Athénée Royal d'Uccle 1

Cours de Mathématique

$4^{ème}$ année

RÉVISION DE DÉCEMBRE

Chapitre 1

Algèbre

1. Développer et réduire

   (a) $(2x-3)^3 - (4x+1)^2$

$$= \left(8x^3 - 3(2x)^2 3 + 3(2x)(3)^2 - 27\right) - \dots$$
$$\dots \left(16x^2 + 8x + 1\right)$$
$$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 - 16x^2 - 8x - 1$$
$$= 8x^3 - 52x^2 + 46x - 28$$

   (b) $x^2 \cdot (3x-1)^2 + (2x-4)^3$

$$= x^2\left(9x^2 - 6x + 1\right) + \left(8x^3 - 3(2x)^2 4 + 3(2x)(4)^2 - 64\right)$$
$$= 9x^4 - 6x^3 + x^2 + 8x^3 - 48x^2 + 96x - 64$$
$$= 9x^4 + 2x^3 - 47x^2 + 96x - 64$$

(c) $(x^2-4x+2)\cdot(x-3)^2-(2x-1)^3$

$$= (x^2-4x+2)(x^2-6x+9)-(8x^3-12x^2+6x-1)$$

$$= x^4-10x^3+35x^2-48x+18-8x^3+12x^2-6x+1$$

$$= x^4-18x^3+47x^2-54x+19$$

(erreur dans solution corrigée en 2022)

2. Factoriser les expressions suivantes :

(a) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$

div 21 : $\{\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21\}$

$P(1) = 0$

	1	9	11	-21
1		1	10	21
	1	10	21	0

$$P(x) = (x-1)\underbrace{(x^2 + 10x + 21)}_{Q(x)}$$

$Q(-3) = 0$

	1	10	21
-3		-3	-21
	1	7	0

$$P(x) = (x-1)(x+3)(x+7)$$

(b) $x^3 + 3x^2 - 4$

(c) $8a^3 - b^6 - 12a^2b^2 + 6ab^4 \quad = (2a - b^2)^3$

Vérif : $8a^3 - 3(2a)^2 b^2 + 3(2a)\,b^4 - b^6$

$= 8a^3 - 12a^2b^2 + 6ab^4 - b^6$ ok

(d) $128a^5b - 2a^2b^4$

$= 2a^2b\,(64a^3 - b^3)$

$= 2a^2b\,(4a - b)(16a^2 + 4ab + b^2)$

(e) $8a^3 + 6a + \dfrac{3}{2a} + \dfrac{1}{8a^3} \quad = \left(2a + \dfrac{1}{2a}\right)^3$

Vérif : $8a^3 + 3(2a)^{\cancel{2}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2a}} + 3(2a)\left(\dfrac{1}{2a}\right)^2 + \dfrac{1}{8a^3}$

$= 8a^3 + 6a + \dfrac{6a}{4a^2} + \dfrac{1}{8a^3}$

$= 8a^3 + 6a + \dfrac{3}{2a} + \dfrac{1}{8a^3}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$

   (a) $\frac{1}{3}(-x-2)+x+10=\frac{1}{6}(8-2x)+\frac{5}{3}$

$$-\cancel{\frac{1}{3}x}-\frac{2}{3}+x+10=\frac{4}{3}-\cancel{\frac{1}{3}x}+\frac{5}{3}$$

$$x=\frac{9}{3}-10+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{19}{3}$$

$$S=\left\{\frac{19}{3}\right\}$$

(b) $\dfrac{7-2x}{3-4x}+\dfrac{1-x}{2x+3}=0$

CE $x \neq \frac{3}{4}$, $x \neq -\frac{3}{2}$

$(7-2x)(2x+3)+(1-x)(3-4x)=0$

$\Leftrightarrow -4x^2+8x+21+(-4x^2-7x+3)=0$

$\Leftrightarrow x=-3-21$

$\Leftrightarrow x=-24$

$S: \{-24\}$

(c) $\dfrac{2-3x}{x-3} + \dfrac{7x-9}{7x-4} = -2$

CE : $x \neq 3$, $x \neq \frac{4}{7}$

$\Leftrightarrow (2-3x)(7x-4) + (7x-9)(x-3) = \dots$
$-2(x-3)(7x-4)$

$\Leftrightarrow -21x^2 + 26x - 8 + 7x^2 - 30x + 27 = \dots$
$-2(7x^2 - 25x + 12)$

$\Leftrightarrow \cancel{-14x^2} - 4x + 19 = \cancel{-14x^2} + 50x - 24$

$\Leftrightarrow 43 = 54x$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{43}{54}$

$S : \left\{ \dfrac{43}{54} \right\}$

(d) $\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{4-x^2} = \frac{1}{x+2} - 1$

$CE : x \neq \pm 2$

$\Leftrightarrow \frac{x+2+2x}{\cancel{x^2-4}} = \frac{x-2-(x^2-4)}{\cancel{x^2-4}}$

$\Leftrightarrow 3x \cancel{+2} = -x^2 + x \cancel{+2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \quad (A.R.) \end{cases}$

$S : \{0\}$

(e) $2x + 3 > -5x + 2$

$7x > -1$

$x > -\frac{1}{7}$

$S : \left]-\frac{1}{7}, +\infty\right[$

(f) $\dfrac{3x-6}{5} < \dfrac{5-2x}{3} + \dfrac{3+x}{2}$

$6(3x-6) < 5\left[2(5-2x)+3(3+x)\right]$

$18x - 36 < 5(19 - x)$

$23x < 131$

$x < \dfrac{131}{23}$

$S : \left]-\infty, \dfrac{131}{23}\right[$

(g) $\dfrac{2x+1}{3} + \dfrac{1-x}{4} \geq \dfrac{2-x}{6} - \dfrac{5x+3}{2}$

$4(2x+1) + 3(1-x) \geq 4 - 2x - 6(5x+3)$

$8x + 4 - 3x + 3 \geq 4 - 2x - 30x - 18$

$37x \geq -21$

$x \geq -\dfrac{21}{37}$

$S : \left[-\dfrac{21}{37}, +\infty \right.$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$

