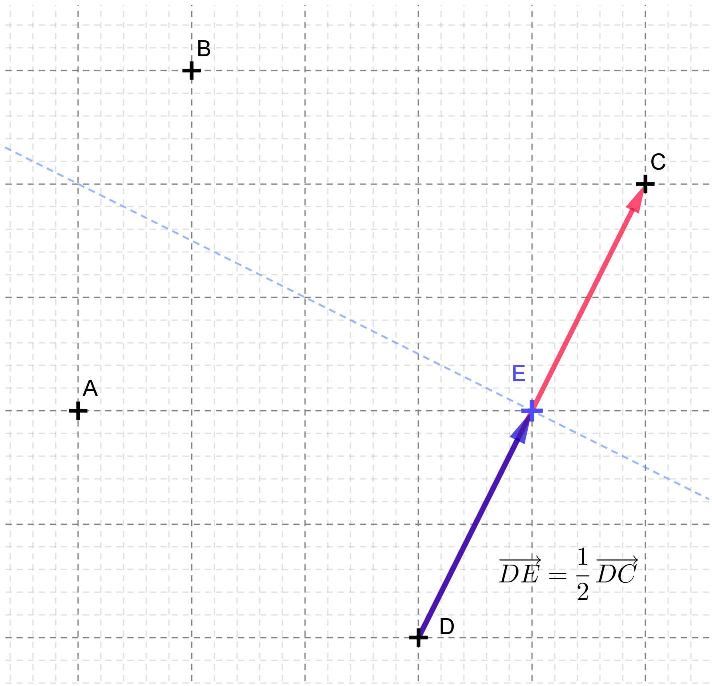



5. Dans les solutions, les vecteurs donnés dans les énoncés sont représentés en rouge. Les constructions sont représentées en bleu clair, les vecteurs supplémentaires construits le sont dans une couleur spécifique (bleu, orange, violet, ...). Lorsque les étapes de construction deviennent nombreuses, elles sont numérotées.

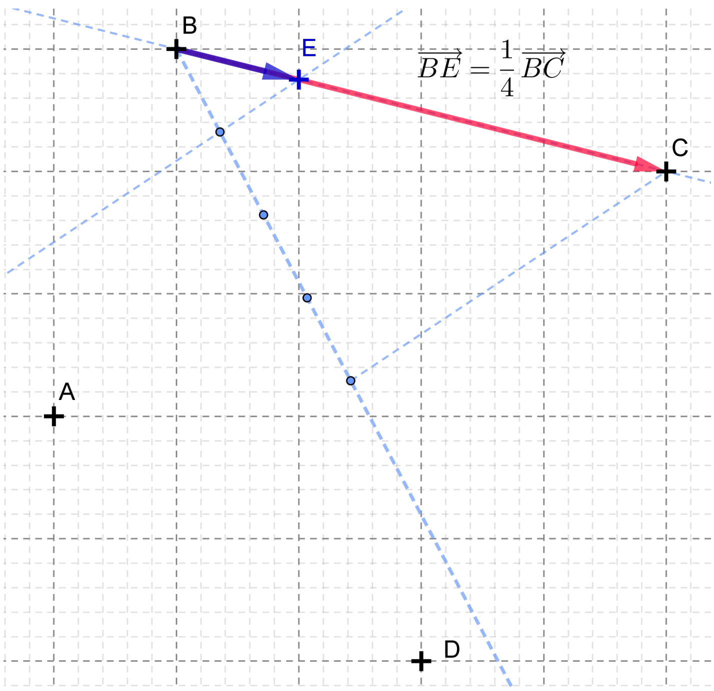
(a)



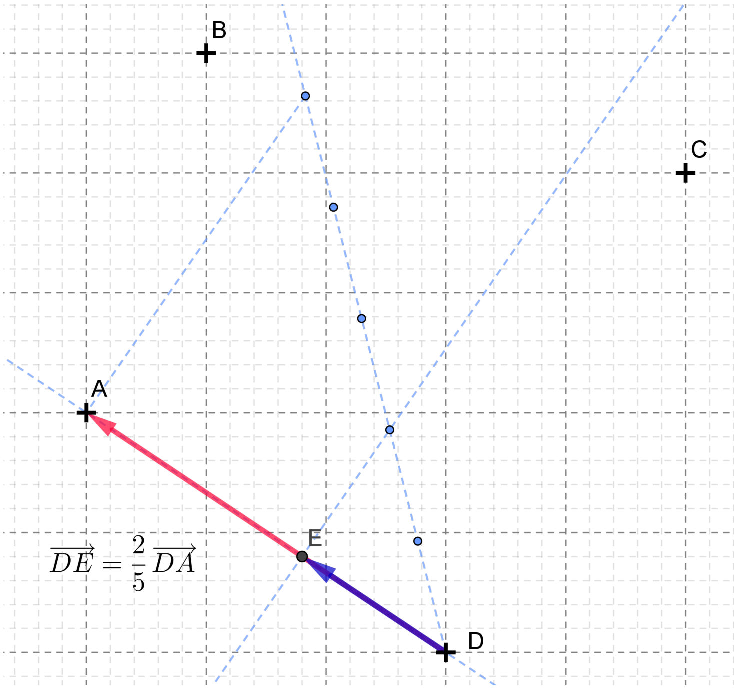
(b)


B
C
E
A
$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$
D

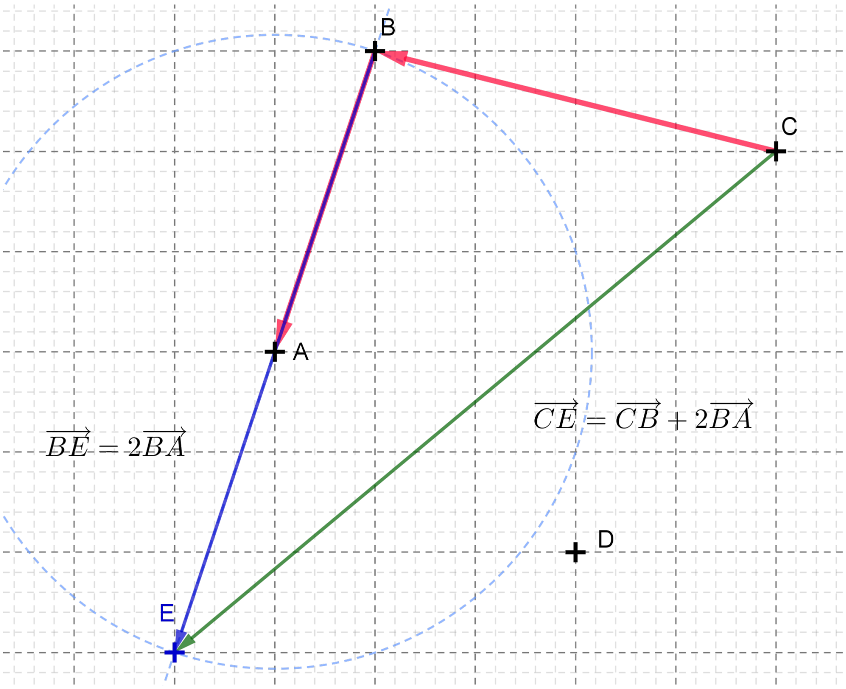
(c)


B
E
$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
C
A
D

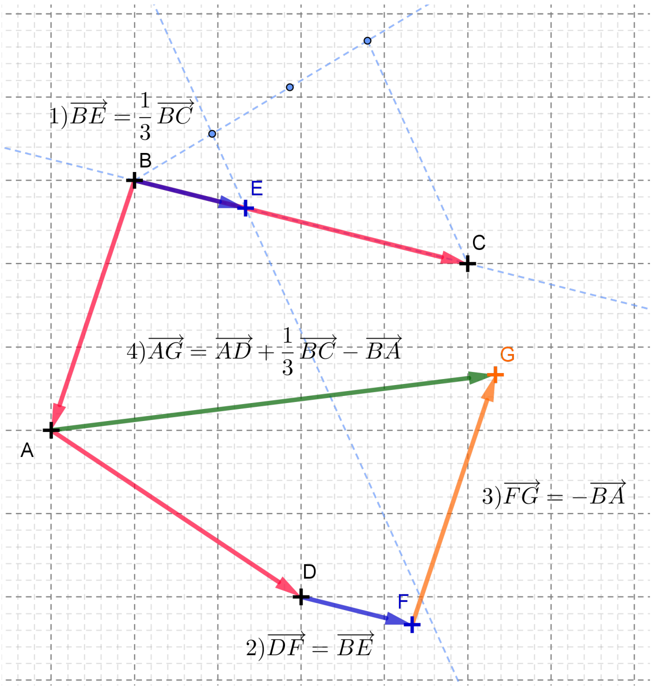
(d)


