Exercices complémentaires : Fonctions trigonométriques

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+3}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{3x-6}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sin x}$
   (d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$
   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$
   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{3}}{x^2}$
   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$
   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$
2. Déterminer le domaine, les zéros et les variations des fonctions suivantes :
   (a) $2\sin^2 x + 2\sin x - 3$
   (b) $\dfrac{\cos x}{\sin^3 x} - 2\cot x$
   (c) $\sin^3 x \cos x$
   (d) $\left(3 - 4\cos^2 \dfrac{x}{2}\right)^2$ (+période)
   (e) $\dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

Exercices complémentaires : Fonctions trigonométriques - Solutions

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+3} = 0$
   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{3x-6} = \dfrac{1}{3}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sin x} = 0$
   (d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x} = 2$
   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = 2\sqrt{2}$
   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{3}}{x^2} = \dfrac{1}{9}$
   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x} = 2\cos a$
   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \sqrt{2}$
2. Déterminer le domaine, les zéros et les variations des fonctions suivantes :
   (a) $2\sin^2 x + 2\sin x - 3$
   dom_f : $\mathbb{R}$
   zéros : $\{0,97; 2,18\} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$
   $f'(x) = 2\cos x(2\sin x + 1)$

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		-		-	0	+		+	0	-	
$2\sin x+1$		+	0	-		-	0	+		+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	m	↗	M	↘	m	↗	M	↘	
			$\left(-\frac{5\pi}{6},-\frac{7}{2}\right)$		$\left(-\frac{\pi}{2},-3\right)$		$\left(-\frac{\pi}{6},-\frac{7}{2}\right)$		$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$		

   (b) $\dfrac{\cos x}{\sin^3 x} - 2\cot x$
   dom_f : $\mathbb{R}\setminus\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
   zéros : $\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right\} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$
   $f'(x) = \dfrac{4\sin^2 x - 3}{\sin^4 x}$

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$4\sin^2 x-3$		-	0	+	0	-		-	0	+	0	-	
$\sin^4 x$	0	+		+		+	0	+		+		+	0
$f'(x)$	$\nexists$	-	0	+	0	-	$\nexists$	-	0	+	0	-	$\nexists$
$f(x)$	AV	↘	m	↗	M	↘	AV	↘	m	↗	M	↘	AV
			$\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$		$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$				$\left(\frac{\pi}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$		$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$		

(c) $\sin^3 x \cos x$

dom_f : $\mathbb{R}$

zéros : $\left\{ \dfrac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z} \right\}$

$f'(x) = \sin^2 x (4\cos^2 x - 1)$

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin^2 x$	0	+		+		+	0	+		+		+	0
$4\cos^x - 1$		+	0	-	0	+		+	0	-	0	+	
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	TH	↗	M	↘	m	↗	TH	↗	M	↘	m	↗	TH
	$(-\pi, 0)$		$\left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$ (1)		(2)		$(0,0)$		(1)		$\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$ (2)		$(\pi, 0)$

(d) $\left(3 - 4\cos^2 \dfrac{x}{2}\right)^2$ (+période)

dom_f : $\mathbb{R}$

T :2π (résolution de l'équation $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \cos^2 \dfrac{x+T}{2}$)

zéros : $\left\{ -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3} \right\} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

$f'(x) = 4\left(3 - 4\cos^2 \dfrac{x}{2}\right) \sin x$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\sin x$	0	-		-	0	+		+	0
$\left(3 - 4\cos^2 \frac{x}{2}\right)$		+	0	-		-	0	+	
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	M	↘	m	↗	M	↘	m	↘	M
	$(-\pi, 9)$		$\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$		$(0,1)$		$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$		$(\pi, 9)$

(e) $\dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

dom_f : $\mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$

zéros : $\left\{ \dfrac{\pi}{4} \right\} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

$f'(x) = \cos x + \sin x$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	m	↗	M	↘	
			$\left(-\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$		$\left(\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$		