(a) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} > -\dfrac{4}{3}$

$$\frac{3(x+2)-3(x-2)+4(x^2-4)}{3(x-2)(x+2)} > 0$$

$$\frac{\cancel{3x}+6-\cancel{3x}+6+4x^2-16}{D} > 0$$

$$\frac{4x^2-4}{3(x-2)(x+2)} > 0$$

$$\frac{4(x-1)(x+1)}{3(x-2)(x+2)} > 0$$

x		-2		-1		1		2	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
Im	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$S: -\infty, -2 [\cup]-1, 1 [\cup] 2, +\infty$

(b) $\dfrac{7}{x+5}+1 \leq \dfrac{18}{x+7}$

$$\frac{7(x+7)+(x+5)(x+7)-18(x+5)}{(x+5)(x+7)} \leq 0$$

$$\frac{7x+49+x^2+12x+35-18x-90}{D} \leq 0$$

$$\frac{x^2+x-6}{D} \leq 0$$

Factorisation du numérateur

Horner : div 6 : $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$P(2)=0$

	1	1	−6
2		2	6
	1	3	0

L'inéquation devient $\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+5)(x+7)} \leq 0$

x		−7		−5		−3		2	
$x-2$	−		−		−		−	0	+
$x+3$	−		−		−	0	+		+
$x+5$	−		−	0	+		+		+
$x+7$	−	0	+		+		+		+
In	+	∄	−	∄	+	0	−	0	+

$S :]-7,-5[\cup [3,-2]$

(c) $\dfrac{7}{x} - \dfrac{29}{2x+5} \geq 0$

$$\frac{7(2x+5) - 29x}{x(2x+5)} \geq 0$$

$$\frac{-15x + 35}{x(2x+5)} \geq 0$$

$$\frac{5(-3x+7)}{x(2x+5)} \geq 0$$

x		$-\frac{5}{2}$		0		$\frac{7}{3}$	
$-3x+7$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x+5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
I_n	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

$S: -\infty, -\frac{5}{2}[\cup]0, \frac{7}{3}]$

(d) $\dfrac{2x+1}{x^2-3x} - \dfrac{2x+3}{x^2+3x} < \dfrac{19}{x^2-9}$

$$\frac{(2x+1)(x+3)-(2x+3)(x-3)-19x}{x(x-3)(x+3)} < 0$$

$$\frac{\cancel{2x^2}+7x+3-(\cancel{2x^2}-3x-9)-19x}{D} < 0$$

$$\frac{7x+3+3x+9-19x}{x(x+3)(x-3)} < 0$$

$$\frac{-9x+12}{x(x+3)(x-3)} < 0$$

$$\frac{3(-3x+4)}{x(x+3)(x-3)} < 0$$

x		-3		0		$\frac{4}{3}$		3	
$-3x+4$	+		+		+	0	−		−
x	−		−	0	+		+		+
$x+3$	−	0	+		+		+		+
$x-3$	−		−		−		−	0	+
I_x	−	∄	+	∄	−	0	+	∄	−

$S : -\infty, -3[\cup]0, \frac{4}{3}[\cup]3, +\infty$

(e) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} > \frac{2x+4}{x^2-1}$

$$\frac{3(x+1)-2(x-1)-(2x+4)}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\frac{3x+3-2x+2-2x-4}{D} > 0$$

$$\frac{-x+1}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} > 0$$ CE : $x \neq 1$

$$-\frac{1}{x+1} > 0$$

x		-1	
-1	$-$		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$
In	$+$	$\nexists$	$-$

S : $-\infty, -1[$

(f) $\dfrac{3}{x-2} < \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{7x+6}{x^2-4}$

$$\frac{3(x+2) - 2(x-2) - (7x+6)}{(x-2)(x+2)} < 0$$

$$\frac{3x + 6 - 2x + 4 - 7x - 6}{D} < 0$$

$$\frac{-6x + 4}{D} < 0$$

$$\frac{2(-3x+2)}{(x-2)(x+2)} < 0$$

x		-2		$\frac{2}{3}$		2	
$-3x+2$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
I_n	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

$S : \left]-2, \frac{2}{3}\right[\cup \left]2, +\infty\right.$

(g) $\frac{1+4x}{1-4x} \geq \frac{3+16x^2}{1-16x^2}$

$$\frac{(1+4x)^2-(3+16x^2)}{(1-4x)(1+4x)} \geq 0$$

$$\frac{16x^2+8x+1-16x^2-3}{D} \geq 0$$

$$\frac{8x-2}{D} \geq 0$$

$$\frac{2(4x-1)}{D} \geq 0$$

$$\frac{-2\cancel{(1-4x)}}{\cancel{(1-4x)}(1+4x)} \geq 0$$

<u>CE</u> $x \neq \frac{1}{4}$

		$-\frac{1}{4}$	
-2	$-$		$-$
$1+4x$	$-$	0	$+$
	$+$	$\nexists$	$-$

$S : -\infty, -\frac{1}{4}\ [$

5. Montrer que $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})^3 = 2(3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1)$

$$(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}) = 2 - 3(\sqrt[3]{2})^2(\sqrt[3]{4}) + \dots$$

$$\dots + 3\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4})^2 - 4$$

$$= 2 - 3\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{32} - 4$$

$$= -2 - 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4}$$

$$= 2(3\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} - 1)$$

6. Ecrire sous forme de puissance de a et b ($a, b \in \mathbb{R}_0^+$). Donner la réponse sans exposant négatif et les exprimer sous forme de racines simplifiées ***et*** réduites.

