

Calcul matriciel : Solutions

1. Calculer $A + B$ et $2A - 3B$ dans les cas suivants :

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 14 \\ 10 & 8 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -24 & -16 & 14 \\ 10 & 5 & -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calculer, si possible, les produits $A.B$ et $B.A$ et conclure si

$$(a) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 & 3(-5) + 0 \cdot 1 + (-1)(-1) & -3 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 0(-5) + 4 \cdot 1 + 2(-1) & -2 \\ 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 0 & 5(-5) + (-3) \cdot 1 + 1(-1) & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -14 & -3 \\ 16 & 2 & -2 \\ -7 & -29 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 3 & -20 & -11 \\ 2 & 10 & -4 \\ 15 & -13 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit de matrice n'est pas commutatif.

$$(b) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 18 & 0 & -2 \\ -40 & 10 & -10 \end{pmatrix} \quad 18 = 2.4 + 1.1 + 0.0 + (-3)(-3)$$

$B.A$: impossible car nombre de col. de $B = 3$
et nombre de ligne de $A = 2$

3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier, en justifiant, si

(a) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$$\bullet A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\bullet (A+B)(A-B) = A.A - AB + BA - B.B$$

$\neq 0$ car le produit de matrices n'est pas commutatif

$$(b) A(B + C) = AB + AC$$

$$\therefore B + C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A + B$; $B + A$; $A.B$; $B.A$. Conclure.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = B + A$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 7 \\ 3 & -11 & -3 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 17 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Calculer la transposée de A (tA), Ax , tyAx et txAy .

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$${}^tyAx = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = (-6)$$

$${}^txAy = (-6)$$

$$\rightarrow {}^t({}^tyAx) = {}^txAy$$

6. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Montrer que $A^2 = A + 2I^1$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Déterminer une matrice B tel que $AB = I$

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a - d - g & b - e - h & c - f - i \\ -a + d - g & -b + e - h & -c + f - i \\ -a - d + g & -b - e + h & -c - f + i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 3 systèmes de 3 ég à 3 inc.

$$\begin{cases} a - d - g = 1 & (1) \\ -a + d - g = 0 & (2) \\ -a - d + g = 0 & (3) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (1) + (2) \Rightarrow -2g = 1 \\ (1) + (3) \Rightarrow -2d = 1 \\ (2) + (3) \Rightarrow -2a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = -\frac{1}{2} \\ g = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Les autres systèmes se résolvent de la même manière.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

7. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -13 & 3-3a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
 Pour quelle(s) valeur(s) de a a-t-on $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) \\ = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$AB + BA = 2AB \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 156 & 15-15m \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 156 & 36m-36 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Il faut que $15-15m = 36m-36$
 $\Leftrightarrow m = 1$

8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calculer A^2 , A^3 et A^4

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{red } 0 &= a_n \\ \text{blue } 0 &= b_n \end{aligned}$$

(b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n peut s'écrire sous la forme $A^n =$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration par récurrence :

. La propriété est vérifiée pour $n = 2, 3, 4$

. On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

on va démontrer qu'elle est vraie pour $n+1$

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a_n+1 & a_n+b_n \\ 0 & 1 & a_n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La forme de la matrice est la même que A^n

(c) Déterminer les valeurs de a_n et b_n en fonction de n .

On voit que $a_n = n$

$$\text{On a } b_{n+1} = b_n + a_n = b_n + n \quad (\text{f. } \otimes)$$

Ici $b_1 = 0$ (f. matrice A)

$$b_2 = b_1 + 1 = 0 + 1$$

$$b_3 = b_2 + 2 = 0 + 1 + 2$$

$$b_4 = b_3 + 3 = 0 + 1 + 2 + 3$$

b_n représente la somme de tous les naturels inférieurs à n .

Soit la suite $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$. C'est une S.A. de premier terme $u_1 = 0$ et de raison 1. Donc $u_n = n-1$

$$\begin{aligned} S_n &= n \frac{u_1 + u_n}{2} \\ &= n \cdot \frac{0 + n-1}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \\ &= b_n \end{aligned}$$