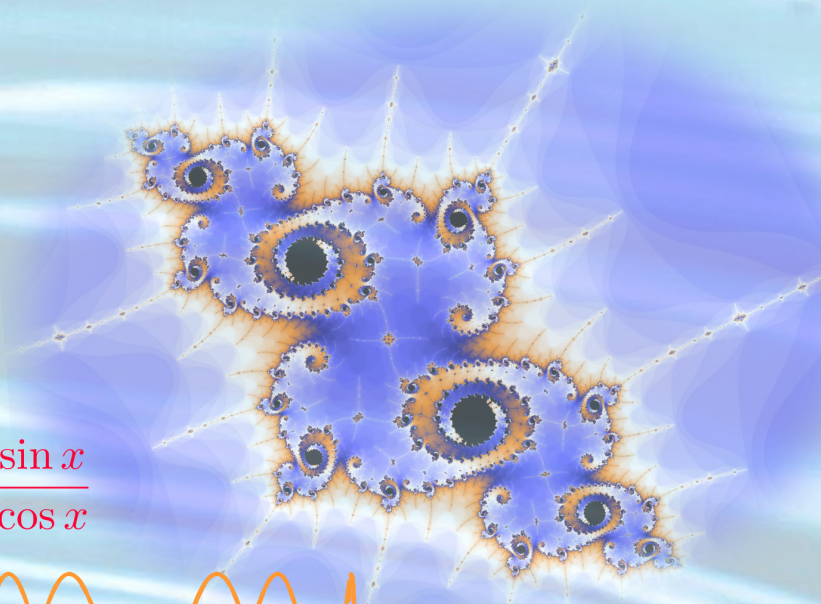
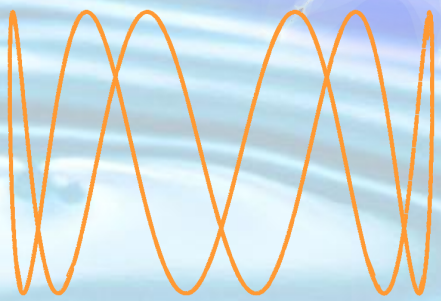
Athénée Royal Uccle 1



$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



$$x_1 \\ x_2 \rangle \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \arctan \frac{x}{1+x^2}$$

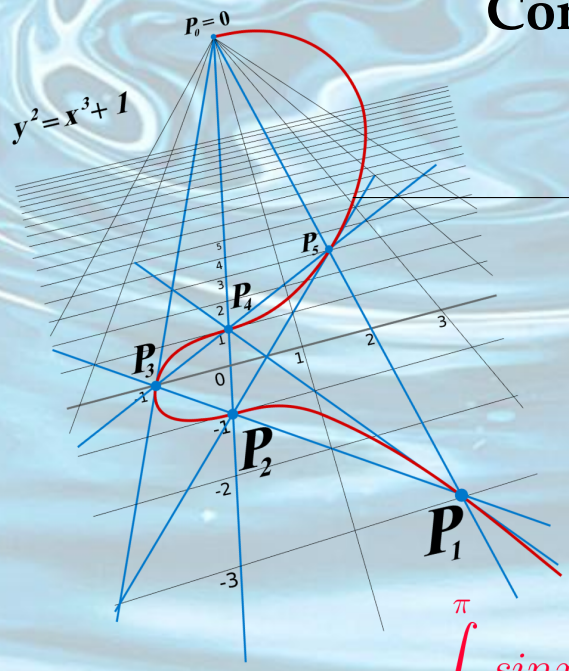
$$e^{i\pi} = -1$$

Cours de Mathématique

5ème année

Complément à 2 périodes hebdomadaires

EXERCICES



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\int_0^{\pi} sinx.e^{-x^2}\,dx$$

$$\cos\alpha = \frac{x_{\vec{a}}.x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}}.y_{\vec{b}}}{\sqrt{x^2_{\vec{a}} + y^2_{\vec{a}}}.\sqrt{x^2_{\vec{b}} + y^2_{\vec{b}}}}$$

A. DROESBEKE
Septembre 2021

A Yves Delhaye, qui m'a lancé dans LaTeX, m'a soutenu
et aidé dans le long cheminement initiatique que
ce langage nécessite, et qui, grâce à son amitié,
m'a permis de réaliser ce cours.

Ce cours lui est dédié.

