Asymptotes : Solutions

1. On donne les fonctions suivantes les fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{1-6x}{2x-5}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{2x+3}$

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-x-1}{-1+4x^2}}$

(d) $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$

(e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1} - |x|$

On demande, dans chaque cas, de déterminer :

$$f(x) = \frac{1-6x}{2x-5}$$

(a) Le domaine de définition ;

$CE : 2x - 5 \neq 0 \iff x \neq \frac{5}{2} \Rightarrow \mathrm{dom}\, f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$

(b) Les zéros ;

$f(x) = 0 \iff 1 - 6x = 0 \iff x = \frac{1}{6}$

(c) L'intersection avec l'axe Oy ;

$f(0) = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{5}\right)$

(d) Le signe de la fonction ;

x		$\frac{1}{6}$		$\frac{5}{2}$	
$1-6x$	$+$	0	$-$		$-$
$2x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

(e) L'équations des éventuelles asymptotes verticales ($A.V.$) de la fonction ;

Point adhérent : $x = \frac{5}{2}$

$$\lim_{\frac{5}{2}} f(x) = \frac{1 - 6 \cdot \frac{5}{2}}{2\frac{5}{2} - 5} = \frac{-14}{0} = \pm\infty$$

$\Rightarrow AV \equiv x = \frac{5}{2}$

(f) L'équations des éventuelles asymptotes horizontales ($A.H.$) de la fonction ;

$\pm\infty \in \mathrm{dom}_f \rightarrow$ le calcul est possible

$$\lim_{\pm\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad FI$$

$$= \lim_{\pm\infty} \frac{-6\cancel{x}}{2\cancel{x}} = -3$$

$\Rightarrow AH \equiv y = -3$

(g) L'équations des éventuelles asymptotes obliques $(A.O.)$ de la fonction ;

pas d'AO car AH

(h) La position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.

D'après le T.S. (d), on a (pour l'AV)

$$\lim_{\frac{5}{2}^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\frac{5}{2}^+} f(x) = -\infty$$

Pour l'AH : $d(x) = \dfrac{1-6x}{2x-5} - (-3)$

$$= \frac{1-6x+3(2x-5)}{2x-5}$$

$$= \frac{-14}{2x-5}$$

x		$\frac{5}{2}$	
$d(x)$	$+$	$\nexists$	$-$

ou

x		$\frac{5}{2}$	
-14	$-$		$-$
$2x-5$	$-$	0	$+$
$d(x)$	$+$	$\nexists$	$-$
	$f(x)$ au-dessus de l'AH		$f(x)$ sous l'AH

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x + 3}$$

(a) Le domaine de définition ;

CE : $2x + 3 \neq 0 \iff x \neq -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{dom}_f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

(b) Les zéros ;

$f(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0$

$\overset{\Delta}{\iff} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

(c) L'intersection avec l'axe Oy ;

$f(0) = 1 \quad \rightarrow (0, 1)$

(d) Le signe de la fonction ;

x		$-\frac{3}{2}$		1		3	
x^2-4x+3	+		+	0	−	0	+
$2x+3$	−	0	+		+		+
$f(x)$	−	$\nexists$	+	0	−	0	+

(e) L'équations des éventuelles asymptotes verticales $(A.V.)$ de la fonction ;

Point adhérent : $x = -\frac{3}{2}$

$$\lim_{-\frac{3}{2}} f(x) = \frac{\frac{45}{4}}{0} = \pm\infty$$

$\rightarrow$ AV $\equiv x = -\frac{3}{2}$

(f) L'équations des éventuelles asymptotes horizontales $(A.H.)$ de la fonction ;

$\pm\infty \in \mathrm{dom}\, f \Rightarrow$ le calcul est possible

$$\lim_{\pm\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{FI}$$

$$= \lim_{\pm\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}} = \pm\infty$$

$\rightarrow$ pas d'AH

(g) L'équations des éventuelles asymptotes obliques $(A.O.)$ de la fonction ;

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4x + 3 & 2x+3 \\ \hline -\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) & \frac{1}{2}x - \frac{11}{4} \\ \hline -\frac{11}{2}x + 3 & \\ -\left(-\frac{11}{2}x - \frac{33}{4}\right) & \\ \hline \frac{45}{4} & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{11}{4} + \frac{\frac{45}{4}}{2x+3}$$

Comme $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{\frac{45}{4}}{2x+3} = 0$, $f(x)$ tend vers $\frac{1}{2}x - \frac{11}{4}$

si x tend vers $\pm\infty \rightarrow AO \equiv y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{4}$

