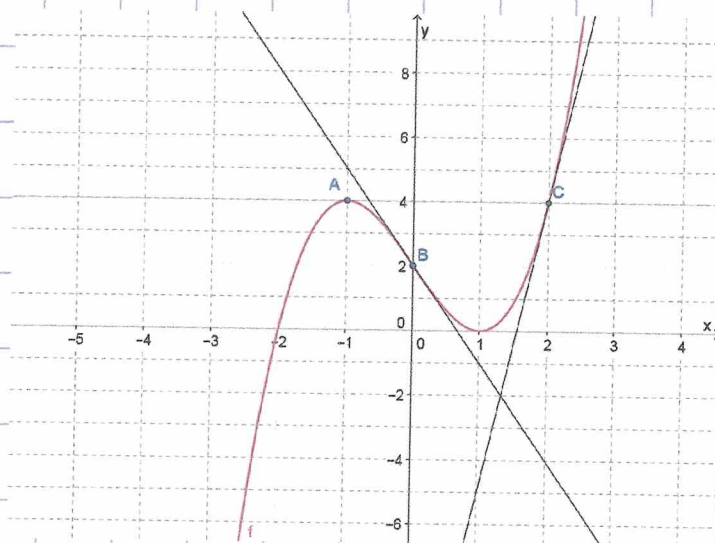


Dérivées : Solutions

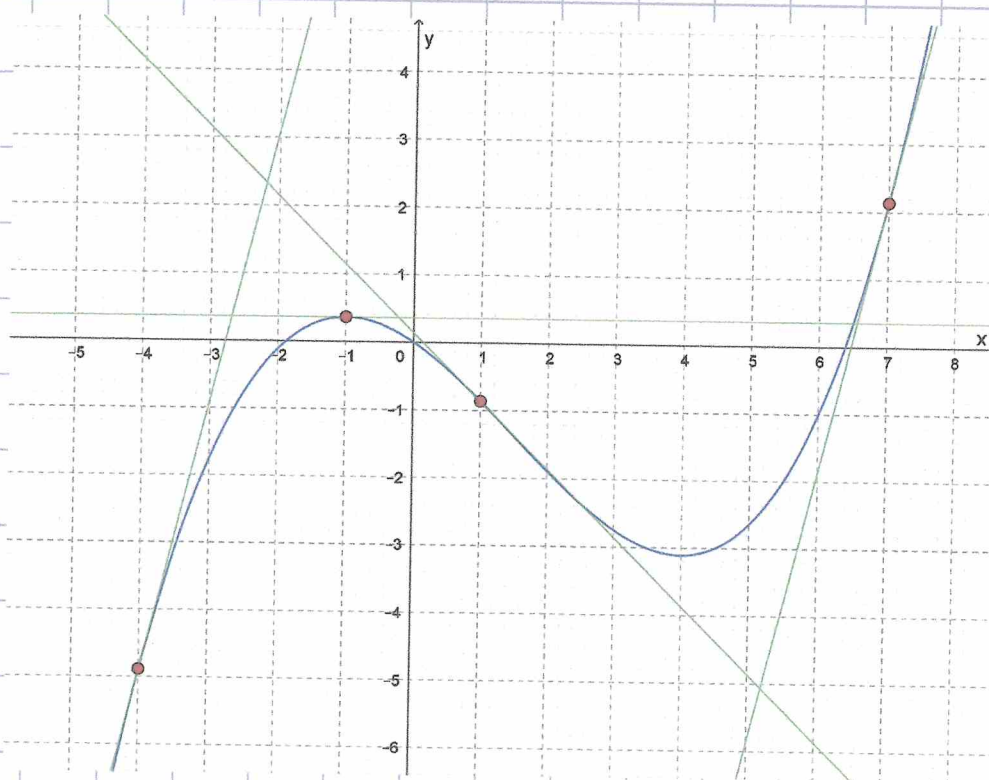
1. La figure suivante représente la courbe C_f de la fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que ses tangentes aux points A, B et C. Par lecture graphique, déterminer les valeurs de : $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.