(a) $a\sqrt{a}\dfrac{a^2\sqrt{a^{-1}}}{a^{-3}\sqrt[3]{a}}$ $= a\, a^{\frac{1}{2}}\, a^{2}\, a^{-\frac{1}{2}}\, a^{3}\, a^{-\frac{1}{3}}$

$= a^{1+\cancel{\frac{1}{2}}+2-\cancel{\frac{1}{2}}+3-\frac{1}{3}} = a^{\frac{17}{3}}$

$= \sqrt[3]{a^{17}}$

$= a^{5}\sqrt[3]{a^{2}}$

(b) $\left(\dfrac{\sqrt{a^{\frac{1}{3}}}a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt[5]{b^2}}\right)^{-2}$ $= \left(\dfrac{a^{\frac{1}{6}}\, a^{\frac{5}{6}}\, b^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{2}{5}}}\right)^{-2}$

$= \left(a^{\frac{1}{6}+\frac{5}{6}}\, b^{-\frac{3}{4}-\frac{2}{5}}\right)^{-2}$

$= \left(a^{1}\, b^{-\frac{23}{20}}\right)^{-2} = a^{-2}\, b^{+\frac{23}{10}}$

$= \dfrac{b^{\frac{23}{10}}}{a^{2}} = \dfrac{\sqrt[10]{b^{23}}}{a^{2}} = \dfrac{b^{2}\sqrt[10]{b^{3}}}{a^{2}}$

(c) $\left(\dfrac{(a^2b^{-1})^{\frac{1}{3}}aa^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$ $= \left(a^{\frac{2}{3}}\, b^{-\frac{1}{3}}\, a\, a^{\frac{1}{2}}\, b^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(a^{\frac{2}{3}+1+\frac{1}{2}}\, b^{-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(a^{\frac{13}{6}}\, b^{-\frac{11}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= a^{\frac{13}{12}}\, b^{-\frac{11}{12}} = \dfrac{a^{\frac{13}{12}}}{b^{\frac{11}{12}}} = a\sqrt[12]{\dfrac{a}{b^{11}}}$

7. Simplifier le radical suivant au maximum ; la réponse ne peut contenir que des exposants naturels et des radicaux (on suppose $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}_0^+$)

(a) $\sqrt[5]{\dfrac{64x^8\,(ay^2)^{-3}}{243b^8c^6}}$ $= \left(\dfrac{64x^8\,a^{-3}\,y^{-6}}{243\,b^8\,c^6}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$= \frac{2}{3}\;\frac{x^{\frac{8}{5}}\,a^{-\frac{3}{5}}\,y^{-\frac{6}{5}}}{b^{\frac{8}{5}}\,c^{\frac{6}{5}}}$$

$$= \frac{2}{3}\;\frac{x}{y\,b\,c}\;\sqrt[5]{\frac{2\,x^3}{a^3\,y\,b^3\,c}}$$

(b) $\dfrac{\sqrt[3]{32x^5b^2}}{\sqrt[4]{y^6c^4a^{-5}}}$ $= \dfrac{(32\;x^5\,b^2)^{\frac{1}{3}}}{(y^6\,c^4\,a^{-5})^{\frac{1}{4}}}$

$$= \frac{2\left(4^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{5}{3}}\;b^{\frac{2}{3}}\right)}{y^{\frac{3}{2}}\;c\;a^{-\frac{5}{4}}}$$

$$= \frac{2\,a\,x}{y\,c}\cdot\frac{\sqrt[3]{4x^2b^2}\;\sqrt[4]{a}}{\sqrt{y}}$$

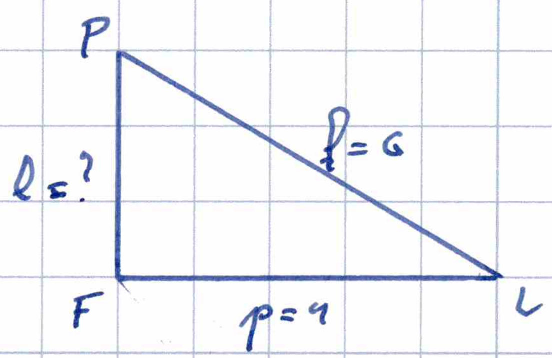
8. Calculer à l'aide de la calculatrice

$$\frac{\sqrt[3]{15} - 154^{-\frac{2}{3}}}{\left(15^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{5}}} \simeq 7,3585$$

Chapitre 2

Trigonométrie

1. (a) On donne le triangle PFL rectangle en F, $f = 6$ et $p = 4$. Déterminer la valeur exacte des nombres trigonométriques des angles de ce triangle ainsi que l'amplitude des angles (valeurs approchées).



$l = ?$

$f^2 = l^2 + p^2$

$\Leftrightarrow l = \sqrt{f^2 - p^2} = \sqrt{20}$ $(= 2\sqrt{5})$

$\cos P = \sin L = \dfrac{l}{f} = \dfrac{\sqrt{20}}{6} \left(= \dfrac{\sqrt{5}}{3} \right)$

$\sin P = \cos L = \dfrac{p}{f} = \dfrac{2}{3}$

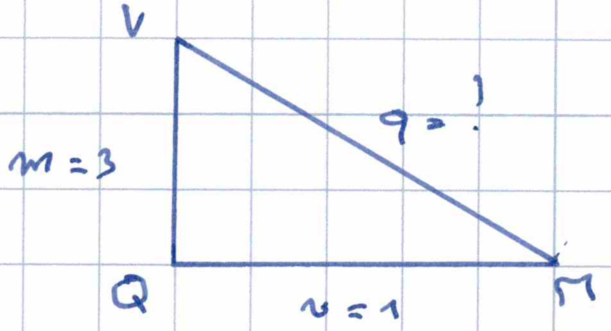
$\tan P = \dfrac{p}{l} = \dfrac{4}{\sqrt{20}} \left(= \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \right)$