B
C
A
E
D
$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$

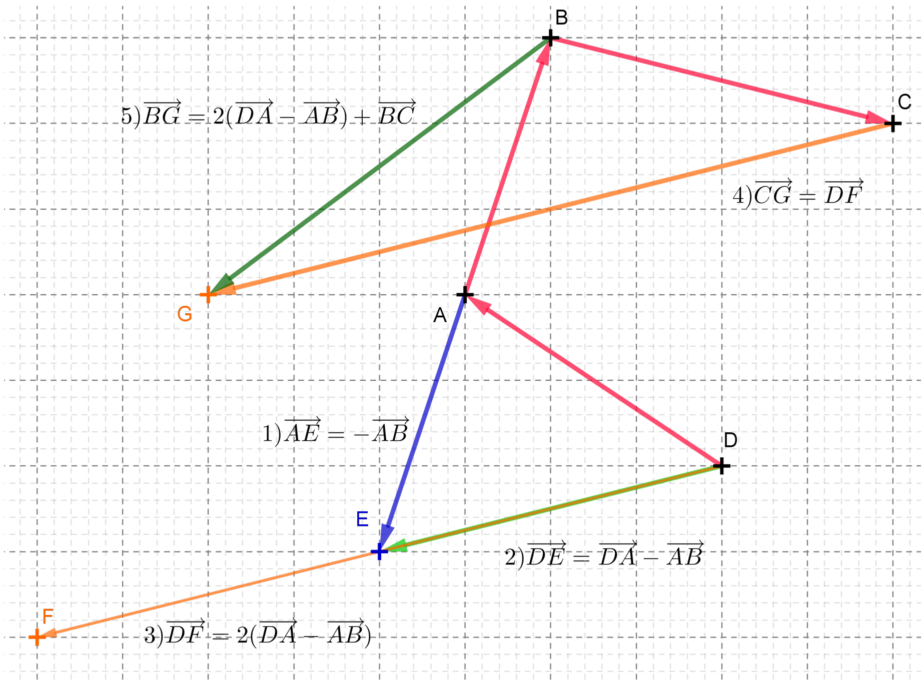
(e)


B
C
A
$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BA}$
D
E

(f)

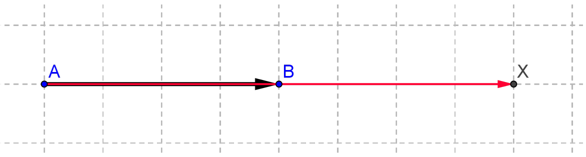

1)$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
B
E
C
4)$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$
G
A
3)$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{BA}$
D
F
2)$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$

(g)

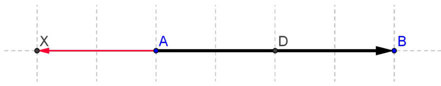

B
5)$\overrightarrow{BG} = 2(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC}$
C
4)$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DF}$
G
A
1)$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$
D
E
2)$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$
F
3)$\overrightarrow{DF} = 2(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB})$

6.

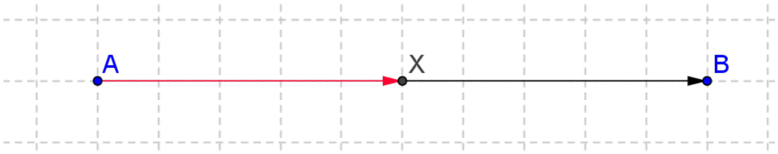
(a)



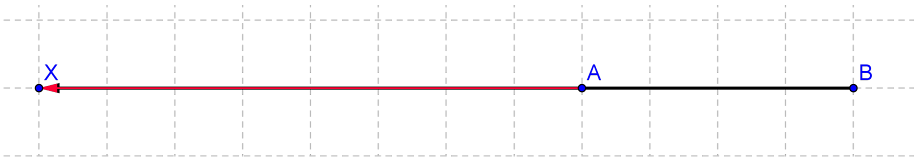

(b)




(c)

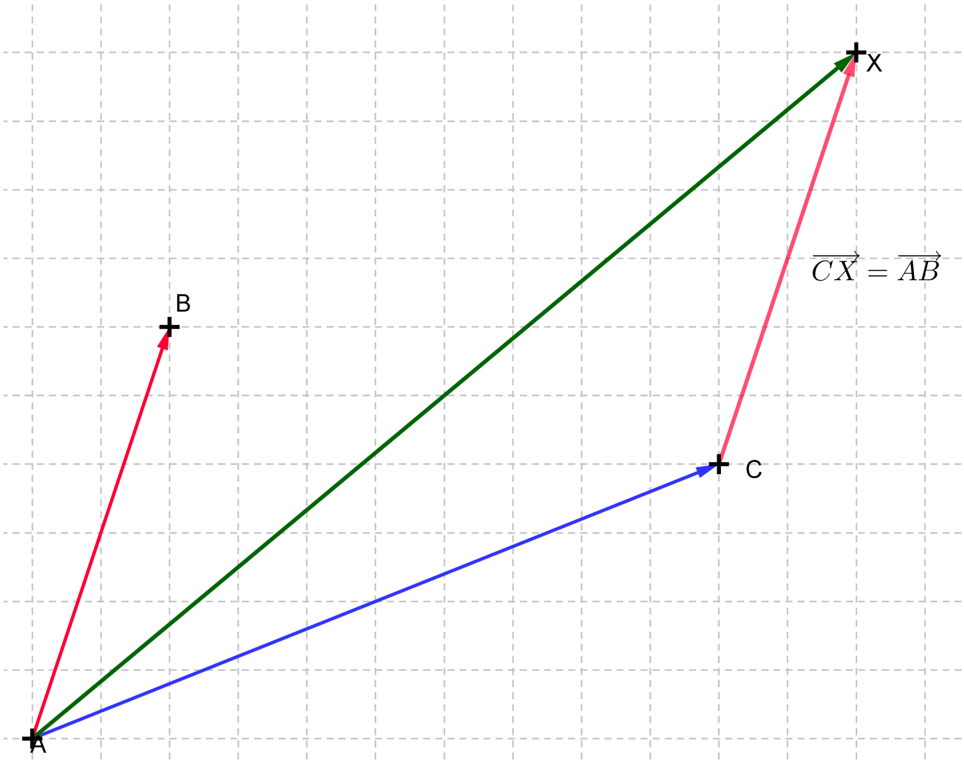



(d)

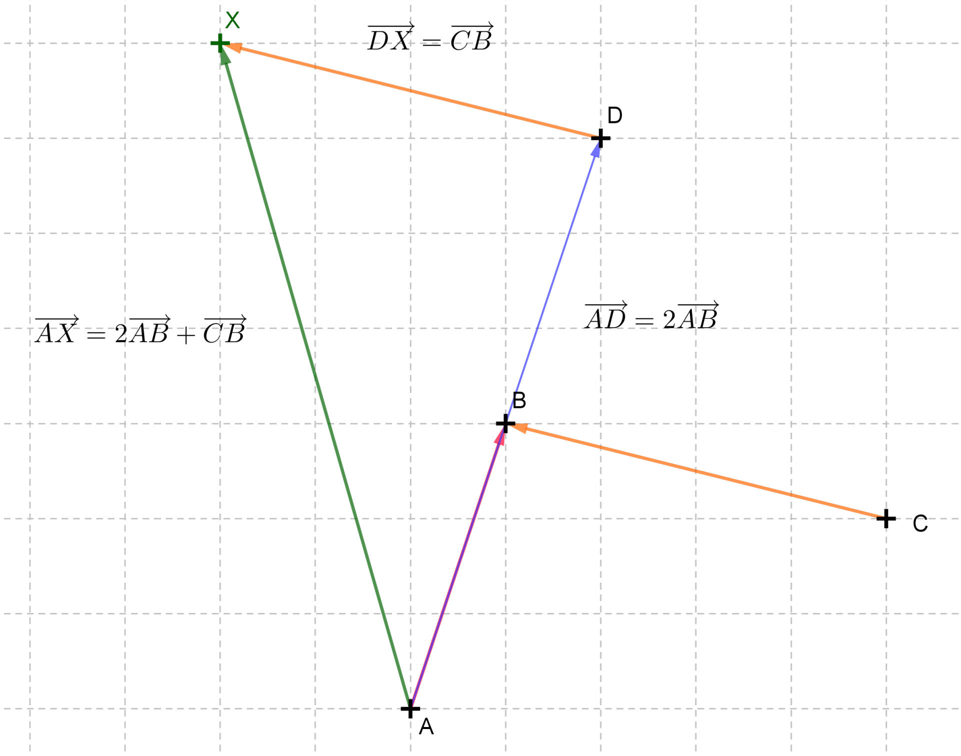


7.