<u>OU</u>

$$m = \lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\pm\infty}\left(\frac{x^2-4x+3}{2x+3}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{\pm\infty} \frac{x^2-4x+3}{2x^2+3x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$p = \lim_{\pm\infty}\left[\frac{x^2-4x+3}{2x+3} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{\pm\infty} \frac{2(x^2-4x+3) - x(2x+3)}{2(2x+3)}$$

$$= \lim_{\pm\infty} \frac{2x^2 - 8x + 6 - 2x^2 - 3x}{2(2x+3)} = \lim_{\pm\infty} \frac{-11x+6}{2(2x+3)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ EI}$$

$$= \lim_{\pm\infty} \frac{-11x}{4x} = -\frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow AO \equiv y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{4}$$

(h) La position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.

D'après le T.S. (d), on a (pour l'AV)

$$\lim_{-\frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty$$

Pour l'AO :

- d'après la division euclidienne (g), on a

$$d(x) = \frac{45}{4(2x+3)}$$

Le signe de $d(x)$ est celui de $2x+3$, soit :

x		$-\frac{3}{2}$	
$d(x)$	$-$	$\Vert$	$+$
	$f(x)$ en dessous de l'AO		$f(x)$ au-dessus de l'AO

- avec les formules de Cauchy :

$$d(x) = f(x) - y_{AO}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 2}{2x+3} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{11}{4}\right)$$

$= \ldots$ (réduction au même D et simplification)

$$= \frac{45}{4(2x+3)} \rightarrow \text{cf ci-dessus.}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-x-1}{-1+4x^2}}$$

(a) Le domaine de définition ;

cé : $\dfrac{x^2-x-1}{-1+4x^2} \geq 0 \qquad (-1+4x^2 \neq 0)$

zéros : N : $\Delta = 5$, $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

D : $x = \pm \frac{1}{2}$

x		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
$N(x)$	+	0	−		−		−	0	+
$D(x)$	+		+	0	−	0	+		+
cé	+	0	−	$\nexists$	+	$\nexists$	−	0	+

dom f : $-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,] \cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cup]\, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty$

(b) Les zéros ;

$f(x)$ $\quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad (f(x)=0)$

(c) L'intersection avec l'axe Oy ;

$f(0) = \sqrt{1} = 1 \quad \rightarrow (0,1)$

(d) Le signe de la fonction ;

$f(x) \geq 0$ (car racine)

(e) L'équations des éventuelles asymptotes verticales $(A.V.)$ de la fonction ;

Points adhérents : $x = \pm \frac{1}{2}$

$$\lim_{-\frac{1}{2}^+} f(x) = \sqrt{\frac{-\frac{1}{4}}{0^-}} = +\infty$$

$$\lim_{\frac{1}{2}^-} f(x) = \sqrt{\frac{-\frac{5}{4}}{0^-}} = +\infty$$

$\rightarrow$ $AV_1 \equiv x = -\frac{1}{2}$

$AV_2 \equiv x = \frac{1}{2}$

(f) L'équations des éventuelles asymptotes horizontales $(A.H.)$ de la fonction ;

$\pm\infty \in \text{dom}_f \Rightarrow$ le calcul est possible

$$\lim_{\pm\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad FI$$

$$= \lim_{\pm\infty} \sqrt{\frac{\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH \equiv y = \frac{1}{2}$$

(g) L'équations des éventuelles asymptotes obliques ($A.O.$) de la fonction ;

Pas d'AO car AH

(h) La position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.

D'après le T.S. (d), on a (AV)

$\lim_{\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{-\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$

Pour l'AM : $d(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-x-1}{-1+4x^2}} - \dfrac{1}{2}$

Pour étudier le signe de $d(x)$, on écrit

$$d(x) = \frac{\dfrac{x^2-x-1}{-1+4x^2} - \dfrac{1}{4}}{\underbrace{\sqrt{\dfrac{x^2-x-1}{-1+4x^2}} + \dfrac{1}{2}}_{D(x)}}$$ (rationalisation)

>0 (car somme de deux nombres positifs)

$$= \frac{1}{D(x)} \cdot \frac{4x^2-4x-4+1-4x^2}{4(-1+4x^2)}$$

$$= \frac{-4x-3}{4D(x)(-1+4x^2)}$$

x		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$N(x)$	+	0	−		−		−
$(-1+4x^2)$	+		+	0	−	0	+
$d(x)$	+	0	−	∄	+	∄	−
				AV		AV	

$f(x)$ au-dessus de l'AM

$f(x)$ sous l'AM.

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

(a) Le domaine de définition ;

CE : $x^2 - 1 \geq 0$

T.S.