$\tan L = \dfrac{l}{p} = \dfrac{\sqrt{20}}{4} \left(= \dfrac{\sqrt{5}}{2} \right)$

$P = \arcsin \dfrac{2}{3} \simeq 41,81^\circ$

$L = \arccos \dfrac{2}{3} \simeq 48,19^\circ$

(b) On donne le triangle QMV rectangle en Q, $m = 3$ et $v = 1$. Déterminer la valeur exacte des nombres trigonométriques des angles de ce triangle ainsi que l'amplitude des angles (valeurs approchées).



$$q = \sqrt{m^2 + v^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos V = \sin M = \frac{m}{q} = \frac{3}{\sqrt{10}} \left(= \frac{3\sqrt{10}}{10} \right)$$

$$\sin V = \cos M = \frac{v}{q} = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(= \frac{\sqrt{10}}{10} \right)$$

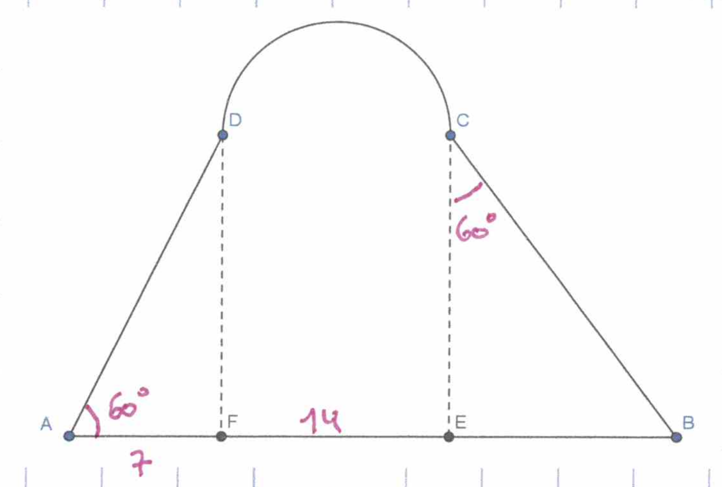
$$\tan V = \frac{v}{m} = \frac{1}{3}$$

$$\tan M = 3$$

$$V = \arctan \frac{1}{3} \simeq 18{,}43°$$

$$M = \arctan 3 \simeq 71{,}57°$$

2. Calculer l'aire de la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

- $D\hat{A}F = E\hat{C}B = 60°$
- L'arc de cercle CD a un rayon de 7cm
- $AF = 7cm$

$$Aire = Aire_{ADCB} + Aire_{\frac{1}{2}\,cercle}$$

$$Aire_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot DF$$

$$\text{Dans } ADF : \tan 60° = \frac{DF}{7} \Rightarrow DF = 7 \tan 60° = EC$$

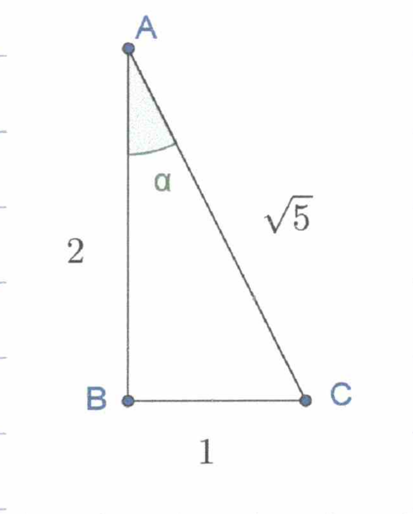
$$\text{Dans } CEB : \tan 60° = \frac{EB}{EC} \Rightarrow EB = 7 \tan^2 60°$$

$$\Rightarrow Aire_{ABCD} = \frac{(7 + 14 + 7\tan^2 60) + 14}{2} \cdot 7 \tan 60°$$

$$Aire_{\frac{1}{2}\,cercle} = \frac{\pi \cdot 7^2}{2}$$

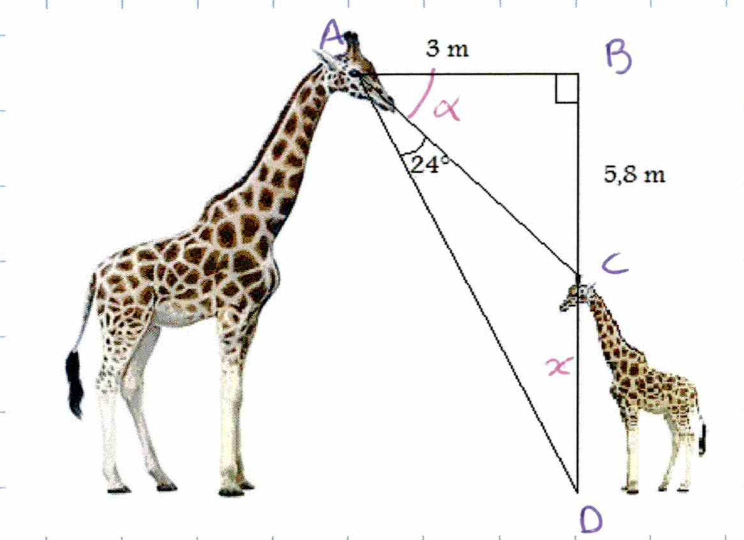
$$\Rightarrow Aire \simeq 416{,}45 \text{ cm}^2$$

3. Sans utiliser de calculatrice ni de rapporteur, dessiner un angle dont le cosinus vaut $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Expliquer clairement les construction.



On dessine un segment de longueur 2 et une perpendiculaire passant par une de ses extrémité.
Par l'autre extrémité, on trace un cercle de rayon $\sqrt{5}$. L'intersection avec la perp. donne un Δ dont l'angle A a un $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

4. Maman girafe mesure 5 m 80. Placée à 3 m de son petit, elle le voit sous un angle de 24°. Quelle est la taille du petit ?



