

Chapitre 2

Algèbre

1. Résoudre $\begin{cases} x - |y + 1| = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases}$

$$|y+1| \Rightarrow \begin{cases} y+1 & \text{si } y \geq -1 \\ -(y+1) & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

• $y \geq -1$: $\begin{cases} x - y - 1 = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + x - 2 - 10 = 0 \end{cases} \quad (*)$

$$\Delta = 1 + 48 = 49 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \begin{matrix} 3 \\ -4 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} \begin{matrix} 1 \\ -6 \end{matrix} \quad (AR) \quad \rightarrow S_1: \{(3, 1)\}$$

• $y < -1$: $\begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - x - 10 = 0 \end{cases}$

$$\Delta = 1 + 40 = 41 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$S_2: \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{41}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{41}}{2} \right) \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2$$

2. Déterminer les valeurs de m pour que le système suivant soit compatible

$$\begin{cases} \frac{x+m}{m} < \frac{1}{4} \\ mx+1 > m \end{cases}$$

$$\underline{CE} : m \neq 0$$

$$\bullet \underline{m > 0} : \begin{cases} x < \frac{m}{4} - m \\ x > \frac{m-1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3m}{4} \\ m > \frac{m-1}{m} \end{cases}$$

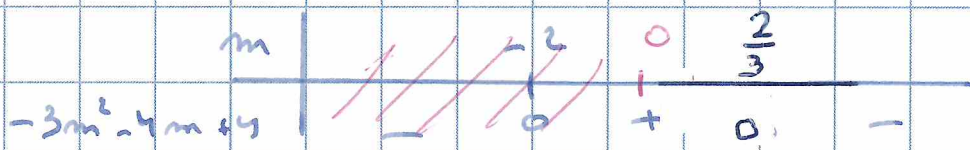
Pour que le système soit compatible, il faut :

$$\frac{m-1}{m} < -\frac{3m}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4m-4 < -3m^2 \Leftrightarrow -3m^2-4m+4 > 0$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

$$m_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{-6} \begin{cases} -2 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$



$$\Rightarrow m \in]-2, \frac{2}{3}[$$

$$\bullet \underline{m \leq 0} : \begin{cases} x > \frac{m}{4} - m \\ x < \frac{m-1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3m}{4} \\ x < \frac{m-1}{m} \end{cases}$$

la cond. de compatibilité est : $-\frac{3m}{4} < \frac{m-1}{m}$

$$\Leftrightarrow -3m^2 > 4m-4 \Leftrightarrow -3m^2-4m+4 > 0$$

la condition est la même, et la solution est

$$m \in]-2, 0[$$

$$\Rightarrow m \in]-2, 0[\cup]0, \frac{2}{3}[$$

3. Résoudre

(a) $\sqrt{x+5} = 7 - \sqrt{2x+8}$

$$\underline{CE} : \left. \begin{array}{l} x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5 \\ 2x+8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \end{array} \right\} x \geq -4$$

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$$

$$\Leftrightarrow x+5 + 2x+8 + 2\sqrt{\quad\quad\quad} = 49$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + 18x + 10} = 36 - 3x$$

$$\underline{CE} : 36 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 12 \rightarrow x \in [-4, 12]$$

$$4(2x^2 + 18x + 10) = 9(144 - 24x + x^2)$$

$$8x^2 + 72x + 40 = 1296 - 216x + 9x^2$$

$$x^2 - 288x + 1136 = 0$$

$$\Delta = 78700$$

$$x_{1,2} = \frac{288 \pm 280}{2} \leftarrow \begin{array}{l} 4 \\ 284 \text{ (AR)} \end{array}$$

$$S : \{4\}$$

$$(b) \sqrt{10-3x} - \sqrt{x+3} - \sqrt{4x+17} = 0$$

$$\begin{aligned} \underline{CE} : \quad & 10-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{10}{3} \\ & x \geq -3 \\ & x \geq -\frac{17}{4} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 10-3x \geq 0 \\ x \geq -3 \\ x \geq -\frac{17}{4} \end{aligned}} \right\} x \in \left[-3, \frac{10}{3}\right]$$