$\Leftrightarrow \quad x \in -\infty, -1] \cup [1, +\infty$

(b) Les zéros ;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{x^2-1}$

$\Leftrightarrow x^2 = x^2 - 1 \quad (x \geq 0) \Leftrightarrow 0 = -1$ imp

$\Rightarrow$ pas de zéro.

(c) L'intersection avec l'axe Oy ;

$0 \notin \text{dom}_f \Rightarrow f(0) \nexists$

(d) Le signe de la fonction ; ⚠ difficile !!

Si $x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ (diff de 2 nbres négatifs)

Comme il n'y a pas de zéro $f(x) < 0$ sur $-\infty, -1]$.

Sur $[1, +\infty$, le signe est constant (car pas de zéro !)

$$f(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1})}{\underbrace{x + \sqrt{x^2-1}}_{D(x)}}$$ > 0 sur $[1, +\infty$ car $x > 0$

$$= \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 1}{D(x)} > 0 \Rightarrow \text{si } x > 0 \quad f(x) > 0$$

x		-1		1	
$f(x)$	$-$		dom f		$+$

(e) L'équations des éventuelles asymptotes verticales $(A.V.)$ de la fonction ;

Pas de point adhérent → pas d'AV

(f) L'équations des éventuelles asymptotes horizontales $(A.H.)$ de la fonction ;

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ → pas d'AH

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \infty - \infty$ FI

$$= \lim_{+\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1})}{x + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

cf (d)

$= 0$

$\rightarrow AH_d \equiv y = 0$

(g) L'équations des éventuelles asymptotes obliques ($A.O.$) de la fonction ;

Pas d'AO en $+\infty$ car AH.

$$m = \lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \quad FI$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{x - \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{-\infty} \frac{x - |x|}{x}$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{x + x}{x} = \lim_{-\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$p = \lim_{-\infty} \left[x - \sqrt{x^2 - 1} - 2x \right]$$

$$= \lim_{-\infty} -x - \sqrt{x^2 - 1} = \infty - \infty \quad FI$$

$= \dots$ (les calculs sont les m̂ que pour f)

$= 0$

$\rightarrow AO_g \equiv y = 2x$

(h) La position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.

Pour l'AH$(+\infty)$, $d(x) = x - \sqrt{x^2-1} - 0$
$= f(x)$

Le signe de $d(x)$ est donc celui de $f(x)$ lorsque $x > 0$, càd $f(x) > 0$ (cf (d)).
La courbe est donc au-dessus de l'AH.

Pour l'AO$(-\infty)$, $d(x) = -x - \sqrt{x^2-1}$
Pour trouver le signe de $d(x)$, on rationalise l'expression :

$$d(x) = \frac{(-x - \sqrt{x^2-1})(-x + \sqrt{x^2-1})}{-x + \sqrt{x^2+1}} \quad D(x) > 0$$

$$= \frac{(-x)^2 - (x^2-1)}{D(x)} = \frac{1}{D(x)} > 0$$

$\Rightarrow f(x)$ au-dessus de l'AO

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

(a) Le domaine de définition ;

$\underline{CE}$: $\frac{x^3}{x-1} \geq 0$ $\quad (x-1 \neq 0)$

x		0		1	
x^3	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
CE	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

dom f : $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

(b) Les zéros ;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\in \text{dom } f)$

(c) L'intersection avec l'axe Oy ;

$f(0) = 0 \quad \rightarrow \quad (0,0)$

(d) Le signe de la fonction ;

$f(x) \geq 0$ (car $\sqrt{\ }$)

(e) L'équations des éventuelles asymptotes verticales $(A.V.)$ de la fonction ;

Pt adhérent : $x = 1$

$\lim_{1^+} f(x) = \sqrt{\frac{1}{0}} = +\infty$

$\Rightarrow AV \equiv x = 1$

(f) L'équations des éventuelles asymptotes horizontales $(A.H.)$ de la fonction ;

$\pm\infty \in dom_f \rightarrow$ le calcul est possible

$\lim_{\pm\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim_{\pm\infty} \sqrt{\frac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}}} = +\infty \Rightarrow \cancel{AH}$

(g) L'équations des éventuelles asymptotes obliques $(A.O.)$ de la fonction ;

$$m = \lim_{\pm\infty} \left[\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \right] = \frac{\infty}{\infty} \quad FI$$

$$= \lim_{\pm\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x^{\cancel{3}2}}{\cancel{x}}} \right) = \lim_{\pm\infty} \frac{|x|}{x} \quad \begin{matrix} +\infty & 1 \\ -\infty & -1 \end{matrix}$$

$$p_1 = \lim_{+\infty} \left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x \right] = \infty - \infty \quad FI$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \lim_{+\infty} \frac{x^3 - x^2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{} + x)}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x^2}{(x-1)(\sqrt{} + x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad FI$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2} + x)} = \lim_{+\infty} \frac{x^2}{x \cdot 2x} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow AO_d \equiv y = x + \frac{1}{2}$$

$$p_2 = \lim_{-\infty} \left[\sqrt{} + x \right] = \dots$$ (le calcul est identique à ci-dessus)

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AO_g \equiv y = -x - \frac{1}{2}$$

(h) La position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.