$AB = 3$ m $\qquad BD = 5{,}8$ m $\qquad CD = x$

- $\tan(\alpha + 24°) = \dfrac{5{,}8}{3}$ $\quad (\Delta\ ABD)$

$\iff \alpha + 24° = \tan^{-1}(1{,}933)$

$\simeq 62{,}65°$

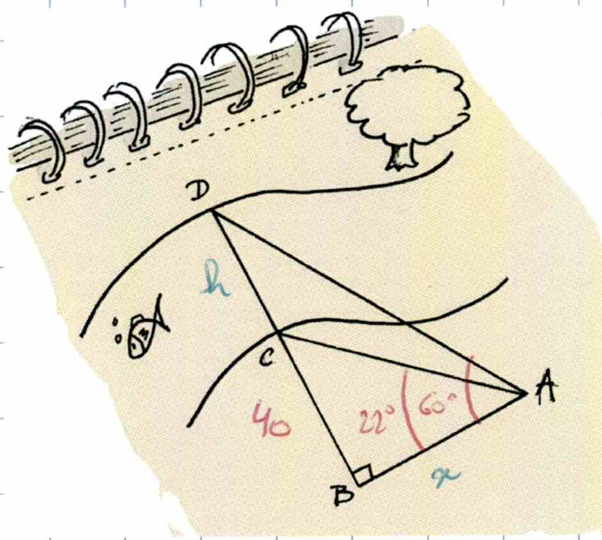
$\iff \alpha \simeq 38{,}65$

- $\tan \alpha = \dfrac{5{,}8 - x}{3}$ $\quad (\Delta\ ABC)$

$\iff x = 5{,}8 - 3 \tan \alpha$

$\iff x \simeq 3{,}4$ m

5. Monsieur Schmitt, géomètre, doit déterminer la largeur d'une rivière. Voici le croquis qu'il a réalisé :

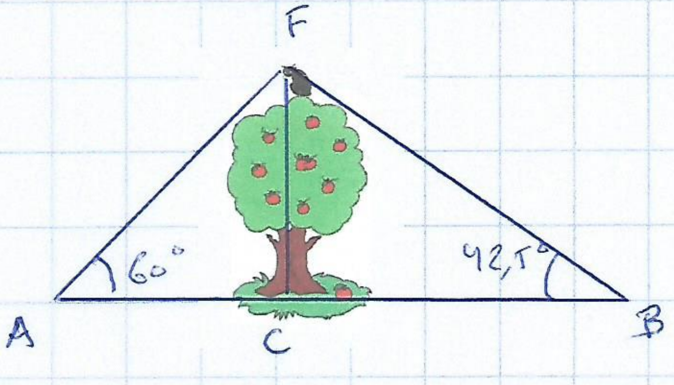


$BC = 40$ m, $\widehat{BAD} = 60°$, $\widehat{BAC} = 22°$ et $\widehat{ABD} = 90°$.
Calculer la largeur de la rivière à un mètre.

$\tan 22° = \frac{40}{x} \iff x \simeq 99$ m

$\tan 60° = \frac{h+40}{x} \iff h = x \tan 60° - 40$
$\simeq 131{,}5$ m

6. Félix ne sait plus redescendre du pommier dans lequel il a grimpé.
   Sachant qu'Annabelle l'aperçoit, depuis son jardin, sous un angle de 60°, que son amie Béatrice, située dans le jardin d'en face, le voit sous un angle de 42,5° et que les deux fillettes sont à 7,5 m l'une de l'autre, déterminer la hauteur à laquelle se trouve ce pauvre Félix.



$|AB| = 7{,}5\,m$

$|FC| = h$ et $|AC| = x \Rightarrow |BC| = 7{,}5 - x$

Dans ACF : $\tan 60 = \dfrac{h}{x}$

Dans BCF : $\tan 42{,}5 = \dfrac{h}{7{,}5 - x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \tan 60° \\ h = (7{,}5 - x)\tan 42{,}5° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = x \tan 60° \\ x \tan 60° = 7{,}5 \tan 42{,}5° - x \tan 42{,}5° \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \tan 60° \\ x(\tan 60° + \tan 42{,}5°) = 7{,}5 \tan 42{,}5° \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ x = \dfrac{7{,}5 \tan 42{,}5°}{\tan 60° + \tan 42{,}5°} \end{cases}$

$\Rightarrow h = \dfrac{7{,}5 \tan 42{,}5° \tan 60°}{\tan 42{,}5° + \tan 60°}$

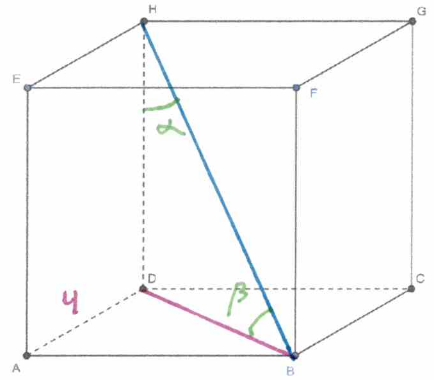
$\Rightarrow h \simeq 2{,}65\,m$

7. Soit un cube $ABCDEFGH$ de côté 4[1].

(a) Calcule $|BD|$

(b) Calcule $|BH|$

(c) Calcule les amplitudes des angles du triangle BDH.



a) ABD est rectangle en A

$\Rightarrow BD^2 = AD^2 + AB^2$ (Pyth.)