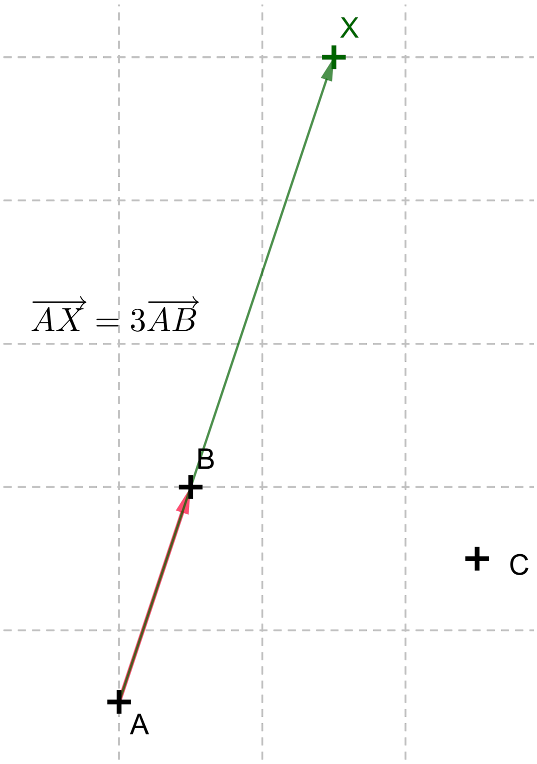
(a)


X
B
$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{AB}$
C
A

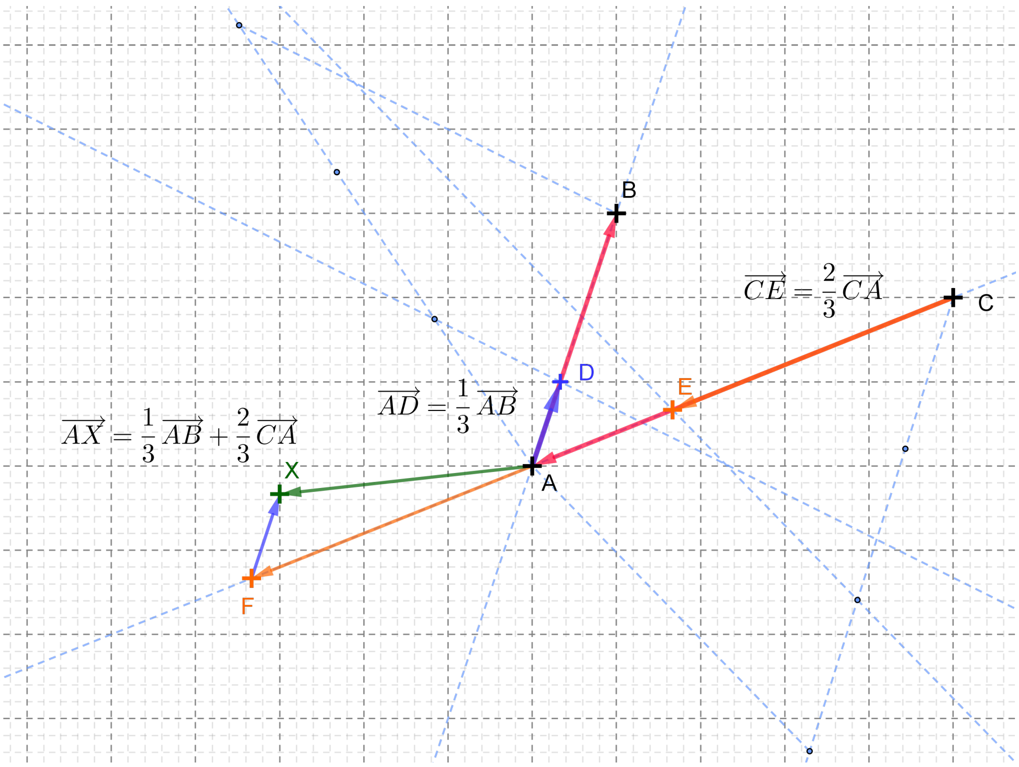
(b)


X
$\overrightarrow{DX} = \overrightarrow{CB}$
D
$\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$
B
C
A

(c)


X
$\overrightarrow{AX} = 3\overrightarrow{AB}$
B
C
A

(d)


B
$\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$
C
D
E
$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$
X
A
F

# 15

## Vecteurs et composantes

### A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | *Degré d'acquisition* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Calculer les composantes de vecteurs | 1 | | | |
| 2 | Déterminer les coordonnées de points répondant à des contraintes vectorielles | 1-3-4-5 | | | |
| 3 | Démontrer le parallélisme de deux vecteurs ou l'alignement de trois points | 2-3-4-5 | | | |

## 15.1 Exercices

1. Dans le plan cartésien, on donne les points $A\left(-4,\frac{1}{2}\right)$, $B\left(3,-\frac{1}{3}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et $D\left(-3,-2\right)$

   (a) Calculer les composantes de $\overrightarrow{AC}$, $-\overrightarrow{BC}$, $2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

   (b) Déterminer les coordonnées de $X$ et $Y$ tels que

      i. $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

      ii. $\overrightarrow{CY}=-2\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

   (c) Déterminer les coordonnées du point $P$ pour que $ACDP$ soit un parallélogramme

   (d) Déterminer les coordonnées du point $Q$ pour que $DCBQ$ soit un parallélogramme

   (e) Déterminer les coordonnées du point $M$ milieu de $[AB]$

2. Déterminer la valeur de $a$ pour que $\vec{x}$ soit parallèle à $\vec{y}$ si

   (a) $\vec{x}\begin{pmatrix}2\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{y}\begin{pmatrix}10\\30\end{pmatrix}$

   (b) $\vec{x}\begin{pmatrix}2\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{y}\begin{pmatrix}a\\4\end{pmatrix}$

   (c) $\vec{x}\begin{pmatrix}a\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{y}\begin{pmatrix}a\\7\end{pmatrix}$

3. On donne $A(10,3)$ et $B(-1,7)$. Déterminer les coordonnées de $C$ pour que $6\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$

4. Soient $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan et les points $A(2,3)$, $B(0,-3)$ et $C(-3,0)$

   (a) Soit $E$ le point vérifiant $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Déterminer les coordonnées du point $E$ ;

   (b) Soit $F$ le point vérifiant $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OF}$. Déterminer les coordonnées du point $F$ ;

   (c) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ ;

   (d) En déduire que les points $C$, $E$, $F$ sont alignés

5. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$, un repère orthonormal du plan . Soient les trois points $A(1,-1)$, $B(-2,0)$ , $C(-3,3)$.

   (a) Soit $D$ le symétrique de $B$ par rapport à $A$. Donner les coordonnées de $D$ ;

   (b) Soit le point $E(-4,6)$. Montrer que les points $B$, $C$ et $E$ sont alignées puis montrer que $C$ est le milieu de $[BE]$ .

   (c) Montrer que $AC$ et $ED$ sont parallèles.

   (d) Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle $ABC$.

