Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Evaluation formative n°3 - Solutions

Dérivées et applications de la dérivées

Le 25 juin 2020 Classe: 5B

1. Calculer les dérivées suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'(x-2) - \sqrt{x^2+1}(x-2)'}{(x-2)^2} \\
&= \frac{\dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}(x-2) - \sqrt{x^2+1}}{(x-2)^2} \\
&= \frac{\dfrac{(2x)}{2\sqrt{x^2+1}}(x-2) - \sqrt{x^2+1}}{(x-2)^2} \\
&= \frac{(x)(x-2) - (x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}(x-2)^2} \\
&= \frac{x^2 - 2x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2+1}(x-2)^2} \\
&= \frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+1}(x-2)^2}
\end{aligned}
$$

(b) $g(x) = (x^3+1)\sqrt[3]{1-x^3}$

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= (x^3+1)'\sqrt[3]{1-x^3} + (x^3+1)\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)' \\
&= 3x^2\sqrt[3]{1-x^3} + (x^3+1)\left((1-x^3)^{\frac{1}{3}}\right)' \\
&= 3x^2\sqrt[3]{1-x^3} + (x^3+1)\frac{1}{3}(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}(1-x^3)' \\
&= 3x^2\sqrt[3]{1-x^3} + (x^3+1)\frac{1}{3}(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}(-3x^2) \\
&= 3x^2\sqrt[3]{1-x^3} - x^2(x^3+1)\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \\
&= \frac{3x^2(1-x^3) - x^2(x^3+1)}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \\
&= \frac{2x^2 - 4x^5}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \\
&= \frac{2x^2(1-2x^3)}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}
\end{aligned}
$$

(c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}+x} + \dfrac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}-x}$

Simplifions d'abord la fonction :

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}+x} + \frac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}-x} \\
&= \frac{(\sqrt{x^2+3}-x)^2 + (\sqrt{x^2+3}+x)^2}{(\sqrt{x^2+3}+x)(\sqrt{x^2+3}-x)} \\
&= \frac{(x^2+3-2x\sqrt{x^2+3}+x^2) + (x^2+3+2x\sqrt{x^2+3}+x^2)}{x^2+3-x^2} \\
&= \frac{4x^2+6}{3}
\end{aligned}$$

La dérivée de $h(x)$ est donc $h'(x) = \dfrac{8x}{3}$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)}{(x-1)^3}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left[x^2(x+1)\right]'(x-1)^3 - x^2(x+1)\left[(x-1)^3\right]'}{(x-1)^6} \\
&= \frac{\left[2x(x+1)+x^2\right](x-1)^3 - 3x^2(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^6} \\
&= \frac{(3x^2+2x)(x-1)^3 - 3x^2(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^6} \\
&= (x-1)^2\frac{(3x^2+2x)(x-1) - 3x^2(x+1)}{(x-1)^6} \\
&= \frac{3x^3-3x^2+2x^2-2x-3x^3-3x^2}{(x-1)^4} \\
&= \frac{-4x^2-2x}{(x-1)^4} \\
&= \frac{-2x(2x+1)}{(x-1)^4}
\end{aligned}$$

Le tableau de variation est le suivant :

x		$-\frac{1}{2}$		0		1	
$-2x$	+		+	0	-		-
$2x+1$	-	0	+		+		+
$(x-1)^4$	+		+		+	0	+
$f''(x)$	-	0	+	0	-	$\nexists$	-
	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	AV	$\searrow$
		$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{27}\right)$		$(0,0)$			