$\Rightarrow BD = 4\sqrt{2}$

b) BDH est rectangle en D

$BH^2 = BD^2 + DH^2$

$\Rightarrow BH = 4\sqrt{3}$

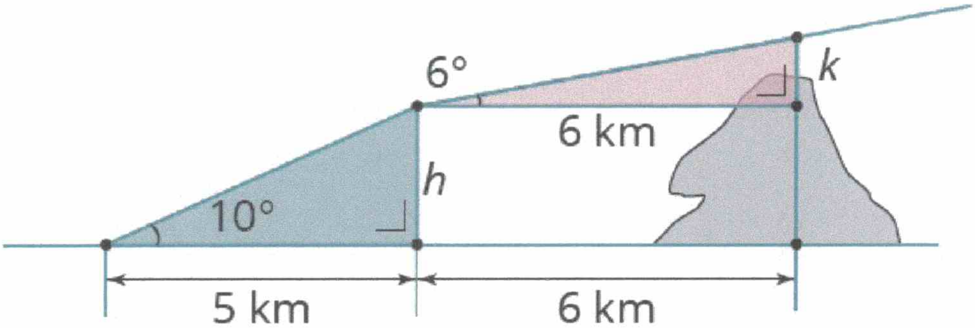
c) . $\hat{D} = 90°$

. $\cos \alpha = \dfrac{4}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \simeq 54{,}74°$

. $\beta = 180° - 90° - 54{,}74° \simeq 32{,}26°$

1. Attention à l'ordre dans lequel on nomme les sommets !

8. Un avion s'envole sous un angle de 10° avec le sol. Au bout de 5 km, il rectifie son angle pour monter sous un angle de 6° avec l'horizontale. À 11 km du point de départ se trouve une montagne dont le point le plus haut se situe à 1 500 m d'altitude. L'avion survolera-t-il la montagne ou devra-t-il changer son orientation ?



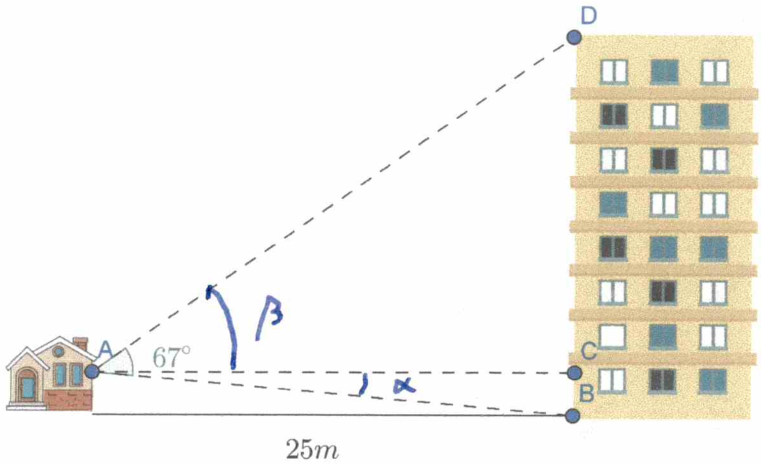
Il faut que $h + k > 1500$ m

$$\tan 10 = \frac{h}{5000} \Leftrightarrow h \approx 881{,}63 \text{ m}$$

$$\tan 6° = \frac{k}{6000} \Leftrightarrow k \approx 630{,}63$$

$\Rightarrow h + k = 1512{,}26$ m (tout juste !)

9. Victor veut déterminer la hauteur du bâtiment en face de son habitation. Sur le dessin ci-dessous, tu trouveras quelques mesures qu'il a effectuées depuis sa chambre située au point A à 4m du sol. Calcule la hauteur du bâtiment.



Dans ABC : $\tan \alpha = \frac{4}{25}$ $\Leftrightarrow \alpha = \arctan \frac{4}{25}$