$$f'(-1) = 0, \quad f'(0) = -3, \quad f'(2) = 9$$

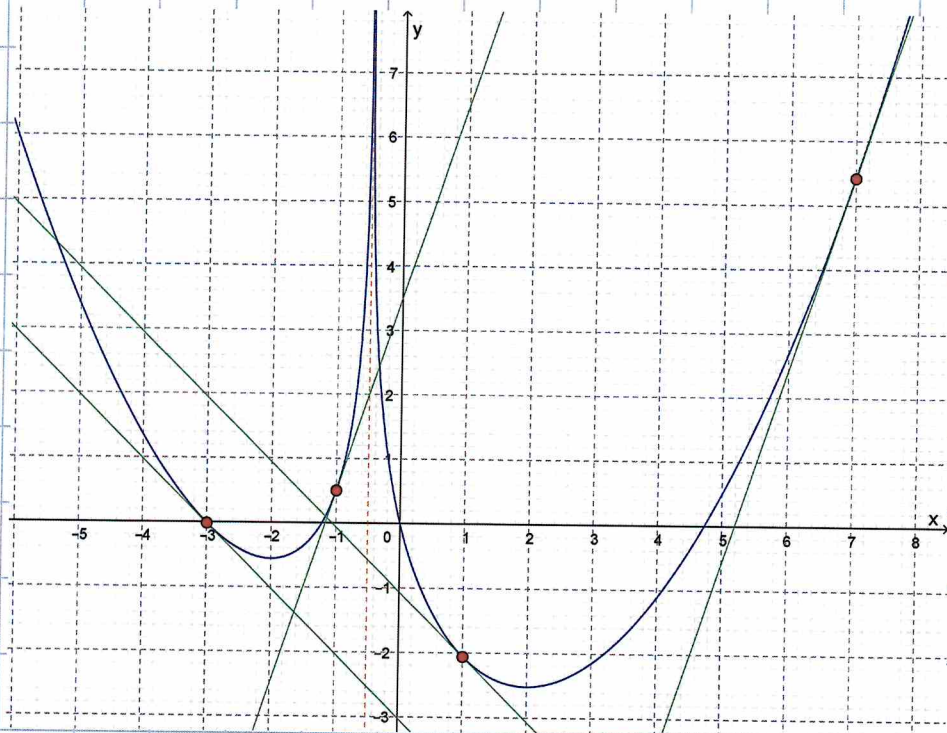
2. On donne les graphes des fonctions suivantes. Pour chacune d'entre elles, déterminer la valeur des nombres dérivés demandés.

(a) $f'(-4)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(7)$



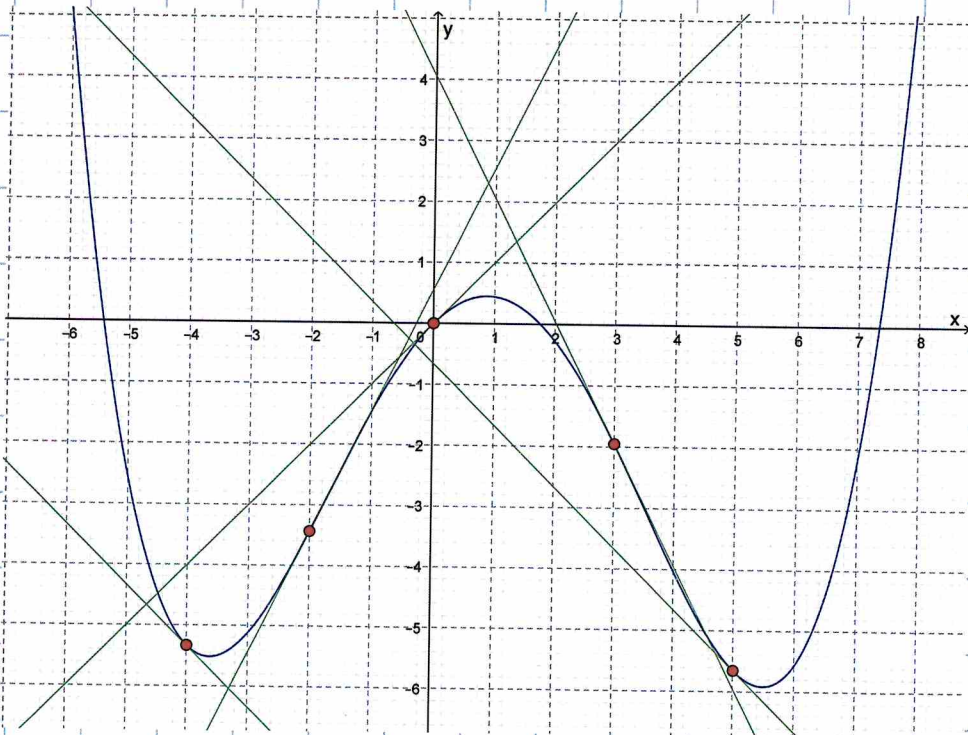
$$f'(-4) = 4, \quad f'(-1) = 0, \quad f'(1) = -1, \quad f'(7) = 4$$