Table des matières

Préface **1**

1 Compléments sur le second degré **1**

2 Compléments de trigonométrie **3**
2.1 Exercices 4

3 Compléments sur les fonctions **7**
3.1 Exercices 8

4 Calcul matriciel **9**
4.1 Exercices 10

5 Trigonométrie sphérique **13**
5.1 Exercices 13

6 Logique mathématique **17**
6.1 Exercices 18

7 Fonctions paramétriques et complexes **21**

Bibliographie **23**

Préface

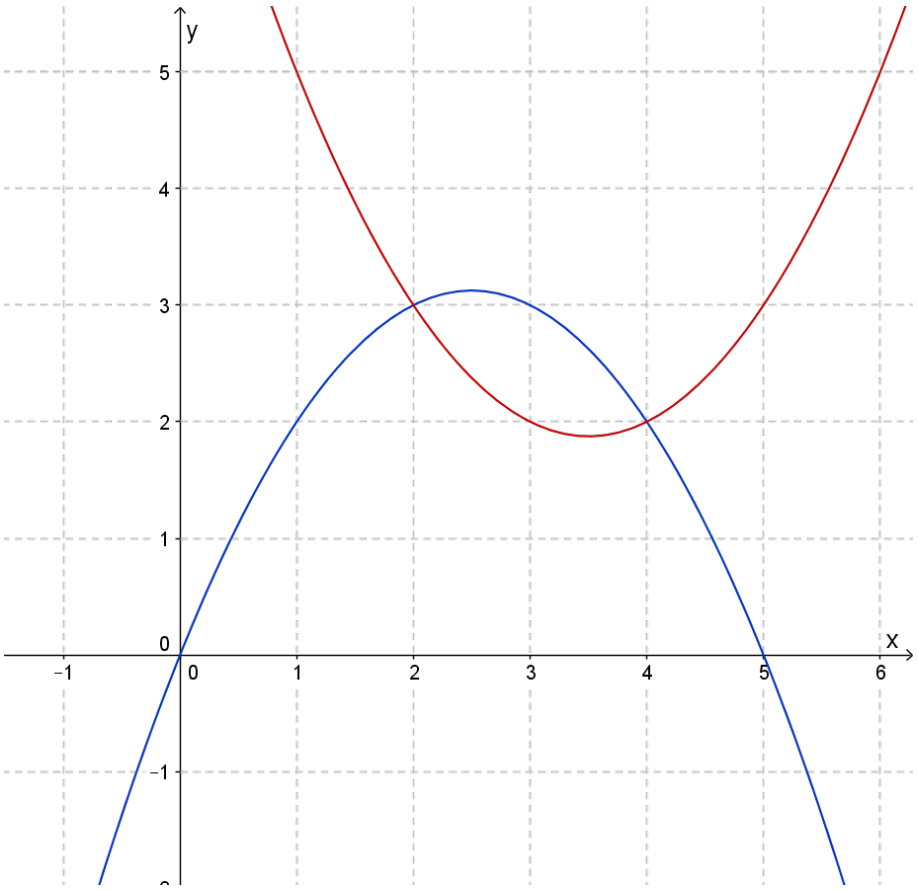
Ce cours de 5ème année de préparation à l'enseignement supérieur en mathématique (cours à 2 périodes hebdomadaires) est une totale refonte des cours réalisés précédemment. Il a été repensé en terme de pédagogie et de progression en fonction des expériences vécues.
Il comporte encore énormément de "*coquilles*". Si vous en trouvez, n'hésitez pas à m'en faire part, le cours ne pourra que s'en améliorer... (les corrections peuvent être suggérées à partir du site www.artemath.com)

Merci d'avance et bonne lecture...

Cette création est mise à disposition selon le Contrat Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Partage des Conditions Initiales à l'Identique 2.0 France.
Ce document est disponible en ligne (http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/) ou par courrier postal à Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

1 Compléments sur le second degré

1. Sur le dessin ci-dessous sont représentées deux fonctions du second degré f et g.



   (a) On sait que le discriminant de f est positif et celui de g négatif. Déterminer en justifiant le graphe de f et le graphe de g.

   (b) f a pour racines 0 et 5 et de plus $f(1) = 2$. Déterminer l'expression analytique de $f(x)$.

   (c) Les courbes de f et g se coupent aux points $A(2,3)$ et $B(4,2)$. De plus g a un minimum en $x = \frac{7}{2}$. Déterminer l'expression analytique de $g(x)$.