$\simeq 9{,}09°$

$\Rightarrow \beta = 67 - 9{,}09 = 57{,}91°$

Dans ACD $\tan 57{,}91° = \frac{|CD|}{25}$

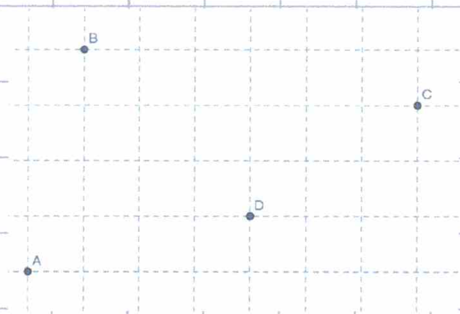
$\Leftrightarrow |CD| \simeq 39{,}87m$

$\Rightarrow h = 43{,}87m$

Chapitre 3

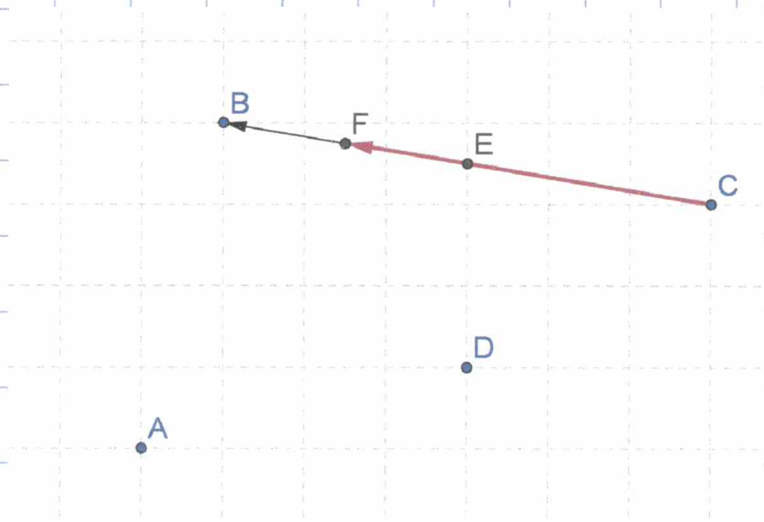
Géométrie

1. Soient les points A, B, C et D du plan représentés ci-dessus.

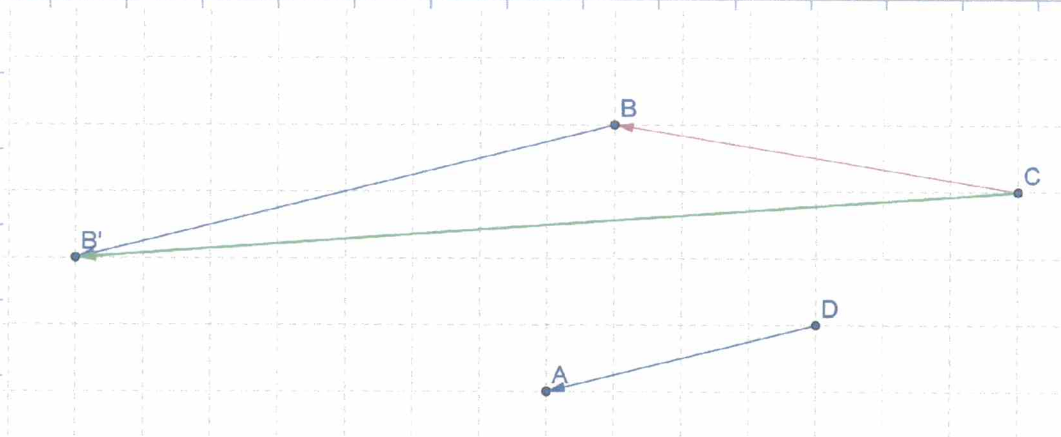


   (a) Déterminer graphiquement un représentant des vecteurs suivants :

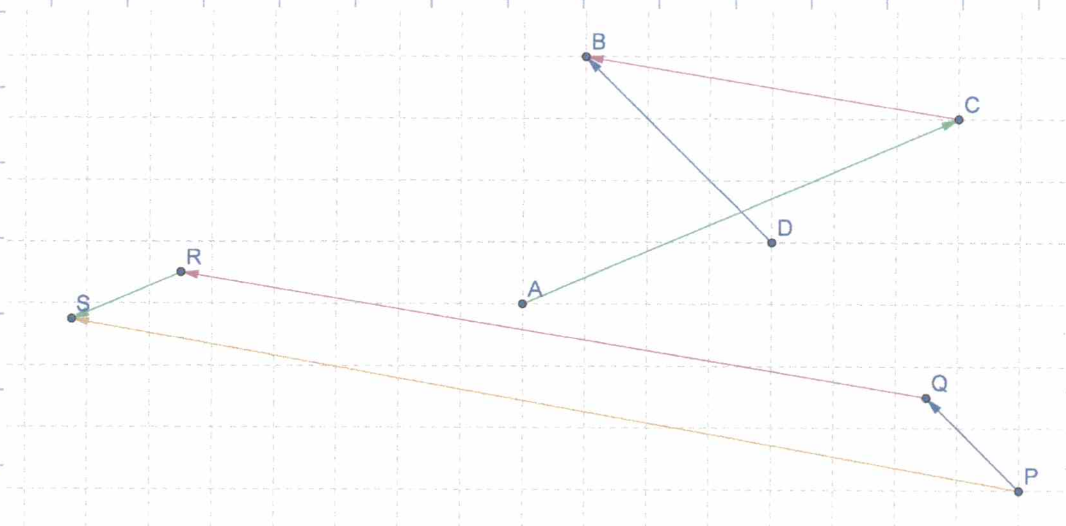
      i. $-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$



ii. $\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AD}$

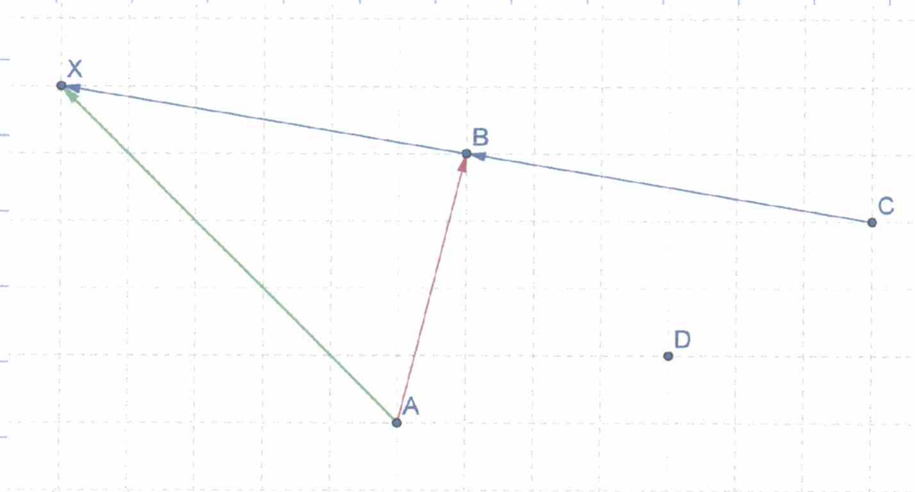


iii. $\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{CB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