## 15.2 Solutions

1. (a) – $\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ;
   – $-\overrightarrow{BC} : \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ;
   – $2\overrightarrow{BD} : \begin{pmatrix} -12 \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$ ;
   – $\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DB} : \begin{pmatrix} -11 \\ -\frac{35}{6} \end{pmatrix}$ ;
   – $\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} : \begin{pmatrix} -\frac{17}{6} \\ \frac{19}{12} \end{pmatrix}$ ;

   (b) i. $X : \left(-\frac{17}{6}, \frac{2}{9}\right)$
   ii. $Y : \left(\frac{205}{24}, \frac{53}{12}\right)$

   (c) $P : \left(-\frac{13}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

   (d) $Q : \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{3}\right)$

   (e) $M : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$

2. (a) $a = 6$
   (b) $a = \pm 2\sqrt{2}$
   (c) $a = 0$

3. $C : \left(\frac{49}{6}, \frac{11}{3}\right)$

4. (a) $E : (-1, -6)$ ;
   (b) $F : (0, -9)$ ;
   (c) $\overrightarrow{CE} : \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CF} : \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ ;
   (d) Les composantes sont proportionnelles

5. (a) $D : (4, -2)$ ;
   (b) $\overrightarrow{BC} : \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE} : \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ;
   (c) $\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED} : \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$ ;
   (d) $G : \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

# 16 Les droites

## A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

| | | | *Degré d'acquisition* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Identifier les paramètres d'une droites (pente et ordonnée à l'origine) sur base du graphe ou de l'équation de la droite | 1-2 | | | |
| 2 | Vérifier si un point appartient à une droite | 3 | | | |
| 3 | Ecrire des équations de droites dont on connait deux caractéristiques | 4-6-7 | | | |
| 4 | Trouver les coordonnées des points d'intersection de deux droites | 5 | | | |
| 5 | Ecrire l'équation des droites particulières des triangles (médiane, médiatrice, hauteur, droite d'Euler) | 8-9 | | | |
| 6 | Calculer la distance entre deux points ou entre un point et une droite | 11-12-13-14 | | | |
| 7 | Résoudre des problèmes mettant en oeuvre des droites | 10-15-16-17 | | | |

## 16.1 Exercices

### 16.1.1 Exercices de base

1. Etablir le graphe des droites suivantes **sans construire** de tableaux de valeurs. On précisera **clairement** l'ordonnée à l'origine et la pente sur chaque graphe.

   (a) $d \equiv y = 2x + 1$

   (b) $d \equiv y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3}$

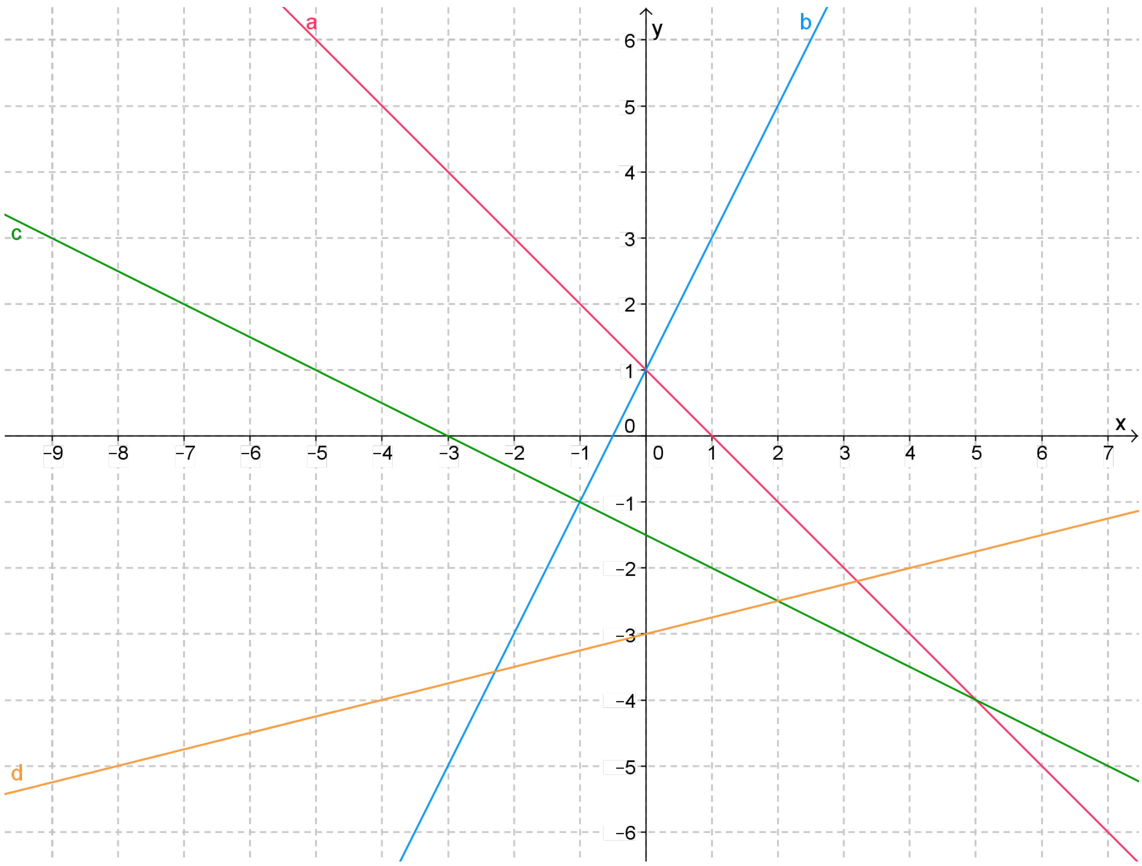
   (c) $d \equiv x - 2y + 1 = 0$

   (d) $d \equiv 3x + 2y = 2$

   (e) $d \equiv x - 4 = 0$

   (f) $d \equiv 2 - 3y = 0$

2. Pour chacune des droites suivantes, écrire son équation implicite et explicite en se basant **uniquement** sur la **mesure** de la pente et de l'ordonnée à l'origine.




3. Vérifier si les points suivants appartiennent aux droites

$$\begin{aligned} &d \equiv y = x - 3 \\ &d' \equiv x + 2y = 2 \\ &d'' \equiv x = -3y + 5 \end{aligned}$$

   (a) $A(2, -1)$

   (b) $B(0, 3)$

   (c) $C\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

   (d) $D\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

4. Ecrire l'équation des droites suivantes. Dans chaque cas représenter la droite et préciser **clairement** l'ordonnée à l'origine et la pente sur chaque graphe.
   (a) $a$ passant par $A(1,2)$ et $B(-2,5)$ ;
   (b) $b$ passant par $A(1,2)$ et $B(-2,-3)$ ;
   (c) $c$ passant par $A(1,2)$ et $B(-3,2)$ ;
   (d) $d$ passant par $A(1,2)$ et $B(1,-3)$ ;
   (e) $e$ passant par $A(1,2)$ et de pente -2 ;
   (f) $f$ passant par $A(-2,5)$ et parallèle à la droite $d' \equiv y = -2x + 3$
   (g) $g$ passant par $A(2,-1)$ et parallèle à la droite $d' \equiv x - 2y + 1 = 0$
   (h) $h$ passant par $A(1,3)$ et perpendiculaire à la droite $d' \equiv y = 2x + 3$
   (i) $i$ passant par $A(2,-4)$ et perpendiculaire à la droite $d' \equiv x - 2y + 1 = 0$
   (j) $j$ passant par $A(3,3)$ et faisant un angle de 30° avec l'axe $Ox$
   (k) $k$ passant par $A(-2,6)$ et faisant un angle de 30° avec l'axe $Oy$
   (l) $l$ passant par $A(4,-5)$ et parallèle à la droite passant par $B(-1,-1)$ et $C(3,2)$
5. Ecrire l'équation de la médiatrice du segment défini par $A(7,4)$ et $B(-1,-2)$
6. Soient les trois sommets d'un triangle $ABC$ : $A(-5,6)$, $B(-1,-4)$ et $C(3,2)$
   (a) Ecrire les équations des médianes
   (b) Ecrire les coordonnées du centre de gravité du triangle
   (c) Ecrire l'équation des hauteurs
   (d) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre
   (e) Ecrire l'équation des médiatrices du triangle
   (f) Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle
7. Calculer la distance de
   (a) $A(1,1)$ à $B(5,3)$
   (b) $A(-1,-5)$ à $B(2,-3)$
8. Calculer la distance du point $A(-2,-3)$ à la droite $d \equiv 8x + 15y - 24 = 0$