(b) $f'(-3)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(7)$



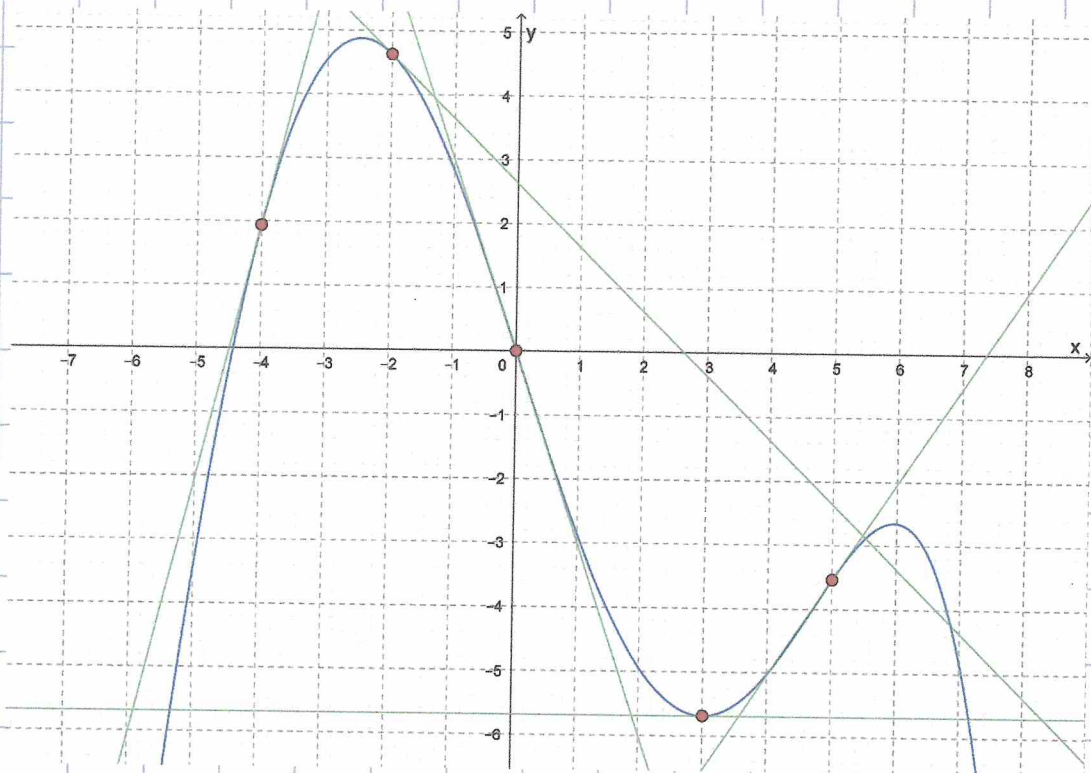
$$f'(-3) = -1, f'(-1) = 3, f'(1) = -1, f'(7) = 3$$

(c) $f'(-4)$, $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(3)$ et $f'(5)$



$$f'(-4) = -1, f'(-2) = 2, f'(0) = 1, f'(3) = -2, f'(5) = -1$$

(d) $f'(-4)$, $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(3)$ et $f'(5)$



$$f'(-4) = 4, f'(-2) = -1, f'(0) = -3, f'(3) = 0, f'(5) = \frac{3}{2}$$

3. En utilisant la définition du nombre dérivé, écrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse $x = a$ si

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 2$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$t = y - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (x - 2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4} x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4} x + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(\Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4} (x + 2) \right)$$