(b) Trouver le point X tel que

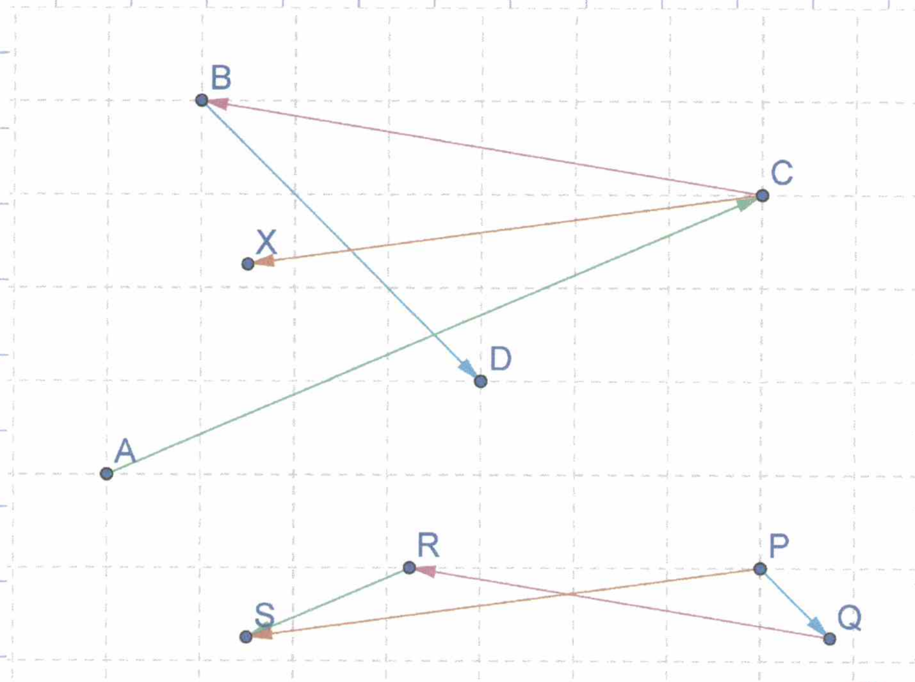
i. $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{CB}\right)$



$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

ii. $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{AC}$



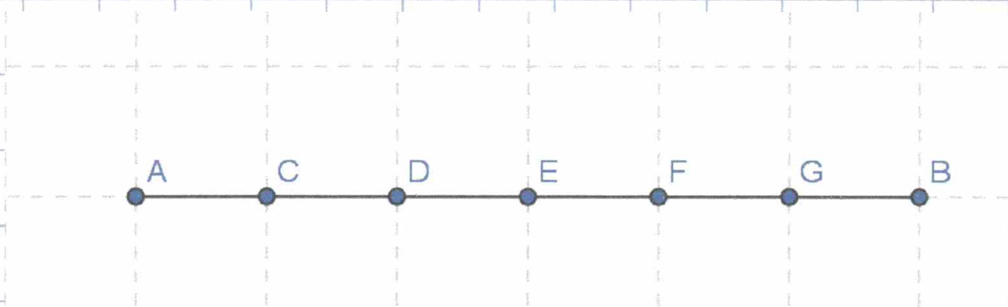
$+3\overrightarrow{CX}$

$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{BD} + 3(\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CX} - 3\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$

2. Le segment $[AB]$ est divisé en 6 parties égales.



Compléter les relations suivantes :

(a) par la lettre qui convient :

i. $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EF}$

ii. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{0}$

iii. $\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AF}$

(b) par le nombre qui convient :

i. $\overrightarrow{CE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

ii. $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BF}$

iii. $\overrightarrow{DE} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BF}$

3. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre I.
Compléter les relations suivantes (il ***faut*** rajouter des points pour construire ces figures) :

(a) par la lettre qui convient :

i. $\overrightarrow{AC'} = -2\overrightarrow{AI}$

ii. $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{0}$

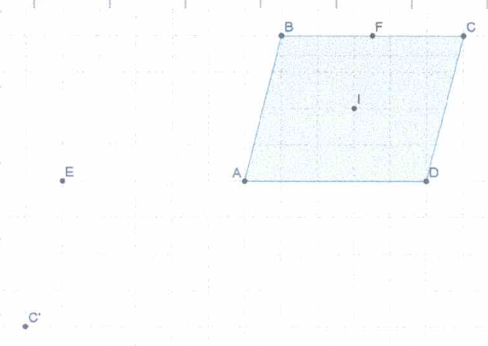
iii. $\overrightarrow{CI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BE}$

(b) par le nombre qui convient :

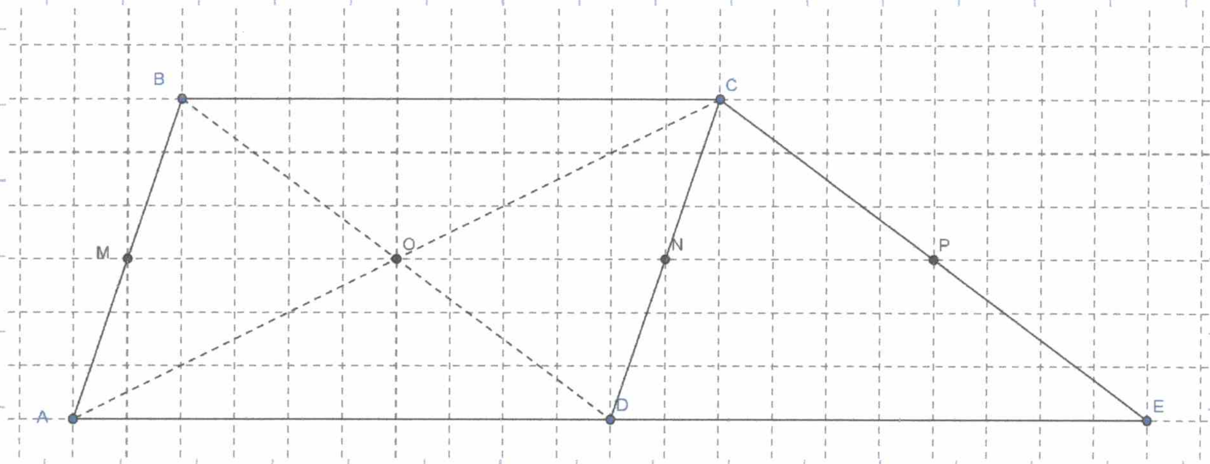
i. $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

ii. $\overrightarrow{AI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

iii. $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{DI}$



4. $ABCD$ et $BCED$ sont deux parallélogrammes. M, N et P sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$ et $[CE]$.



(a) Citer deux représentants du vecteur $\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CN}$

(b) Compléter les égalités suivantes :

i. $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{CO}$

ii. $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

iii. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BD}$

iv. $\overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DO}$