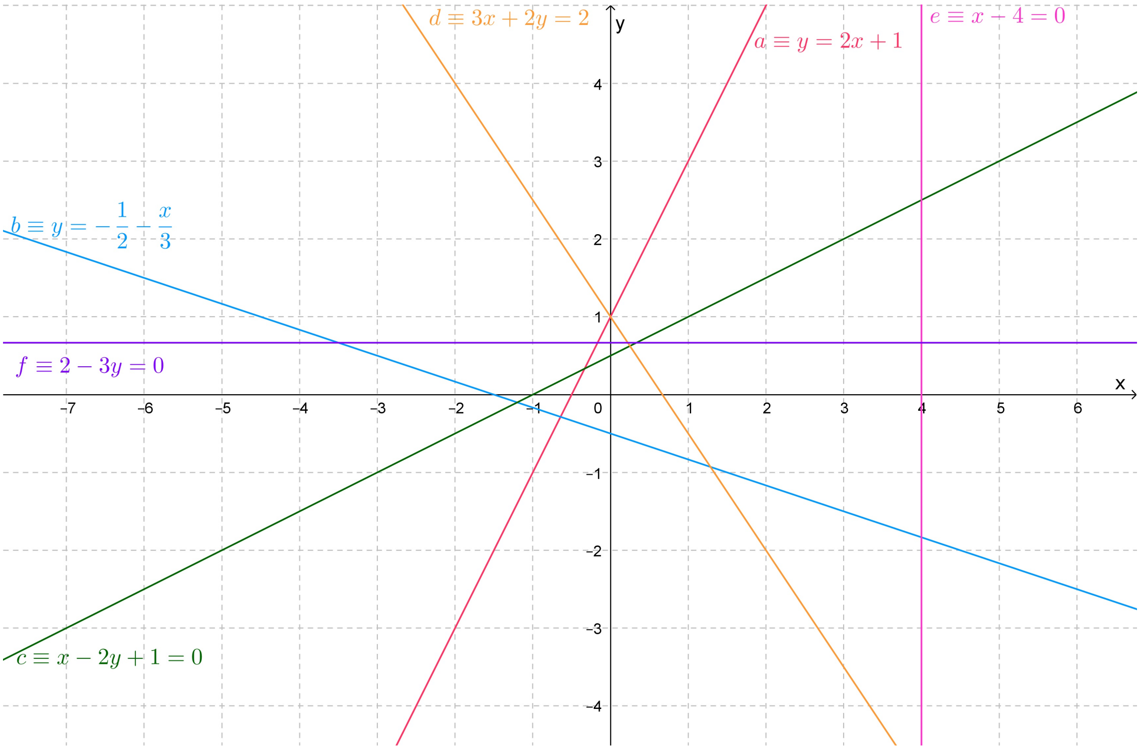
### 16.1.2 Pour aller plus loin...

1. Trouver la valeur de $k$ tel que la droite $d \equiv 2x - ky + 6 = 0$ soit perpendiculaire à la droite passant par les points $A(2,3)$ et $B(-2,1)$.
2. Dans un triangle, on appelle droite d'Euler la droite passant par le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit au triangle.
   (a) Déterminer le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit au triangle défini par les sommets $A(1,1)$, $B(-2,3)$ et $C(1,-2)$
   (b) Vérifier que ces trois points sont alignés et écrire l'équation de la droite d'Euler correspondante.
3. On considère un point $P(-2,1)$ et une droite $d \equiv 4x - 2y + 1 = 0$. On mène par $P$ la parallèle $d_1$ et la perpendiculaire $d_2$ à $d$. Déterminer la longueur des côtés du triangle délimité par les droites $d_1$, $d_2$ et l'axe $Ox$.

4. On donne les points $A(2,3)$, $B(-3,1)$ et $C(0,-2)$
   (a) Démontrer que le triangle $ABC$ est isocèle.
   (b) Démontrer que les médianes issues de $B$ et de $C$ ont même longueur.
5. On donne les points $A(1,-2)$ et $B(2,4)$
   (a) Ecrire l'équation de la droite $AB$
   (b) Trouver les coordonnées du point $C$, intersection de $AB$ et de l'axe des ordonnées.
   (c) Ecrire l'équation de la parallèle à $Ox$ passant par $C$. Soit $d$ cette droite.
   (d) Ecrire l'équation de la perpendiculaire à $d$ passant par $B$. Soit $d'$ cette droite.
   (e) Trouver les coordonnées de $D$, intersection de $d$ et $d'$.
   (f) Ecrire l'équation de la droite $d''$, perpendiculaire à $AB$ et passant par $D$
   (g) Calculer les coordonnées du point $E$, intersection de $d''$ et de $Ox$.
   (h) Ecrire l'équation de la parallèle à $AB$ passant par $E$.
   (i) Calculer la distance de $E$ à $B$.
6. On donne les équations $d_1 \equiv 3x - 2y - 5 = 0$ et $d_2 \equiv 2x + 3y + 7 = 0$ de deux des côtés d'un rectangle dont un des sommets est $A(-2,1)$. Déterminer l'aire de ce rectangle.
7. On fait passer par le point $M(4,3)$ une droite qui forme avec les axes de coordonnées un triangle d'aire 24 (u.a.). Déterminer les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec les axes.

## 16.2 Solutions

### 16.2.1 Exercices de base

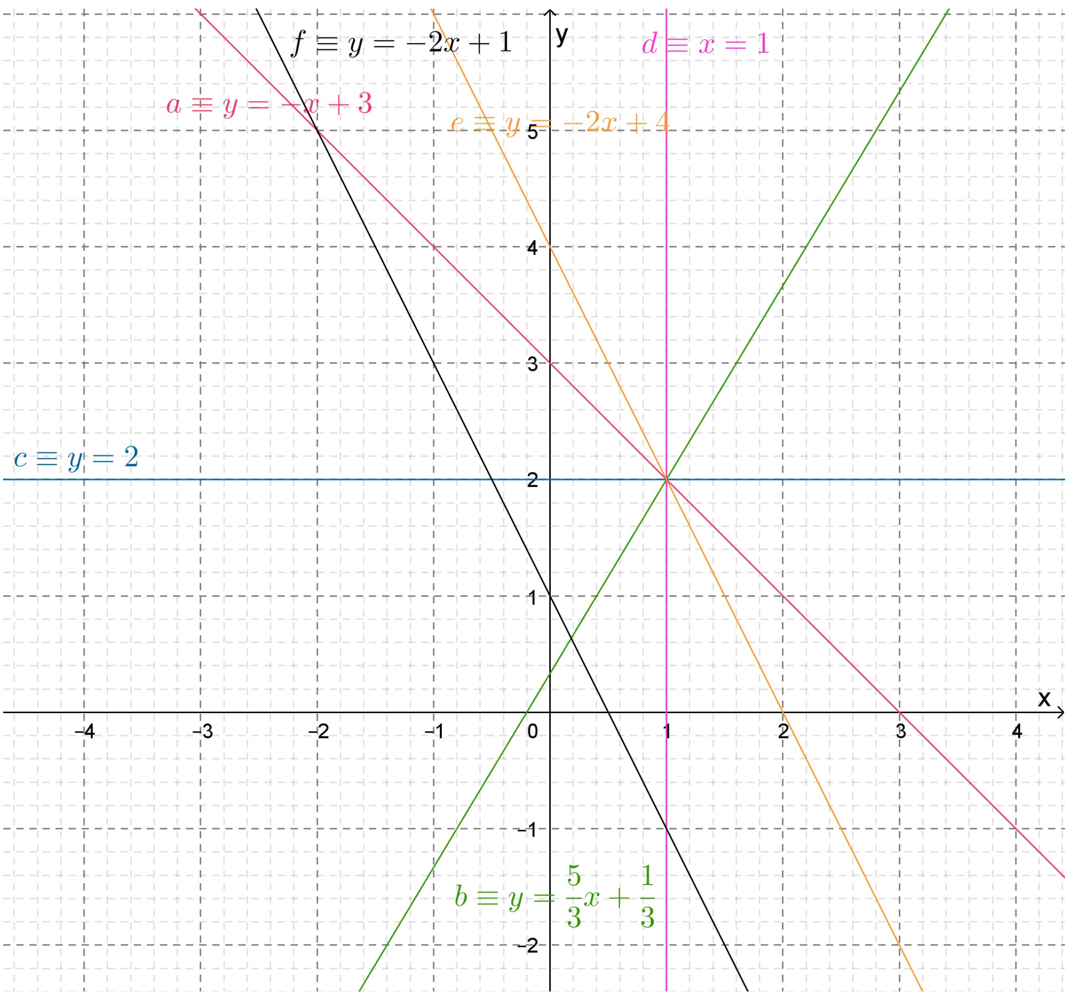
1. 