3. En utilisant la définition du nombre dérivé, écrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse $x = a$ si

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $a = 2$

$$t \equiv y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$f(2) = 4 - 4 + 3 = 3$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{0}{0} \quad \text{FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = 2$$

$$t \equiv y - 3 = 2(x - 2)$$

$$\equiv y = 2x - 1$$

(b) $f(x) = 1 + x + x^2$ et $a = -\frac{1}{4}$

$$f(-\frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

$$f'(-\frac{1}{4}) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{x^2 + x + \frac{3}{16}}{x + \frac{1}{4}} = \frac{0}{0} \quad \text{FI}$$

$$\Delta = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{(x + \frac{3}{4})(x + \frac{1}{4})}{(x + \frac{1}{4})} = \frac{1}{2}$$

$$t \equiv y - \frac{13}{16} = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{4})$$

$$\equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{16}$$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 2$

$$f(2) = \sqrt{2}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\cancel{\sqrt{x} - \sqrt{2}})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(\cancel{x - 2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$t \equiv y - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (x - 2)$$
$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4} x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(d) $f(x) = \frac{x^3}{3}$ et $a = 2$

$$f(2) = \frac{8}{3}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ FI}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\cancel{x - 2})(x^2 + 2x + 4)}{(\cancel{x - 2})} = 4$$

$$t \equiv y - \frac{8}{3} = 4(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = 4x - \frac{16}{3}$$

6. On donne la fonction $f(x) = x^2 + 2mx - 3$ où m est un paramètre réel. Que vaut m si la pente de la tangente à la fonction $f(x)$ au point d'abscisse 2 vaut -1?

$$f'(2) = -1 \Leftrightarrow [2x + 2m]_{x=2} = -1$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2m = -1 \Leftrightarrow 2m = -5 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$$

4. Dériver les fonctions suivantes (pour chaque étape, indiquer la formule utilisée) :

(a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2$$

x^n

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

x^n

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

x^n

(d) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

x^n

(e) $f(x) = 2x^2 - x$

$$f'(x) = 4x - 1$$

$f+g / x^n$

(f) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 6$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x$$

$f+g / x^n$

(g) $f(x) = 2ax^3 - \frac{x^2}{b} + c$ (a, b et c sont des constantes)

$$f'(x) = 6ax^2 - \frac{2x}{b}$$

$f+g$ / x^m

(h) $f(x) = 6\sqrt{x^7} + 4\sqrt[3]{x^5} - 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\left(x^{\frac{7}{2}}\right)' + 4\left(x^{\frac{5}{3}}\right)' - 2 \\ &= 6 \cdot \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} + 4 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} - 2 \\ &= 21\sqrt{x^5} + \frac{20}{3}\sqrt[3]{x^2} - 2 \end{aligned}$$

$f+g$ / x^m

5. Dériver les fonctions suivantes (pour chaque étape, indiquer la formule utilisée) :

(a) $f(x) = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 + 4x^3)'(1 + 2x^2) + (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)' \\ &= 12x^2(1 + 2x^2) + (1 + 4x^3)4x \\ &= 4x[3x(1 + 2x^2) + (1 + 4x^3)] \\ &= 4x(3x + 6x^3 + 1 + 4x^3) \\ &= 4x(10x^3 + 3x + 1) \end{aligned}$$

$f \cdot g$

(b) $f(x) = x(2x - 1)(x^2 - 6x + 3)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot (2x - 1)(x^2 - 6x + 3) + x \cdot 2 \cdot (x^2 - 6x + 3) \\ &\quad + x(2x - 1)(2x - 6) \\ &= 2x^3 - 13x^2 + 12x - 3 + 2x^3 - 12x^2 + 6x \\ &\quad + (2x^2 - x)(2x - 6) \\ &= 4x^3 - 25x^2 + 18x - 3 + 4x^3 - 14x^2 + 6x \\ &= 8x^3 - 39x^2 + 24x - 3 \end{aligned}$$