(h) La position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.

D'après le signe de $f(x)$ et les CE, on a $\lim\limits_{1^+} f(x) = +\infty$

Pour l'AO :

$$d(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - \left(-x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x + \frac{1}{2}$$

Si $x > 0$ (en $+\infty$) : $d(x) > 0$

Si $x < 0$:

$d(x) =$ ________________

A revoir

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} - |x|$$

(a) Le domaine de définition ;

$\underline{CE}$: $x \neq 1$ $\Rightarrow$ $\mathrm{dom}_f : \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(b) Les zéros ;

Si $x > 0$: $f(x) = \dfrac{x^2+1-x(x-1)}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$ $\Rightarrow x = -1$ (A.R.)

Si $x < 0$: $f(x) = \dfrac{x^2+1+x(x-1)}{x-1} = \dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$

$f(x) = 0$ $\Rightarrow$ imp $(\Delta < 0)$ $\Rightarrow$ pas de zéro.

(c) L'intersection avec l'axe Oy ;

$f(0) = -1$ $\Rightarrow$ $(0, -1)$

(d) Le signe de la fonction ;

Si $x > 0$:

x		-1		0		1	
N	$-$	0	$+$		$+$		$+$
D	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$		$-$	$\nexists$	$+$

Si $x < 0$

x		0		1	
N	$+$		$+$		$+$
D	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$		$-$	$\nexists$	$+$

(e) L'équations des éventuelles asymptotes verticales $(A.V.)$ de la fonction ;

$$\lim_{1} f(x) = \pm \infty$$

$$\Rightarrow AV \equiv x = 1$$

(f) L'équations des éventuelles asymptotes horizontales $(A.H.)$ de la fonction ;

Si $x > 0$: $\lim\limits_{+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \frac{\infty}{\infty}$ FI

$$= \lim_{+\infty} \frac{x}{x} = 1 \rightarrow AH_d \equiv y = 1$$

Si $x < 0$ $\lim\limits_{-\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty}$ FI

$$= \lim_{-\infty} \frac{2x^2}{x} = -\infty \Rightarrow \cancel{AH_g}$$

(g) L'équations des éventuelles asymptotes obliques $(A.O.)$ de la fonction ;

En $-\infty$: $m = \lim_{-\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{x(x-1)} = \dfrac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim_{-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

$p = \lim_{-\infty} \left[\dfrac{2x^2 - x + 1}{x-1} - 2x \right]$

$= \lim_{-\infty} \dfrac{\cancel{2x^2} - x + 1 \cancel{-2x^2} + 2x}{x-1}$

$= \lim_{-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim_{-\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

$\rightarrow$ $AO_g \equiv y = 2x + 1$

(h) La position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.

AV : d'après le T.S. (d)

$$\begin{cases} \lim\limits_{1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

AH : en $+\infty$: $d(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - 1 = \dfrac{2}{x-1} > 0$ car $x > 0$

$\rightarrow f(x)$ au-dessus de l'AH

AO : en $-\infty$: $d(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x-1} - (2x+1)$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{x} + 1 - (\cancel{2x^2} - \cancel{x} - 1)}{x-1}$$

$$= \frac{2}{x-1} < 0 \text{ car } x < 0$$

$\rightarrow f(x)$ sous l'AO

2. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 4}{x - 2}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de $f(x)$;
   (b) Déterminer l'équation des asymptotes éventuelles de $f(x)$;
   (c) Montrer que la fonction peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$;
   (d) Conclure quant à l'obtention rapide de l'équation d'une asymptote oblique dans le cas d'une fonction rationnelle.

a) $\underline{CE}$: $x \neq 2 \Rightarrow \text{dom}_f : \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $\underline{AV}$: $\lim\limits_{2} f(x) = \dfrac{2}{0} = \pm\infty \rightarrow AV \equiv x = 2$

$\underline{AH}$: $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \pm\infty$ ~~AH~~

$\underline{AO}$: $m = \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{x^2 + x - 4}{(x-2)\,x} = \infty$