$$\begin{aligned} 10-3x &= x+3 + 4x+12 + 2\sqrt{4x^2+29x+51} \\ -10-8x &= 2\sqrt{4x^2+29x+51} \\ -5-4x &= \sqrt{4x^2+29x+51} \end{aligned}$$

$$\underline{CE} : -5-4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{4} \Rightarrow x \in \left[-3, -\frac{5}{4}\right]$$

$$25 + 16x^2 + 40x = 4x^2 + 29x + 51$$

$$12x^2 + 11x - 26 = 0$$

$$\Delta = 1369$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm 37}{24} < \frac{13}{12} \text{ (A.R.)}$$

$$S: \{-2\}$$

$$(c) \sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{x}$$

$$\underline{\text{CE}} : \quad \begin{array}{ll} x \geq -a & a \geq 0 \Rightarrow x \in [-a, a] \\ x \leq a & a < 0 \Rightarrow \text{imp} \end{array}$$

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{x} + \sqrt{a-x}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a} + x = \cancel{x} + \cancel{a} - \cancel{x} + 2\sqrt{ax-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{ax-x^2}$$

$$\underline{\text{CE}} : x \geq 0 \\ \Rightarrow x \in [0, a]$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4ax - 4x^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 4ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x(5x-4a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4a}{5} \end{cases}$$

$$S : \left\{ 0, \frac{4a}{5} \right\}$$

(d) $x^2 + 3 = 2x^4$

$$2x^4 - x^2 - 3 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2}^2 = \frac{1 \pm 5}{4} \quad \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \text{ (A.R.)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{6}{2}})$$

$$S : \left\{ -\sqrt{\frac{6}{2}}, \sqrt{\frac{6}{2}} \right\}$$

(e) $x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0$ avec $a, b \neq 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 \\ &= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \\ &= (a^2 - b^2)^2\end{aligned}$$

$$x_{1,2}^2 = \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - b^2)}{2} \begin{matrix} \swarrow a^2 \\ \searrow b^2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = \pm a \\ x = \pm b \end{cases}$$

$$S: \{-b, -a, a, b\}$$

4. Discuter en fonction de m le nombre, le signe et la position relative des solutions de l'équation

(a) $(m-3)x^2 - 2(m+3)x + m^2 - 9 = 0$

Delta :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(m+3)^2 - 4(m-3)(m-3)(m+3) \\ &= 4(m+3)(m+3 - (m^2 - 6m + 9)) \\ &= 4(m+3)(-m^2 + 7m - 6) \\ &= -4(m+3)(m-6)(m-1)\end{aligned}$$

m	-3	+1	6				
$m+3$	-	0	+	+	+		
$-m^2+7m-6$	-	-	0	+	0	-	
Δ_n	+	0	-	0	+	0	-

Somme :

$$S = \frac{2(m+3)}{m-3}$$

m	-3	3
$m+3$	$-$	$+$
$m-3$	$-$	$+$
S	$+$	$-$

Produit :

$$P : \frac{m^2 - 9}{m-3}$$

m		-3		3		
$m^2 - 9$		$+$	0	$-$	0	$+$
$m - 3$		$-$		$-$	0	$+$
P		$-$	0	$+$	$+$	$+$

Discussion : $|x_1| > |x_2|$

m	Δ_x	P	S	Conclusions
.	+	-	+	2R $x_2 < 0 < x_1$
-3	0	0	0	1R $x = 0$
.	-	+	-	0R
1	0	+	-	1R < 0
.	+	+	-	2R < 0
3	+	X	X	1 ^{er} degré
.	+	+	+	2R > 0
6	0	+	+	1R > 0
.	-	+	+	0R

(b) $2mx - m + 3 = (m+1)x^2$

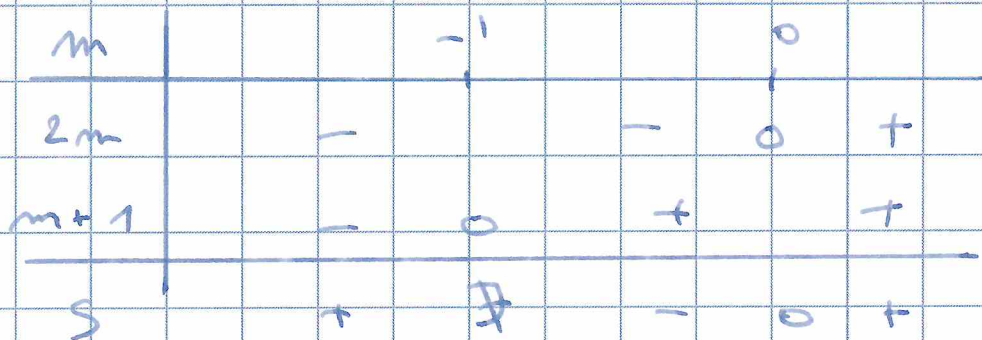
Delta :

