Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°6 - Solutions

Fractions algébriques et équations réductibles au 1er degré

Le 14 novembre 2024 Classe: 4F

.../5 1. Simplifier l'expression suivante :

$$\frac{-1}{2(x+3)^2} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3(x+3)} + \frac{1}{3x}$$

Les conditions d'existence sont $x \neq -3$ et $x \neq 0$.
Le PPCM des dénominateurs est $2.3.x^2.(x+3)^2$.
Les simplification successives donnent :

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{2(x+3)^2} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3(x+3)} + \frac{1}{3x} \\
&= \frac{\left[-3x^2\right] - \left[3(x+3)^2\right] - \left[2x^2(x+3)\right] + \left[2x(x+3)^2\right]}{6x^2(x+3)^2} \\
&= \frac{\left[-3x^2\right] - \left[3(x^2+6x+9)\right] - \left[2x^3+6x^2\right] + \left[2x(x^2+6x+9)\right]}{6x^2(x+3)^2} \\
&= \frac{-3x^2 - 3x^2 - 18x - 27 - 2x^3 - 6x^2 + 2x^3 + 12x^2 + 18x}{6x^2(x+3)^2} \\
&= \frac{-\cancel{3x^2} - \cancel{3x^2} - \cancel{18x} - 27 - \cancel{2x^3} - \cancel{6x^2} + \cancel{2x^3} + \cancel{12x^2} + \cancel{18x}}{6x^2(x+3)^2} \\
&= \frac{-27}{6x^2(x+3)^2} \\
&= \frac{-9}{2x^2(x+3)^2}
\end{aligned}$$

2. Résoudre les équations suivantes :

.../5 (a) $3x(x^2-1) = 5(1-x^2)$

Il s'agit d'une équation réductible au premier degré. Pour la résoudre, on égal un des membres à zéro et on factorise la nouvelle équation obtenue. On a successivement :

$$\begin{array}{ll}
3x(x^2-1) = 5(1-x^2) & \Leftrightarrow 3x(x^2-1) - 5(1-x^2) = 0 \\
\Leftrightarrow 3x(x^2-1) + 5(x^2-1) = 0 & \Leftrightarrow (x^2-1)(3x+5) = 0 \\
\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(3x+5) = 0 & \\
\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+1=0 \\ 3x+5=0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ x=-\dfrac{5}{3} \end{cases}
\end{array}$$

et la solution est S :$\left\{-\frac{5}{3}, -1, 1\right\}$.

.../5 (b) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2+x}$

Il s'agit d'une équation fractionnaire. On factorise tous les dénominateurs. On a :

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x(x+1)}$$

Les conditions d'existence sont $x \neq -1$ et $x \neq 0$.
On réduit les deux membres au même dénominateur. On a successivement :

$$\begin{array}{l} \frac{2(x+1)+x}{\cancel{x(x+1)}} = \frac{2}{\cancel{x(x+1)}} \\ \Leftrightarrow 2x+2+x = 2 \\ \Leftrightarrow 3x = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \end{array}$$

Cette solution est à rejeter en raison des C.E. La solution est donc S :ϕ.

.../5 (c) $1 + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+2} = 0$

De la même manière qu'à la question précédente, les CE sont $x \neq -2$ et $x \neq 2$.
On a alors successivement :

$$\begin{array}{l} 1 + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+2} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-4+3(x+2)+(x-2)}{\cancel{(x-2)(x+2)}} = 0 \\ \Leftrightarrow x^2-4+3x+6+x-2 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2+4x = 0 \\ \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array} \right. \end{array}$$

Les deux solutions sont acceptables. On a donc S :$\{-4, 0\}$