$= \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

$p = \lim\limits_{\pm\infty} \left[\dfrac{x^2 + x - 4}{x - 2} - x \right]$

$= \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2} + x - 4 - \cancel{x^2} + 2x}{x - 2}$

$= \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{3x - 4}{x - 2} = \dfrac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$

$AO \equiv y = x + 3$

c) Division euclidienne

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^2 + x - 4 & x - 2 \\ \cline{3-3}
 & -(x^2 - 2x) & x + 3 \\ \cline{2-2}
 & 3x - 4 & \\
 & -(3x - 6) & \\ \cline{2-2}
 & 2 &
\end{array}$$

$$f(x) = x + 3 + \frac{2}{x-2} \quad (*)$$

d) Dans l'expression $(*)$, on a $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{2}{x-2} = 0$

Dès lors, si x tend vers $\pm\infty$, la fonction $f(x)$ tend vers la fonction $x + 3$, qui est une f^ct du 1^{er} degré dont le graphe est une droite.

Cette droite est nécessairement l'asymptote (oblique) de $f(x)$.

3. Mêmes questions avec la fonction $f(x) = -\dfrac{x^2+2x}{x+3}$.

a) CE : $x \neq -3 \Rightarrow \mathrm{dom}_f : \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

b) AV : $\lim\limits_{-3} f(x) = -\dfrac{3}{0} = \pm\infty \Rightarrow AV \equiv x = -3$

AH : $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{\pm\infty} -x = \mp\infty \Rightarrow \cancel{AH}$

AO : $m = -1$ développements identiques

$p = 1$ à la question 2

$AO \equiv y = -x + 1$

c) Div. euclidienne

$$\begin{array}{rl|l}
 & -x^2 - 2x & x+3 \\ \cline{3-3}
- & (-x^2 - 3x) & -x+1 \\ \cline{2-2}
 & x & \\
- & (x+3) & \\ \cline{2-2}
 & -3 &
\end{array}$$

4. Relier, en justifiant, la forme analytique de la fonction à son graphe (donné à la page suivante) :

(a) $f_1(x) = -x + \dfrac{1}{x+2}$

(b) $f_2(x) = x + \dfrac{1}{x}$

(c) $f_3(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x+2}$

(d) $f_4(x) = 3 - x + \dfrac{1}{x+3}$

(e) $f_5(x) = x - \dfrac{1}{x}$

(f) $f_6(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$

(a) – F car AV $\equiv x = -2$ et AO $\equiv y = -x$

(b) – B car AV $\equiv x = 0$, AO $\equiv y = x$ et pas de zéro.

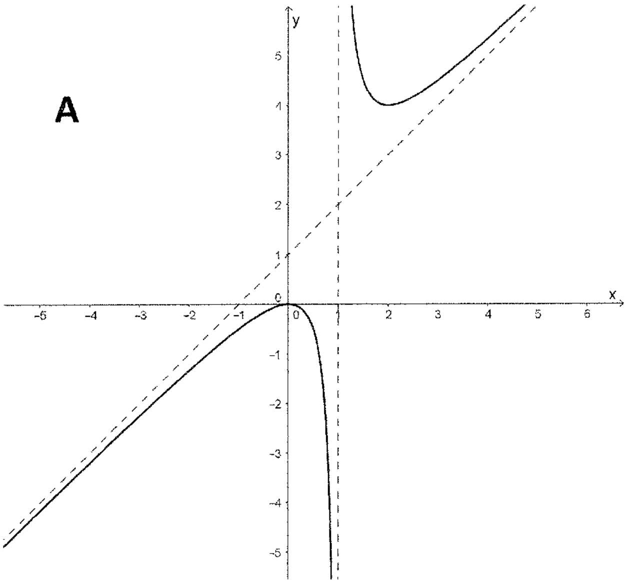
(c) – D car AV $\equiv x = -2$ et AO $\equiv y = x+1$

(d) – E car AV $\equiv x = -3$ et AO $\equiv y = 3-x$

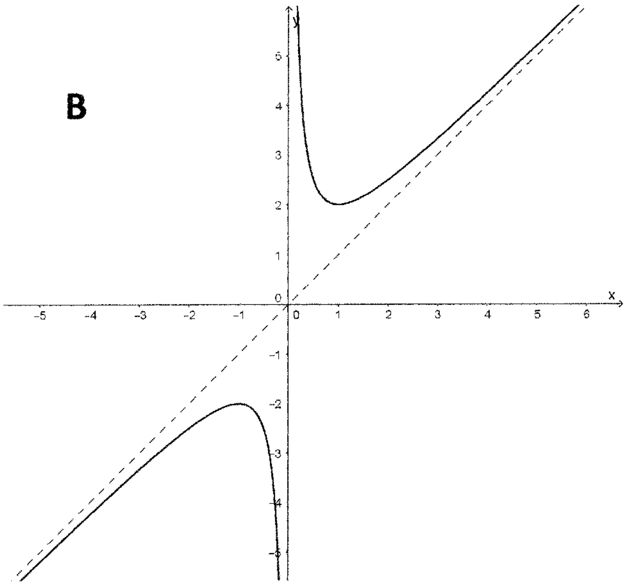
(e) – C car AV $\equiv x = 0$ et AO $\equiv y = x$

(f) – A déduction !