$$\Leftrightarrow (m+1)x^2 - 2mx + (m-3) = 0$$

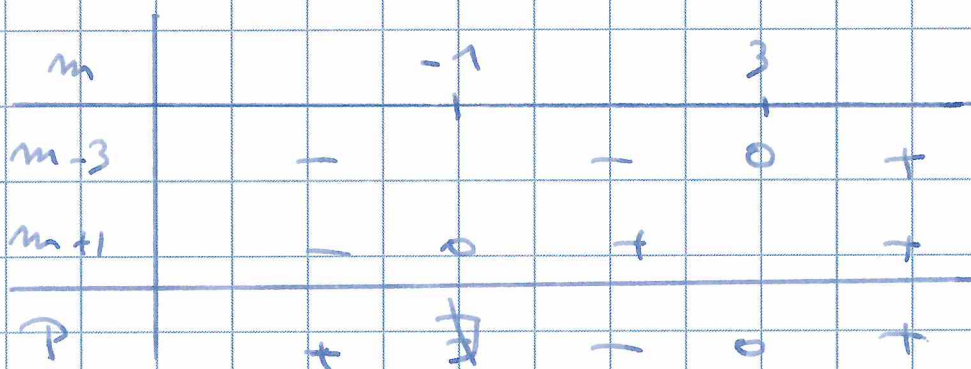
$$\begin{aligned}\Delta_x &= 4m^2 - 4(m+1)(m-3) \\ &= 4(m^2 - m^2 + 2m + 3) \\ &= 4(2m + 3)\end{aligned}$$



Somme : $S = \frac{2m}{m+1}$



Produit : $P = \frac{m-3}{m+1}$



Discussion : $|x_1| > |x_2|$

m	Δ_x	P	S	Conclusions
.	-	+	+	0 R
$-\frac{3}{2}$	0	+	+	1 R > 0
.	+	+	+	2 R > 0
-1	+	+	+	1 ^a degré
	+	-	-	2 R $x_1 < 0 < x_2$
0	+	-	0	2 R $x_1 = -x_2$
	+	-	+	2 R $x_2 < 0 < x_1$
3	+	0	+	2 R $x_1 > 0$ et $x_2 = 0$
	+	+	+	2 R > 0

(c) $(m-6)x^2 - 4(m-1)x + m = 3$

Delta :

$$\begin{aligned}\Delta &= 16(m-1)^2 - 4(m-6)(m-3) \\ &= 16(m^2 - 2m + 1) - 4(m^2 - 9m + 18) \\ &= 12m^2 + 4m - 56 \\ &= 4(3m^2 + m - 14) \\ \Delta &= 4(3m+7)(m-2)\end{aligned}$$

m		$-\frac{7}{3}$		2	
Δ_n	+	0	-	0	+

Somme : $S = \frac{4(m-1)}{m-6}$

m		1		6	
m-1	-	0	+		+
m-6	-		-	0	+
	+	0	-	0	+

Produit : $P = \frac{m-3}{m-6}$

m		3		6	
m-3	-	0	+		+
m-6	-		-	0	+
P	+	0	-	0	+

Discussion : $|x_1| > |x_2|$

m	Δ_x	P	S	Conclusions
	+	+	+	2R > 0
$-\frac{2}{3}$	0	+	+	1R > 0
	-	+	+	0R
1	-	+	0	0R
	-	+	-	0R
2	0	+	-	1R < 0
	+	+	-	2R < 0
3	+	0	-	2R $n_1 < 0, n_2 = 0$
	+	-	-	2R $n_1 < 0 < n_2$
6	+	$\emptyset$	$\emptyset$	1 st degree
	+	+	+	2R > 0