2. Soit l'équation :

$$a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0 \tag{1.0.1}$$

où $x \neq 0$

(a) Démontrer que cette équation est équivalente à

$$ax^4+bx^3+(2a+c)\,x^2+bx+a=0$$

(b) En déduire la solution de l'équation en la réécrivant sous la forme 1.0.1

$$2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$$

3. Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre m pour lesquelles les inéquations suivantes sont vérifiées pour tout x

$$-3<\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}<3$$

4. On considère la fonction $f(x)=x^2+kx+4$.
Déterminer la courbe décrite par le sommet de la parabole lorsque k décrit l'ensemble des réels.

5. Résoudre l'inéquation :

$$\frac{1}{x(x-1)}\leq\frac{1}{\sqrt{x(x+9)}}$$

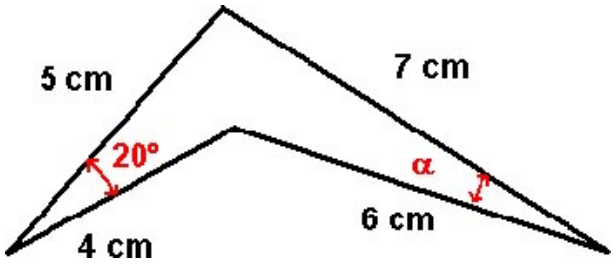
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(x-1)\sqrt{x+4}\leq 2-4x$$

2 Compléments de trigonométrie

2.1 Exercices

1. Déterminer les caractéristiques des triangles quelconques ABC dont les caractéristiques connues sont les suivantes :
   (a) $a = 6$, $\hat{B} = 35°$ et $\hat{C} = 105°$
   (b) $b = 5$, $c = 7$ et $\hat{A} = 36°$
   (c) $a = 6$, $b = 5$ et $\hat{A} = 50°$
   (d) $c = 7$, $b = 5$ et $\hat{B} = 20°$
   (e) $a = 9$, $b = 7$ et $c = 5$
2. Calculer la valeur de l'angle α et l'aire de la figure suivante.



3. Un géomètre souhaite mesurer la distance entre deux points inaccessibles C et D. Ces deux points sont situés dans le même plan horizontal. Pour ce faire, il se place en deux points A et B respectivement distants de 143m. Il mesure les angles suivants : $C\hat{A}B = 60°$, $D\hat{A}B = 45°$, $C\hat{B}A = 40°$ et $D\hat{B}A = 70°$.
   Déterminer la distance de C à D
4. Calcul de la distance entre Malvoisine et Mareuil : Méthode de Picard.
   On cherche à calculer la distance GE. En se basant sur les relevés de Picard, calculer cette distance.
   Un toise vaut 6 pieds ou 1,949 mètres.

34 *Mesure de la Terre,*

qui ne donnoient les minutes que de six en six, ils n'ont pas laissé d'approcher de la justesse autant qu'il étoit nécessaire, pour faire voir qu'on ne s'étoit pas trompé aux conclusions.

I. TRIANGLE ABC.
Pour connoître le côté AC.

CAB.....54°....4'...35".
ABC.....95.....6....55.
ACB.....30...48....30.
AB.....5663..*Toises de mesure actuelle.*
Donc AC.....
Et BC.....

II. TRIANGLE ADC.
Pour DC & AD.

DAC.....77°....25'..50".
ADC.....55.....0...10.
ACD.....47.....34.....0.
AC.....
Donc DC.....
Et AD.....

III. TRIANGLE DEC.
Pour DE & CE.

DEC.....74°....9'..30".
DCE.....40...34.....0.
CDE.....65...16...30.
DC.....
Donc DE.....
Et CE.....

par M. l'Abbé Picard. 35

IV. TRIANGLE DCF.
Pour DF.

DCF.....113°....47'...40".
DFC.....33.....40.....0.
FDC.....32.....32....20.
DC.....
Donc DF.....

Notez que dans ce quatriéme triangle, l'angle DFC a été augmenté de 10", qui manquoient à la somme des trois angles.

V. TRIANGLE DFG.
Pour DG & FG.

DFG.....92°....5'...20".
DGF.....57....34.....0.
GDF.....30....20....40.
DF.....
Donc DG.....
Et FG.....

Ensuite de ces cinq triangles, il a été facile de conclure la distance GE entre Malvoisine & Marcuil, sans supposer aucune nouvelle Observation.

