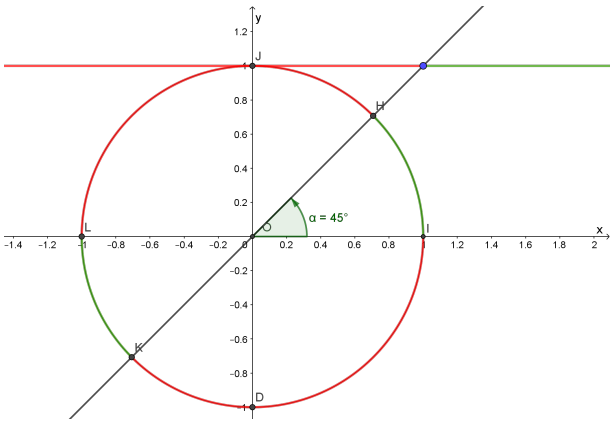
1. Résoudre et donner toutes les solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$:

$$\cot\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \geq 1$$

D'après le cercle trigonométrique, on trouve :



La solution, compte tenu des CE de $\cot x$ est donc : $\frac{\pi}{3} - 2x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right] + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.
Pour trouver la valeur de x, on a successivement :

$$0 < \frac{\pi}{3} - 2x \leq \frac{\pi}{4} \quad + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < -2x \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \quad + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < -2x \leq -\frac{\pi}{12} \quad + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} \leq 2x < \frac{\pi}{3} \quad + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{24} \leq x < \frac{\pi}{6} \quad + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Enfin, pour trouver les solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, on donne deux valeurs à k. On donne à k la valeur 0 et on trouve :

$$x \in \left[\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{6}\right[$$

Si on donne à k la valeur 1, on trouve :

$$x \in \left[\frac{13\pi}{24}, \frac{2\pi}{3}\right[$$

Si on donne à k la valeur 2, on trouve :

$$x \in \left[\frac{25\pi}{24}, \frac{7\pi}{6}\right[$$

qui est en dehors de l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Il faut donc donner à k la valeur -1, on trouve :

$$x \in \left[\frac{-11\pi}{24}, \frac{-\pi}{3}\right[$$

Enfin, en donnant à k la valeur -2 :

$$x \in \left[\frac{-23\pi}{24}, \frac{-5\pi}{6}\right[$$

La solution est donc :

$$x \in \left[\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{13\pi}{24}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{-11\pi}{24}, \frac{-\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{-23\pi}{24}, \frac{-5\pi}{6}\right[$$

2. Résoudre et donner toutes les solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2 < 0$$

En transformant l'inéquation pour avoir une homogénéité de fonctions trigonométriques, on a :

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2(1-\sin^2 x) - \sqrt{3}\sin x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x < 0$$

Les zéros de cette inéquation [1] sont $\sin x = 0$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On peut dès lors dresser le TS :

$\sin x$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0	
In	-	0	+	0	-

Vu que $-1 \leq \sin x \leq 1$, on a donc :

$$\sin x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup]0, 1]$$

ou, à l'aide du cercle trigonométrique :

$$S : x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[\cup]0, \pi]$$

3. Résoudre et donner toutes les solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$

$$\frac{1-2\cos 2x}{\cos 2x + \cos x} \leq 0$$

C'est une inéquation générale, il faut donc faire un TS.
Cherchons les zéros du numérateur (dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$). On a :

$$1 - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

De même pour le dénominateur :

$$\cos 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0 \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -1$$

1. obtenu par factorisation ou Δ

En terme d'angle on a

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ \\ x = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$:

$$x = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \pi$$

Le tableau de signe est donc :

	x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$N(x)$	$1-2\cos 2x$		-	0	+		+	0	-	0	+		+	0	-	
$D(x)$	$2\cos x - 1$		-		-	0	+		+		+	0	-		-	
	$\cos x + 1$	0	+		+		+		+		+		+		+	0
	In	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	+	0	-	0	+	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$

La solution est donc :

$$S : x \in \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$$