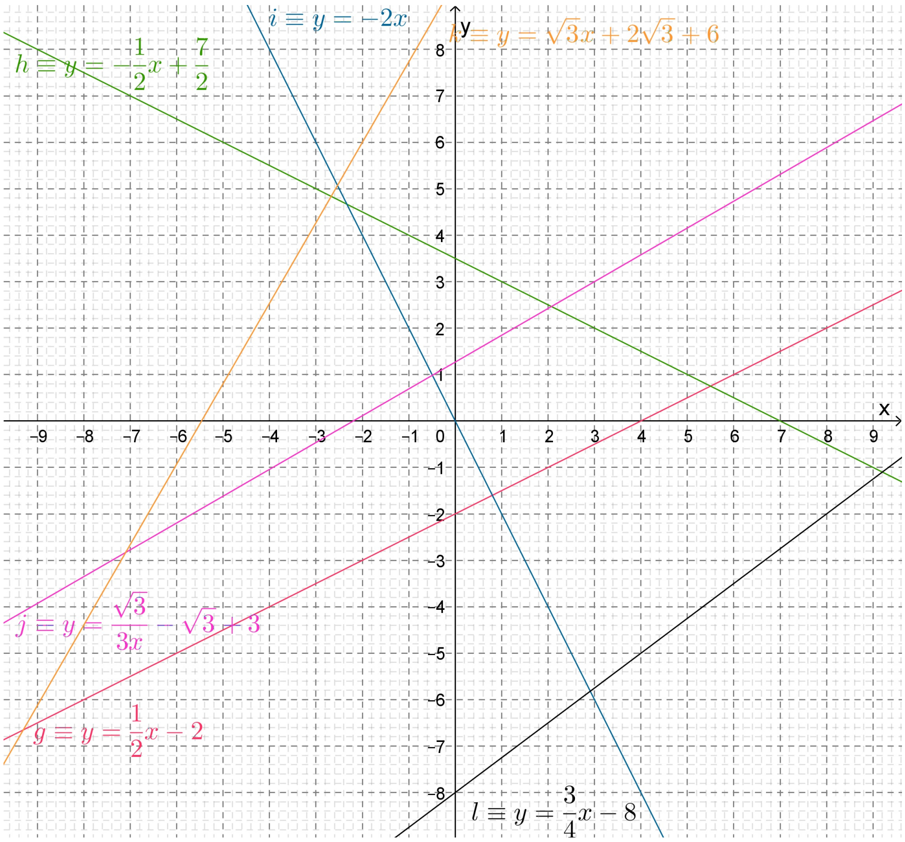

2. $$\begin{aligned} a &\equiv y = 1 - x \\ b &\equiv y = 2x + 1 \\ c &\equiv y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ d &\equiv y = -3 + \frac{1}{4}x \end{aligned}$$

3. (a) $A \in d, A \notin d', A \notin d''$
   (b) $B \notin d, B \notin d', B \notin d''$
   (c) $C \in d, C \notin d', C \in d''$
   (d) $D \in d, D \in d', D \notin d''$

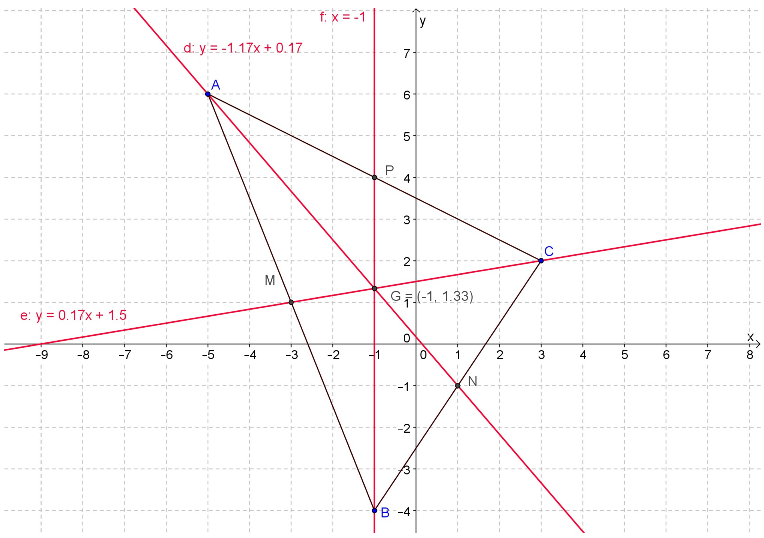
4.

$a \equiv y = -x + 3$
$b \equiv 5x - 3y + 1 = 0$
$c \equiv y = 2$
$d \equiv x = 1$
$e \equiv y = -2x + 4$
$f \equiv y = -2x + 1$
$g \equiv 2y - x + 4 = 0$
$h \equiv x + 2y - 7 = 0$
$i \equiv y = -2x$
$j \equiv 3y - \sqrt{3}x - 9 + 3\sqrt{3} = 0$
$k \equiv y = \sqrt{3}x + 6 + 2\sqrt{3}$
$l \equiv 4y - 3x + 32 = 0$



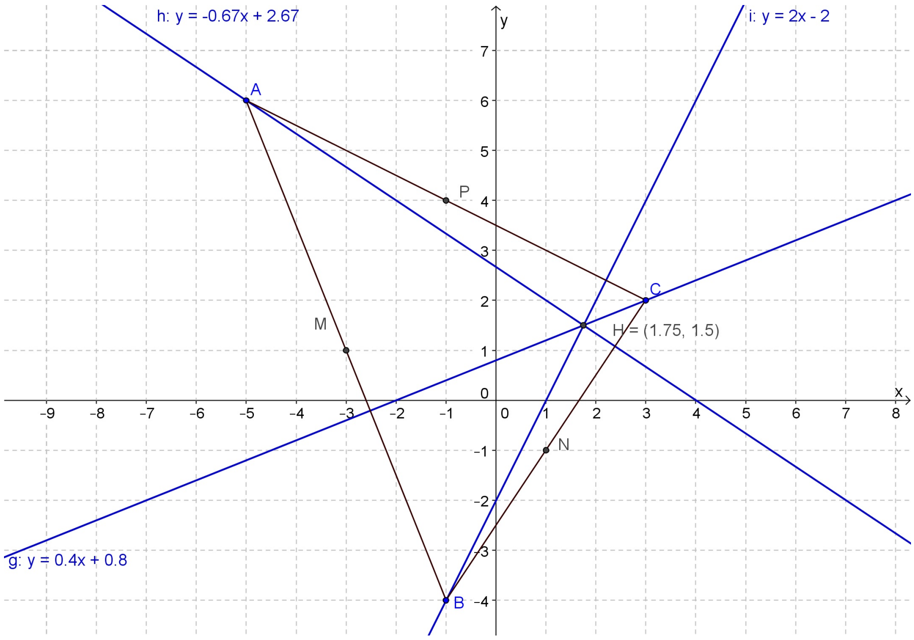



5. $d \equiv 3y + 4x - 15 = 0$
6. Les équations et coordonnées demandées sont reprises sur les figures ci-dessous.