$f \cdot g \cdot h$

$$(c) f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{1 - 4x}$$

$$f'(x) = \frac{(4x + 3)(1 - 4x) - (-4)(2x^2 + 3x + 1)}{(1 - 4x)^2}$$

$$= \frac{-16x^2 - 8x + 3 + 8x^2 + 12x + 4}{D}$$

$$= \frac{-8x^2 + 4x + 7}{(1 - 4x)^2}$$

$\frac{f}{g}$

$$(d) f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - x + 2) - (x^3 + 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 2)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 2x^4 + x^3 - 2x + 1}{D}$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x + 2)^2}$$

$\frac{f}{g}$

$$(e) f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2}$$

$$CE: x \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(\sqrt{x^3})'(1+x^2) - (\sqrt{x^3})(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \quad \frac{f}{y} \\
 &= \frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}(1+x^2) - \sqrt{x^3} \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \quad \sqrt{f} \\
 &= \frac{3x^2(1+x^2) - 2 \cdot x^3 \cdot 2x}{2\sqrt{x^3}(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{3x^2 + 3x^4 - 4x^4}{2x\sqrt{x}(1+x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{2x\sqrt{x}(1+x^2)^2} \quad \sqrt{x} \\
 &= \frac{(3x - x^3)\sqrt{x}}{2(1+x^2)^2} = \frac{(3-x^2)\sqrt{x}}{2(1+x^2)^2} \quad \sqrt{x}
 \end{aligned}$$

$$(f) f(x) = (2x^2 + 3)^2$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2(2x^2 + 3)(2x^2 + 3)' \quad f^m \\
 &= 8x(2x^2 + 3)
 \end{aligned}$$

$$(g) f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3$$

$$f'(x) = 3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)'$$

$$= 3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \left(+ \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{3}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

f^u

$\frac{1}{x}$

$$(h) f(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$$

$$f'(x) = \sqrt{x-1} + (x+1) \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{2(x-1) + x+1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{3x-1}{2\sqrt{x-1}}$$

$f \cdot \frac{1}{f}$
or $\sqrt{f}$

$$(i) f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x+1)^2 \cdot x^2 - (x+1)^3 (2x)}{x^4} \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot x [3x - 2(x+1)]}{x^4} \\ &= \frac{(x+1)^2 (x-2)}{x^3} \end{aligned}$$

$\frac{f}{g}$
or $f \cdot g^{-1}$

$$(j) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{2}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} (x-1)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

$\sqrt{f}$

$\frac{f}{g}$

$\frac{f}{g}$

$$(k) f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1 + \sqrt[3]{x})^2 (1 + \sqrt[3]{x})' \\ &= \cancel{3} (1 + \sqrt[3]{x})^2 \cdot \frac{1}{\cancel{3}} x^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &^1 \\ x &^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$(l) f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})'}{2 \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

$$\sqrt{f'}$$

$$= \frac{1}{D_1} \left(1 + \frac{(x + \sqrt{x})'}{2 \sqrt{x + \sqrt{x}}} \right)$$

$$= \frac{1}{D_1 D_2} \left(D_2 + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{4 \sqrt{x + \sqrt{x}} \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1}{8 \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sqrt{x + \sqrt{x}} \sqrt{x}}$$

$$(m) f(x) = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{[1 \cdot (1+x^2) + x \cdot 2x] \sqrt{1-x^2} - x(1+x^2) \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}$$

$\frac{f}{g}, f \cdot g, \sqrt{f}$

$$= \frac{(1+3x^2)(1-x^2) + x^2 + x^4}{(1-x^2) \sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1+2x^2-3x^4+x^2+x^4}{(1-x^2) \sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-2x^4+3x^2+1}{(1-x^2) \sqrt{1-x^2}}$$

$$(n) f(x) = \sqrt[3]{(4x-1)^2}$$

$$f'(x) = \left[(4x-1)^{\frac{2}{3}} \right]'$$

$$= \frac{2}{3} (4x-1)^{-\frac{1}{3}} (4x-1)'$$

f^n

$$= \frac{8}{3 \sqrt[3]{4x-1}}$$

(o) $f(x) = 5x - \sqrt{x^2 - 9}$

$$f'(x) = 5 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$= \frac{5\sqrt{x^2 - 9} - x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$f - g / \sqrt{f}$