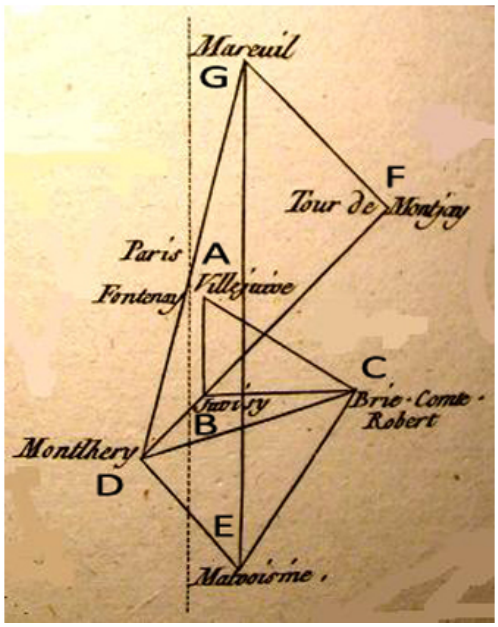


FIGURE 2.1 – Planche extraite de "Mesure de la Terre" par l'Abbé Picard (1671)

3

Compléments sur les fonctions

3.1 Exercices

1. Soit la fonction $f : x \to x + \dfrac{1}{|x-1|}$. Quel est le domaine de la fonction $g(x) = 1 + \dfrac{1}{|f(x)|}$?
2. Déterminer le domaine de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 11x - 6}{|x^2 - 5x + 6| - 2\sqrt{x^2}}$.
3. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$
   (a) i. Vérifier que le graphe ne coupe pas l'axe des x ;
   ii. Déterminer le domaine et l'image de $f(x)$;
   iii. Vérifier que le point (1,0) est centre de symétrie de la fonction
   iv. Résoudre $f(x) \geq x - 1$
   (b) Utiliser ces résultats pour ébaucher le graphe de $f(x)$.
4. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$
   (a) Déterminer dom$f$ et im$f$
   (b) Résoudre $f(x) = 0$
   (c) Comparer $f(2+x)$ à $f(2-x)$. Conclure.
   (d) Etudier le signe de $f(x)$.
   (e) Déduire une allure possible du graphe de f.
   (f) Résoudre $f(x) \geq -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{4}$ et interpréter graphiquement le résultat.
5. Sans utiliser la machine graphique, tracer le graphe de $f(x) = \dfrac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|}$
6. On définit sur $\mathbb{R}$ deux fonctions f et g par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2+2x+2}$. On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ leurs courbes respectives dans le plan muni d'un repère orthonormal.
   (a) Justifier que f et g existent pour tout x réel.
   (b) Montrer que g peut s'écrire sous la forme $g(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}$
   (c) Montrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ vérifient l'équation $x^2(x+1)^2 - 1 = 0$ et déterminer les coordonnées de ces points d'intersection.
   (d) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ admettent chacune un axe de symétrie dont on précisera l'équation.
   (e) Montrer que $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une symétrie dont on déterminera le centre.

4 Calcul matriciel

4.1 Exercices

Remarque préliminaire : On pensera régulièrement à **vérifier** les résultats avec la calculatrice ! ! !

1. Calculer $A + B$ et $2A - 3B$ dans les cas suivants :
   (a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
2. Calculer, si possible, les produits $A.B$ et $B.A$ et conclure si
   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   Vérifier, en justifiant, si
   (a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
   (b) $A(B + C) = AB + AC$
4. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $A + B$; $B + A$; $A.B$; $B.A$. Conclure.
5. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   Calculer la transposée de $A({}^tA)$, Ax, ${}^tyAx$ et ${}^txAy$.
6. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^2
   (b) Montrer que $A^2 = A + 2I$ [1]
   (c) Déterminer une matrice B tel que $AB = I$
7. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -13 & 3 - 3a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
   Pour quelle(s) valeur(s) de a a-t-on $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

1. I est la matrice unité

8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer A^2, A^3 et A^4
   (b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n peut s'écrire sous la forme $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) Déterminer les valeurs de a_n et b_n en fonction de n

9. Soit le polygone $ABCDE$ définit par les points $A(-2,2)$, $B(1,4)$, $C(4,0)$, $D(2,-3)$ et $E(-1,-1)$.
   Déterminer graphiquement l'image du polygone par :
   – la symétrie d'axe $d \equiv y = x$ suivi de
   – la translation de vecteur $\vec{u}$: $(-3,2)$ suivi de
   – la rotation de centre O et d'angle 135°
   Vérifier par calcul matriciel les résultats obtenus.