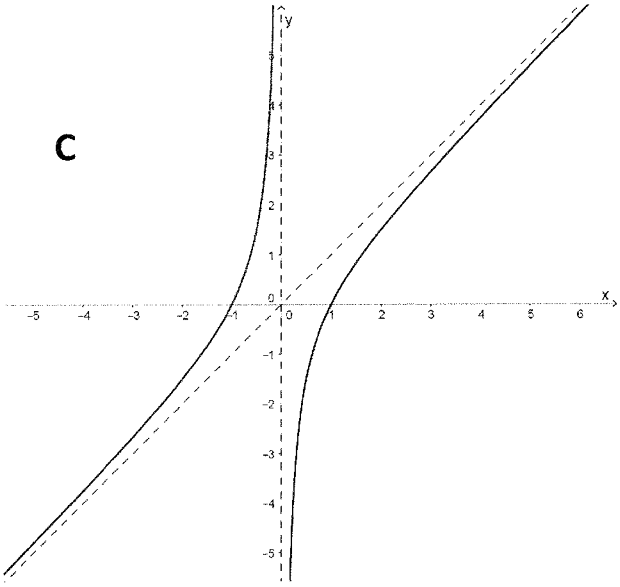
A



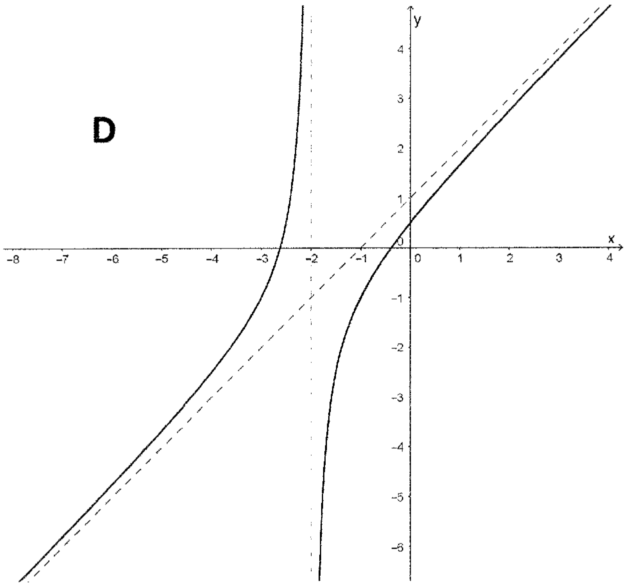
B



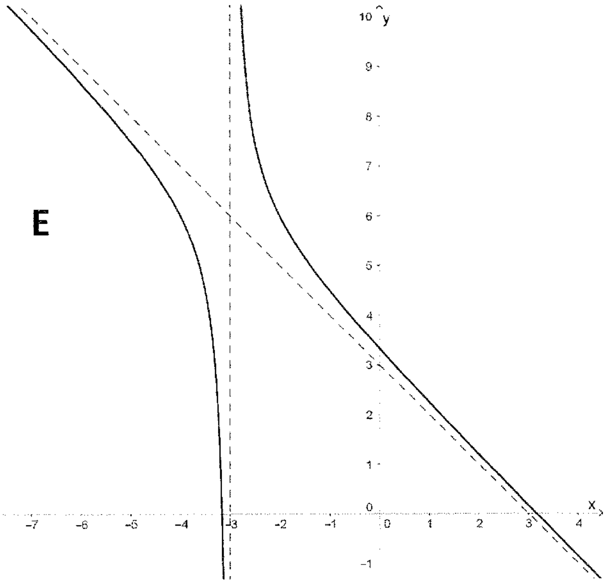
C



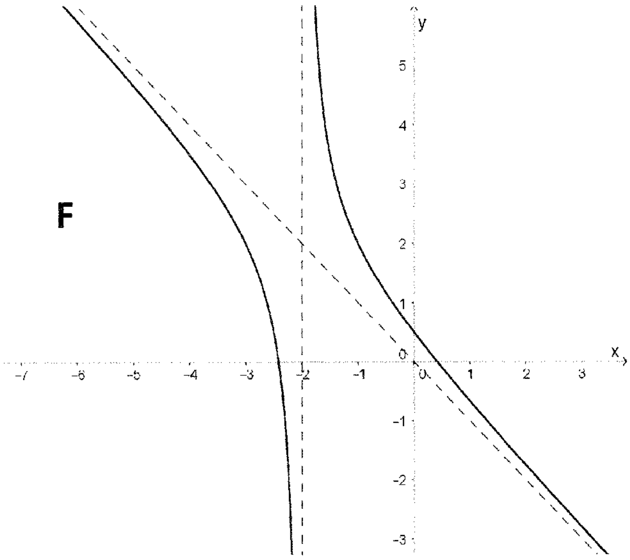
D



E



F



5. On considère les 12 fonctions rationnelles suivantes :

$$f_1(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1} \qquad f_2(x) = -2x+5+\frac{1}{x+1} \qquad f_3(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x-7} \qquad f_5(x) = \frac{2x}{x-7} \qquad f_6(x) = \frac{1}{(x+1)(x+10)}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f_8(x) = -2x+5+\frac{1}{x-5} \qquad f_9(x) = 1+\frac{7}{x^2-4}$$

$$f_{10}(x) = 1+\frac{7}{x^2+4} \qquad f_{11}(x) = -2x+5+\frac{1}{x^2+5} \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x+10)}$$

Déterminer, sans aucun calcul, parmi les fonctions rationnelles proposées ci-dessus, laquelle est caractérisée par les asymptotes suivantes :

	AV	AH ou AO
1	$x=-1$	$y=1$
2	$x=-1$ et $x=-10$	$y=2$
3	aucune	$y=2$
4	$x=7$	$y=2$
5	$x=-2$ et $x=2$	$y=1$
6	$x=5$	$y=-2x+5$
7	$x=-1$	$y=0$
8	aucune	$y=1$
9	$x=-1$	$y=-2x+5$
10	$x=7$	$y=0$
11	aucune	$y=-2x+5$
12	$x=-1$ et $x=-10$	$y=0$

1 – f_3 10

2 – f_{12} 9

3 – f_1 11

4 – f_5 12

5 – f_9 5

6 – f_8 2

7 – f_7 7

8 – f_{10} 4

9 – f_2 1

10 – f_4 6

11 – f_{11} 3

12 – f_6 8

Ordre de déduction.

6. Déterminer l'équation des asymptotes ainsi que la position relative de la courbe par rapport aux asymptotes dans les cas suivants :

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{x^3-x^2-12x}$

$\underline{CE}$: $x^3 - x^2 - 12x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 12) = 0$

$\overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \; x(x-4)(x+3) \neq 0$

$\Rightarrow \text{dom}_f : \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 4\}$

$\underline{\text{zéros}}$ $\; f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0 \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$