(p) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{2x+4}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (2x+4) - \sqrt{x-1} \cdot 2}{(2x+4)^2}$$

$$= \frac{2x+4 - 4(x-1)}{2\sqrt{x-1}(2x+4)^2}$$

$$= \frac{-2x+8}{2\sqrt{x-1}(2x+4)^2}$$

$$= \frac{4-x}{\sqrt{x-1}(2x+4)^2}$$

$\frac{f}{g}, \sqrt{f}$

$$(q) f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})^2} \quad \text{f.g., } \sqrt{x} \\ &= \frac{-1 - \cancel{\sqrt{x}} - 1 + \cancel{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

$$(r) f(x) = (2x - 3)^3 \sqrt{1 + 3x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(2x - 3)^2 \cdot 2\sqrt{1 + 3x} + (2x - 3)^3 \cdot \frac{3}{2\sqrt{1 + 3x}} \quad \text{f.g., } \sqrt{x} \\ &= 3(2x - 3)^2 \cdot \frac{4(1 + 3x) + (2x - 3)}{2\sqrt{1 + 3x}} \\ &= \frac{3(2x - 3)^2 (14x + 1)}{2\sqrt{1 + 3x}} \end{aligned}$$

$$(s) f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{(3x^2+5x+2)^5}}$$

$$CE: 3x^2+5x+2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \sqrt{(3x^2+5x+2)^5} - (2x-1) \cdot \frac{5}{2} (3x^2+5x+2)^{\frac{3}{2}} (6x+5)}{(3x^2+5x+2)^5} \\ &= \frac{\sqrt{(3x^2+5x+2)^3} \left[2(3x^2+5x+2) - \frac{5}{2}(2x-1)(6x+5) \right]}{(3x^2+5x+2)^5} \\ &= \frac{12x^2+20x+8-5(12x^2+4x-5)}{2 \sqrt{(3x^2+5x+2)^3}} \\ &= \frac{-48x^2+33}{2 \sqrt{(3x^2+5x+2)^3}} \end{aligned}$$

6. cf page 5 du correctif

7/6. On donne la fonction $f(x) = \frac{3x^2+2mx+m}{x+m}$ où m est un paramètre réel. Que doit valoir m pour que la tangente à la courbe représentative de la fonction en son point d'intersection avec l'axe des ordonnées soit parallèle à la droite d'équation $d \equiv 2y+x-3=0$

$$f'(x) = \frac{(6x+2m)(x+m) - (3x^2+2mx+m)}{(x+m)^2}$$

$$f'(0) = \frac{2m^2-m}{m^2} = \frac{2m-1}{m} \quad \text{et } m_d = -\frac{1}{2}$$

↳ pente de la tangente à la courbe en son pt d'intersection Oy ($x=0$)

$$\frac{2m-1}{m} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4m-2 = -m \Leftrightarrow 5m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{5}$$

6. On donne la fonction $f(x) = x^2 + 2mx - 3$ où m est un paramètre réel. Que vaut m si la pente de la tangente à la fonction $f(x)$ au point d'abscisse 2 vaut -1?

$$f'(x) = -1 \quad \text{ou} \quad f'(x) = 2x + 2m$$

$$\Rightarrow f'(2) = 4 + 2m$$

$$4 + 2m = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$$

7. On donne la fonction $f(x) = \frac{3x^2 + 2mx + m}{x + m}$ où m est un paramètre réel. Que doit valoir m pour que la tangente à la courbe représentative de la fonction en son point d'intersection avec l'axe des ordonnées soit parallèle à la droite d'équation $d \equiv 2y + x - 3 = 0$

$$d \equiv y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow m_d = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(6x + 2m)(x + m) - (3x^2 + 2mx + m)(1)}{(x + m)^2}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{2m \cdot m - m}{m^2}$$

$$= \frac{2m^2 - m}{m^2}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2m^2 - m}{m^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2m = -m^2$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(5m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{2}{5} \end{cases}$$