10. On donne le même polygone qu'à la question précédente. Trouver l'image du polygone par la rotation de centre A et d'angle -60°. Vérifier par calcul matriciel les résultats obtenus.

11. On donne le même polygone qu'à la question précédente. Trouver l'image du polygone par l'homothétie de centre D et de rapport 2. Vérifier par calcul matriciel les résultats obtenus.

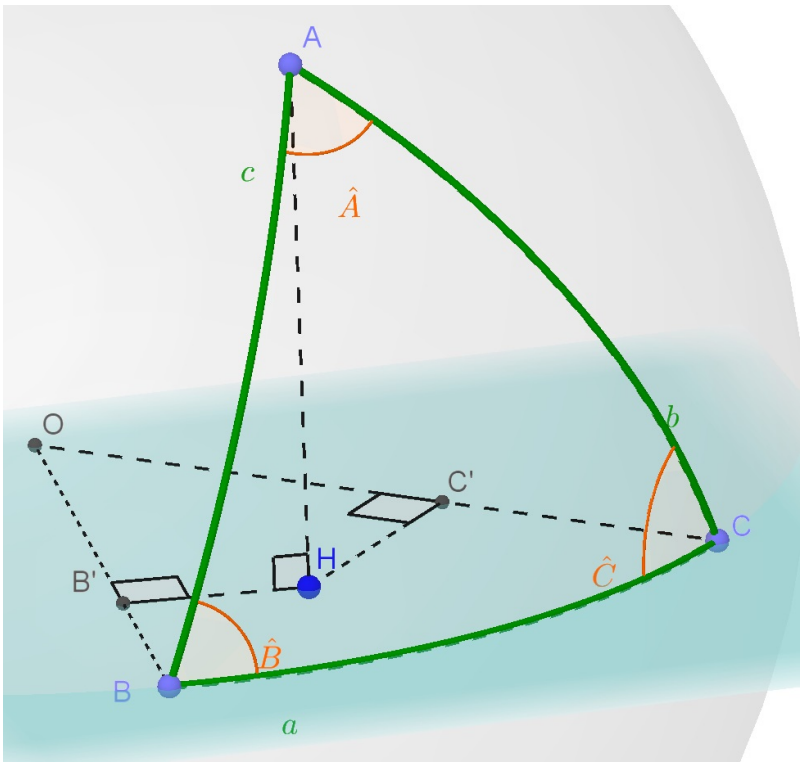
5 Trigonométrie sphérique

5.1 Exercices

1. On va obtenir ici la formule d'analogie des sinus :

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}$$

On note H le projeté orthogonal de A sur le plan OBC et B' et C' les projetés orthogonaux de H respectivement sur OB et OC.
La figure suivante représente la situation :



(a) En se plaçant dans des plans adéquats, écrire les longueurs AB' et AC' en fonction de b et c.

Remarque Dans le cadre du chapitre relatif à l'orthogonalité (cours de math 6h), nous démontrerons les théorèmes suivants :
- Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan ;
- Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, elle est perpendiculaire au plan.

(b) i. Expliquer pourquoi l'angle $\widehat{AB'H}$ est égal à $\hat{B}$.

ii. En déduire AH en fonction de AB' et de $\hat{B}$.

(c) Ecrire de la même manière AH en fonction de AC' et de $\hat{C}$

(d) Déduire des questions précédentes que :

$$\sin c \sin \hat{B} = \sin b \sin \hat{C}$$

(e) En déduire la formule d'analogie des sinus.

2. Bordeaux et Belgrade sont situés pratiquement sur le même parallèle (44°55′). La longitude de Bordeaux est 0°31′ Ouest, celle de Belgrade est 20°30′ Est.
   Calculer la distance entre ces deux villes :

   (a) en creusant un tunnel permettant d'aller en ligne droite de l'une à l'autre ;

   (b) en se déplaçant le long d'un arc de grand cercle [1] (route orthodromique) ;

   (c) en se déplaçant le long du parallèle commun à ces deux villes (route loxodromique).

   On prendra R = 6378 km pour le rayon terrestre.