$\underline{\text{signe}}$:

x		-3		0		$\frac{1}{2}$		4	
N	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-x-12	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	?	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$\underline{AV}$: $\cdot \lim\limits_{-3} f(x) = \dfrac{0}{0}$ FI

$= \lim\limits_{-3} \dfrac{(2x-1)\cancel{(x+3)}}{x(x-4)\cancel{(x+3)}} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \cancel{AV}$

$\cdot \lim\limits_{0} f(x) = \dfrac{-3}{0} = \pm\infty \Rightarrow AV_1 \equiv x = 0$

$\cdot \lim\limits_{4} f(x) = \dfrac{49}{0} = \pm\infty \Rightarrow AV_2 \equiv x = 4$

$\underline{AH}$: $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^3} = 0 \Rightarrow AH \equiv y = 0$

Position :

AV : $\lim\limits_{0^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{4^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{4^+} f(x) = +\infty$

AH : $d(x) = f(x) - 0$

$= f(x)$

Le signe de $d(x)$ est celui de $f(x)$

En $\begin{cases} -\infty & f(x) \text{ sous l'AH} \\ +\infty & f(x) \text{ au-dessus de l'AH} \end{cases}$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ (pas la position % aux asymptotes)

<u>dom f</u> : $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \text{dom}_f : -\infty, -1 [\cup] 1, +\infty$

<u>zéros</u> : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

<u>signe</u> : $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{dom}_f$

<u>AV</u> : $\lim\limits_{-1^-} f(x) = \frac{1}{0} = +\infty$

$\lim\limits_{1^+} f(x) = \frac{1}{0} = +\infty$

<u>AH</u> $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim\limits_{\pm\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{\pm\infty} \frac{x^2}{|x|} \begin{cases} -\infty \to \infty \\ +\infty \to +\infty \end{cases} \to$ ~~AH~~