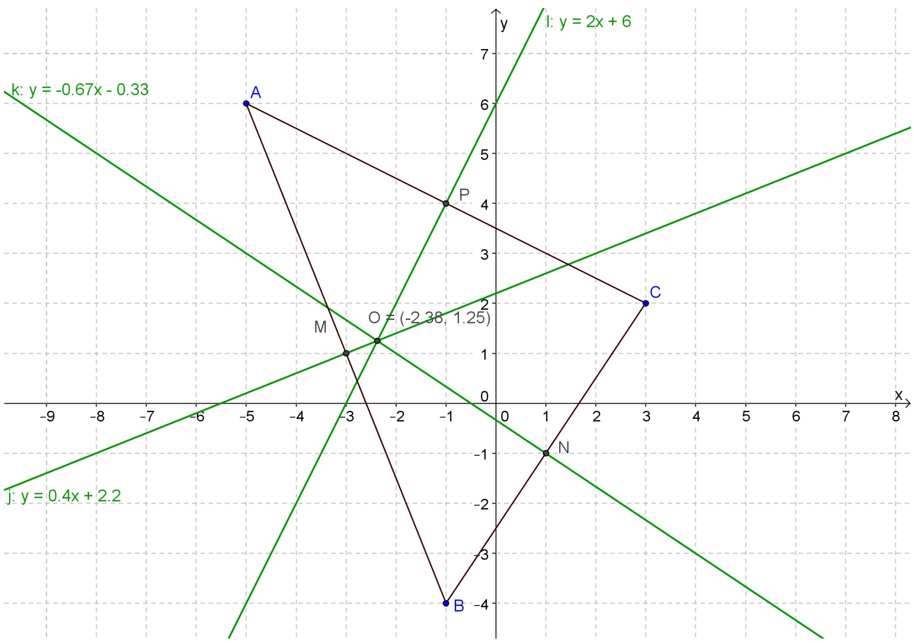

Equations des médianes :
- médiane $AN \equiv 7x + 6y = 1$
- médiane $BP \equiv x = -1$
- médiane $CM \equiv x - 6y = -9$

$G : \left(-1, \frac{4}{3}\right)$




Equations des hauteurs :
- hauteur relative à $A \equiv 2x + 3y = 8$
- hauteur relative à $B \equiv -2x + y = -2$
- hauteur relative à $C \equiv -2x + 5y = 4$

$H : \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right)$



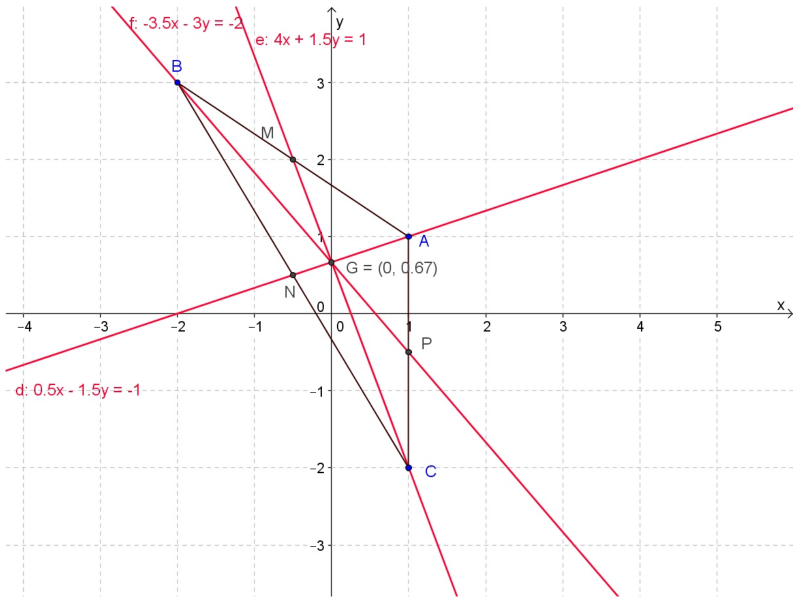

Equations des médiatrices :
- médiatrice de $[AB] \equiv -2x + 5y = 11$
- médiatrice de $[BC] \equiv 2x + 3y = -1$
- médiatrice de $[AC] \equiv -2x + y = 6$

$O : \left(-\frac{19}{8}, \frac{5}{4}\right)$

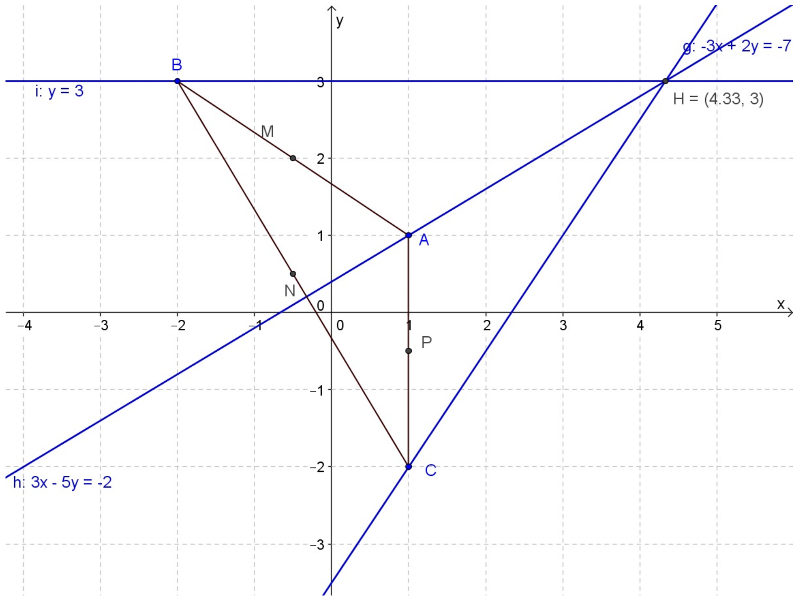
7. (a) $d(A,B) = 2\sqrt{5}$
   (b) $d(A,B) = \sqrt{13}$
8. $d(A,d) = 5$

### 16.2.2 Pour aller plus loin...

1. $k = -1$
2. Les équations et coordonnées demandées sont reprises sur les figures ci-dessous.



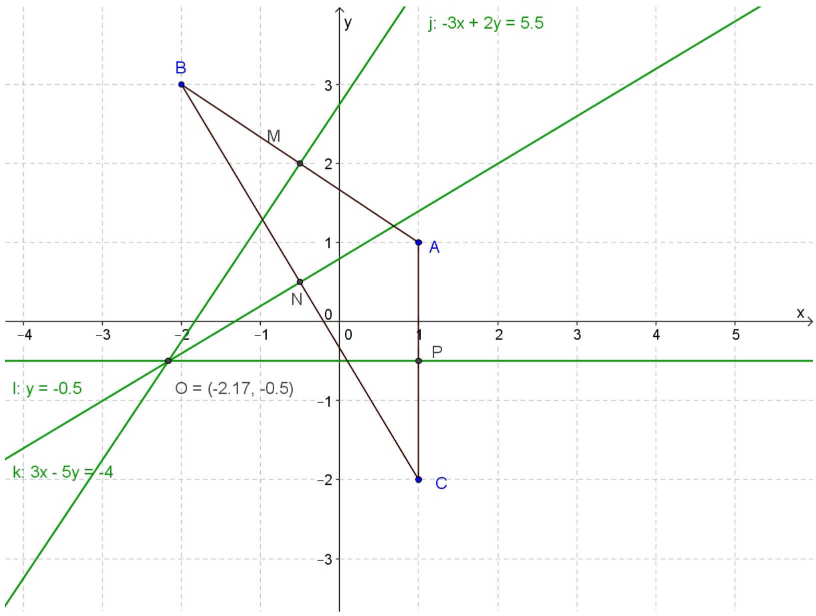

Equations des médianes :
– médiane $AN \equiv -x + 3y = 2$
– médiane $BP \equiv -7x - 6y = -4$
– médiane $CM \equiv 8x + 3y = 2$
$G : \left(0, \frac{2}{3}\right)$




Equations des hauteurs :

- hauteur relative à $A \equiv 3x - 5y = -2$
- hauteur relative à $B \equiv y = 3$
- hauteur relative à $C \equiv 3x - 2y = 7$