1. Pour rappel, un grand cercle est un cercle de centre O et passant par un point donné

6 Logique mathématique

6.1 Exercices

1. Soit p la proposition "X estime Y" et q la proposition "Y estime X". Ecrire en utilisant les connecteurs logiques les phrases suivantes :
   (a) X déteste Y ;
   (b) X estime Y mais Y ne lui rend pas son estime ;
   (c) X et Y s'estiment ;
   (d) X et Y se détestent ;
   (e) Y est estimé par X mais X est détesté par Y ;
   (f) X et Y ne se détestent ni l'un ni l'autre.
2. Montrer, à l'aide des tables de Boole que les propositions suivantes ont même valeur de vérité
   (a) $(p \wedge q) \wedge r$ et $p \wedge (q \wedge r)$
   (b) $p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
3. Pour chacune des formules suivantes :
   (a) construire sa table de vérité ;
   (b) indiquer s'il s'agit d'une tautologie, d'une contradiction ou ni l'une ni l'autre :
      i. $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \wedge q)$
      ii. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
      iii. $(p \wedge q) \vee (\neg(p \wedge r) \vee q \Rightarrow r)$;
      iv. $(x \vee y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee (((u \vee x) \Rightarrow u) \Leftrightarrow (y \vee z)))$.
4. On considère les énoncés suivants :
   – (A) *"Si Pierre est rentré chez lui, alors Jean est allé au cinéma."*
   – (B) *"Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui."*
   – (C) *"Si Jean est allé au cinéma, alors Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui."*
   – (D) *"Marie n'est pas à la bibliothèque et Jean est allé au cinéma."*
   – (E) *"Pierre est rentré chez lui."*

   Formaliser cette famille d'énoncés en calcul propositionnel. On notera (A), (B), (C), (D) et (E) les cinq formules obtenues.
   Montrer que l'on peut déduire (E) des prémisses (A), (B), (C), (D)
5. Brown, Jones et Smith sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la manière suivante :
   – BROWN : "*Jones est coupable et Smith est innocent.*" (I)
   – JONES : "*Si Brown est coupable alors Smith aussi.*" (II)
   – SMITH : "*Je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable.*" (III)

   Soient B, J et S les énoncés « Brown est innocent », « Jones est innocent» et « Smith est innocent ».
   (a) Exprimer le témoignage de chacun des suspects dans le symbolisme logique.
   (b) Calculer les valeurs de vérités des trois formules obtenues.
   (c) Les témoignages des trois suspects sont-ils compatibles ?

(d) Le témoignage de l'un des suspects découle-t-il de celui d'un autre suspect ? Si oui, desquels deux témoignages s'agit-il ?

(e) En supposant que tous sont innocents, lequel aurait commis un faux serment ?

6. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

(a) f est la fonction nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

(b) Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

(c) f est l'identité de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même).

(d) Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.

(e) f est croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

(f) L'équation $\sin x = x$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.

(g) Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, M est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de M à Ω vaut R.

7. Etudier la signification française et la valeur de vérité des propositions suivantes et les nier :

(a) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z} : x \leq y$

(b) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq y$

(c) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N} : x \leq y$

(d) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y$

8. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnelle.

9. Soit n un nombre entier. Démontrer par contraposition que si n^2 est impair alors n est impair.

10. Démontrer par récurrence que

(a) $1 + 3 + 5 + .. + (2n - 1) = n^2$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : 4^n + 2$ est divisible par 3

(d) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

7 Fonctions paramétriques et complexes

1. Discuter le nombre des asymptotes au graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$
2. Soit la fonction $f(x) = ax + \dfrac{b}{(x+c)^2}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}_0$ Déterminer a, b et c pour que le graphe de $f(x)$
   – admette une asymptote parallèle à la droite $d \equiv y = x - 1$
   – admette l'asymptote d'équation $d' \equiv x = -1$
   – comprenne le point de coordonnées (0,4)
   Déterminer les caractéristiques du graphique de $f(x)$ pour les valeurs de a, b et c trouvées.
3. Donner l'expression analytique d'une fonction dont le graphe cartésien admet :
   – la droite d'équation $y = 5x - 6$ comme asymptote ;
   – la droite d'équation $x = 2$ comme asymptote.
4. On donne la fonction définie par $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+px+q}$.
   Déterminer, dans chacun des cas suivants pris séparément, un coefficient ou la relation qui existe entre les coefficients lorsque :
   (a) l'asymptote horizontale est la droite d'équation $y = 2$
   (b) l'asymptote horizontale est la droite d'équation $y = 0$
   (c) une des asymptotes verticales est la droite d'équation $x = 3$
   (d) les asymptotes verticales sont les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$
   (e) l'unique asymptote verticale est la droite d'équation $x = 1$
   (f) le graphique n'admet pas d'asymptote verticale
5. On donne les fonctions $f_m(x) = \dfrac{m-x}{mx-1} (m \in \mathbb{R}_0)$
   (a) Démontrer que les fonctions $f_m(x)$ comprennent deux points dont les coordonnées sont indépendantes de m ;
   (b) Déterminer l'ensemble des points d'intersection des 2 asymptotes de chacun des graphiques ;