<u>AO</u> : $m = \lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$

$p = \lim\limits_{+\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x \right] = \lim\limits_{+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

$= \frac{\infty - \infty}{\infty}$ FI

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)}$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-1)}{D} = \lim_{+\infty} \frac{x^2}{D} = \frac{\infty}{\infty} \quad FI$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}\left(x^2 + x\sqrt{x^2}\right)} = \lim_{+\infty} \frac{x^2}{x\,(x^2+x^2)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad AO_d = y = x$$

En $-\infty$, les calculs sont identiques ($\sqrt{x^2} = -x$)

et $AO_g = y = -x$

(c) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x + 3$

dom f : $4x^2 + 2x + 1 \geq 0$ $\quad \Delta = -12 < 0$

$\to$ dom f : $\mathbb{R}$

zéros $f(x) = 0 \iff \sqrt{4x^2+2x+1} = 2x - 3$

CE : $x \geq \frac{3}{2}$

$\iff 4x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 12x + 9$

$\iff 14x = 8 \iff x = \frac{8}{14} \iff x = \frac{4}{7} < \frac{3}{2}$

$\to$ pas de zéro

signe $f(x) > 0$ car en $-\infty$ $f(x) > 0$ et l'absence de zéro empêche les changements de signe

AV : / $\quad$ ($\not\exists$ dom$_f$)

AH : $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty \to$ ~~AH~~

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \infty - \infty$ FI

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{[\sqrt{} - (2x-3)][\sqrt{} + (2x-3)]}{\sqrt{} + 2x - 3}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{4x^2 + 2x + 1 - (2x-3)^2}{D}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{4x^2} + 2x + 1 - \cancel{4x^2} + 12x - 9}{D}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{14x - 8}{D} = \dfrac{\infty}{\infty}$ FI

$$= \lim_{+\infty} \frac{14x}{\sqrt{4x^2} + 2x} = \lim_{+\infty} \frac{14x}{2x + 2x} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow AH_d = y = \frac{7}{2}$$

$\underline{AO}$: en $-\infty$: $m = \lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ FI

$$= \lim_{-\infty} \frac{\sqrt{4x^2} - 2x}{x} = \lim_{-\infty} \frac{-2x - 2x}{x} = -4$$

$$p = \lim_{-\infty} \left[\sqrt{} - 2x + 3 + 4x\right]$$

$$= \lim_{-\infty} \sqrt{} + 2x + 3 = \infty - \infty \quad FI$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{\left[\sqrt{} + 2x + 3\right]\left[\sqrt{} - (2x+3)\right]}{\sqrt{} - (2x+3)}$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{\cancel{4x^2} + 2x + 1 - (\cancel{4x^2} + 12x + 9)}{D}$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{-10x - 8}{D} = \frac{\infty}{\infty} \quad FI$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{-10x}{\sqrt{4x^2} - 2x} = \lim_{-\infty} \frac{-10x}{-2x - 2x} = \frac{5}{2}$$

$$AO_g = y = -4x + \frac{5}{2}$$

Position :

$\underline{AH_d}$: $d(x) = \sqrt{4x^2+2x+1} - 2x + 3 - \frac{7}{2}$

$= \sqrt{\quad} - 2x - \frac{1}{2}$ (en $+\infty$, $x > 0$)

On ne sait pas trouver le signe car diff de deux nombres. On rationalise $d(x)$

$$d(x) = \frac{\left[\sqrt{\quad} - (2x+\frac{1}{2})\right]\left[\sqrt{\quad} + (2x+\frac{1}{2})\right]}{\underbrace{\sqrt{\quad} + (2x+\frac{1}{2})}_{D(x) > 0 \text{ car } x > 0}}$$

$$= \frac{4x^2+2x+1 - (2x+\frac{1}{2})^2}{D(x)}$$

$$= \frac{4x^2+2x+1 - (4x^2+2x+\frac{1}{4})}{D(x)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{D(x)} > 0$$ $f(x)$ au dessus de AH_d

$\underline{AO_g}$: $d(x) = \sqrt{\quad} - 2x + 3 - (-4x + \frac{5}{2})$

$= \sqrt{\quad} + 2x + \frac{1}{2}$ (en $-\infty$, $x < 0$)

De la même manière que pour l'AH_d, on rationalise $d(x)$. Les calculs sont exactement les mêmes.

On trouve $d(x) = \dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\quad} - (2x+\frac{1}{2})} > 0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ au dessus de l'AO_g