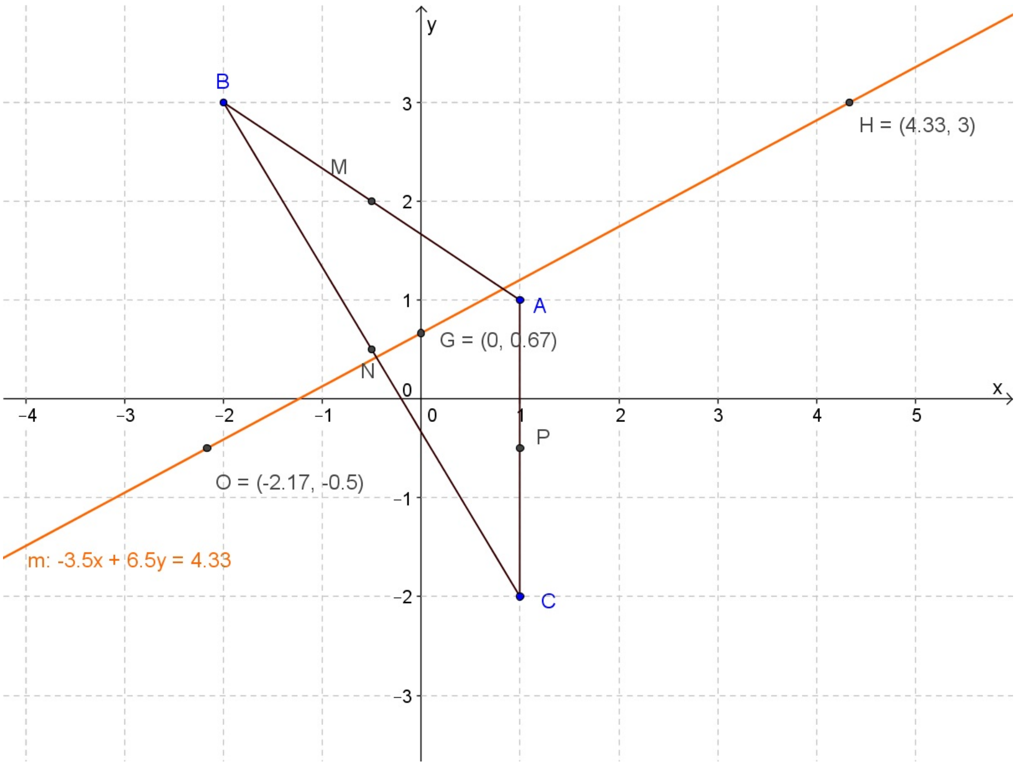
$H : \left(\frac{13}{3}, 3\right)$




Equations des médiatrices :

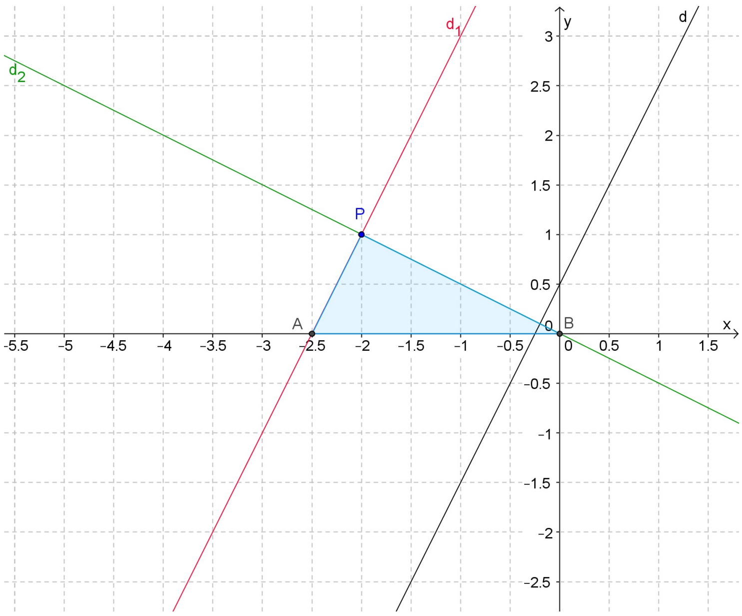
- médiatrice de $[AB] \equiv -6x + 4y = 11$
- médiatrice de $[BC] \equiv 3x - 5y = -4$
- médiatrice de $[AC] \equiv y = -\frac{1}{2}$

$O : \left(-\frac{13}{6}, -\frac{1}{2}\right)$




Droite d'Euler : $m \equiv 21x + 39y = 26$

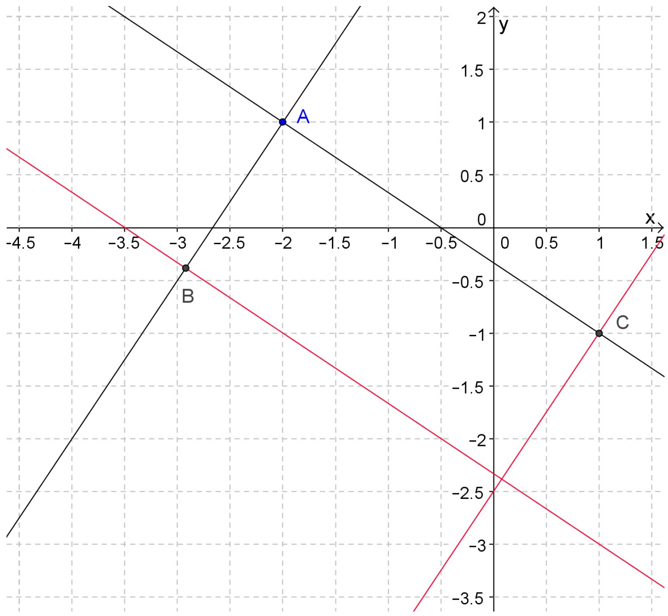
3. $d(A,P) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $d(B,P) = \sqrt{5}$ et $d(A,B) = \dfrac{5}{2}$



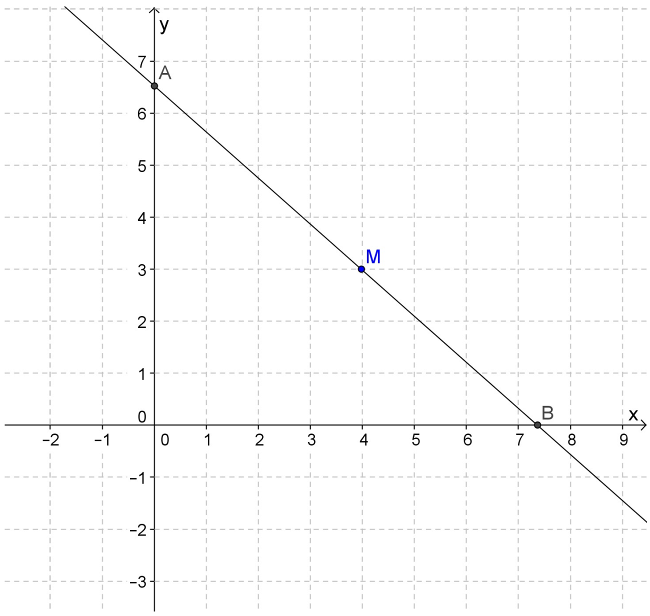

4. (a) i. $d(A,B) = \sqrt{29}$
   ii. $d(A,C) = \sqrt{29}$
   iii. $d(B,C) = 3\sqrt{2}$

   (b) – $B'$ milieu de $[AC]$ : $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ et $d(B,B') = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$
   – $C'$ milieu de $[AB]$ : $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$ et $d(C,C') = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

5. (a) $AB \equiv y = 6x - 8$
   (b) $C : (0, -8)$
   (c) $d \equiv y = -8$
   (d) $d' \equiv x = 2$
   (e) $D : (2, -8)$
   (f) $d'' \equiv 6y + x + 46 = 0$
   (g) $E : (-46, 0)$
   (h) $y = 6x + 276$
   (i) $d(E, B) = 4\sqrt{145}$
6. $\mathcal{A} = 6$




7. $x_B = 8$ et $y_A = 6$



# 17

# Cercle et parabole

## A la fin du chapitre il faudra :

| | | | ***Degré d'acquisition*** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Compétence | Exercices | Help | Bof | OK |
| 1 | Ecrire l'équation d'un cercle répondant à des caractéristiques données | 1 | | | |
| 2 | Trouver les caractéristiques d'un cercle (centre et rayon) dont on connait l'équation | 2 | | | |
| 3 | Ecrire l'équation d'une tangente à un cercle en l'un de ses points | 3 | | | |

## 17.1 Exercices

1. Ecrire l'équation du cercle :
   (a) de centre (3,-1) et de rayon 5 ;
   (b) de centre (0,5) et de rayon 5 ;
   (c) de centre (-4,3) et passant par l'origine
   (d) de centre (5,3) et tangent à l'axe $Ox$ ;
2. Déterminer les coordonnées du centre et le rayon des cercles suivants
   (a) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 2 = 0$
   (b) $x^2 - 2x + y^2 = 2$
   (c) $4x^2 + 24x + 4y^2 - 4y = -33$
   (d) $2x^2 + 2y^2 + 8x - 9y = 3$
3. Ecrire l'équation de la tangente au cercle $\mathbb{C} \equiv x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ au point $A(-1, 3)$.