6. On considère les fonctions $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $g_m(x) = m\dfrac{x-1}{x+1} (m \in \mathbb{R}_0)$. Soient F et G_m leurs graphiques respectifs.
   (a) Pour quelles valeurs de m, F et G_m se coupent-elles en deux points distincts A et B ?
   (b) Calculer les coordonnées de A et B en fonction de m ;
   (c) Etablir l'équation de AB et vérifier qu'elle passe par un point fixe.

7. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x(2-x)}$
   Quel est l'ensemble des milieux des segments découpés par F sur des droites parallèles à Ox ?

8. Soit m, réel, un paramaètre non nul. Soit $\mathcal{C}_m$ les courbes d'équation :
$$y = \frac{x}{m} + 3 - \frac{2}{m} + \frac{1-2m}{mx}$$
   Démontrer que ces courbes ont un point commun et qu'elles sont tangentes en ce point.

9. On considère la fonction $f_m(x) = \dfrac{x^2 - mx}{x^2 - 4x + 3}$ $(m \in \mathbb{R})$.
   (a) Etudier les variations de f_4 et déterminer l'équation de l'axe de symétrie du graphe de f_4.
   (b) Préciser la valeur de m pour que le graphe de f_m
   – n'admette ni maximum ni minimum ;
   – admette un maximum et un minimum ;
   – admette seulement un minimum.
   (c) Calculer, en fonction de m, les coordonnées du point A commun au graphique de f_m et à son asymptote parallèle à Ox.
   (d) Calculer les coordonnées du point B commun au graphique de f_m et à OA $(O \neq A \neq B)$

10. On considère les fonctions $f_m(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m+1)x + 3}$ $(m \in \mathbb{R})$
    (a) Montrer que les graphiques $\mathcal{C}_m$ de f_m comprennent trois points fixes.
    (b) Montrer que, si le point I commun au graphique de f_m et à l'asymptote parallèle à Ox a pour abscisse $x = \frac{3}{2}$ alors $m = 0$.
    (c) Etudier les variations de f_0.
    (d) Déterminer l'équation aux abscisses des points communs à $\mathcal{C}_0$ et à $d \equiv y = tx$ $(t \in \mathbb{R})$.
    Discuter, suivant t, le nombre de points communs à $\mathcal{C}_0$ et à d.
    Déterminer l'équation de chacune des tangentes à $\mathcal{C}_0$ comprenant O ; dans chaque cas, déterminer les coordonnées du point de contact. Etudier la position de $\mathcal{C}_0$ par rapport à sa tangente en O.
    (e) Dans le cas où d et $\mathcal{C}_0$ ont deux points communs A et B différents de O, trouver l'ensemble des milieux de $[AB]$ et en déterminer les points communs à $\mathcal{C}_0$

Bibliographie

1. Livres
   (a) **Ch. BOECKAERT - J. SENGIER - F. BUEKENHOUT,** *Géométrie à la surface de la terre,* **2011,** UREM
   (b) **F. BUCKENHOUT - Ch. BOECKAERT - S.GUTT - A.ANDERSEN,** *La somme des angles d'un triangle sphérique est-elle égale à 180° ?,* **2009,** UREM
2. Articles
   (a) **R.HASSANI,** *Outils Mathématiques,* **2015,** Université de Nice - Sophia Antipolis
3. Sites internet
   (a) http :\\fr.wikipedia.org\wiki\Géométrie_euclidienne
   (b) http :\\fr.wikipedia.org\wiki\Théorème
   (c) http :\\fr.wikipedia.org\wiki\Logique
   (d) http :\\www.maths-france.fr\MathSup\CoursPartie1\Logique.pdf
   (e) http ://steteil2.free.fr/an2013/hydro/Trigo%20Sph%C3%A9rique%20Cor2.pdf