Quizz 4 : Formules de dérivées (II)

Dériver les fonctions suivantes (et réduire au maximum la réponse) :

1. $f(x) = (4x^2 - 7)(3 - 5x)$
   $f'(x) = (4x^2-7)'(3-5x) + (4x^2-7)(3-5x)' = (8x)(3-5x) + (4x^2-7)(-5) = 24x - 40x^2 - 20x^2 + 35 = -60x^2 + 24x + 35$
   Formule : $(f.g)'$.

2. $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{2x^3+3}$
   $f(x) = \dfrac{(3x^2-5)'(2x^3+3) - (3x^2-5)(2x^3+3)'}{(2x^3+3)^2} = \dfrac{6x(2x^3+3) - (3x^2-5)6x^2}{(2x^3+3)^2} = \dfrac{6x\left[2x^3+3-(3x^2-5)x\right]}{(2x^3+3)^2} = \dfrac{6x\left[2x^3+3-3x^3+5x\right]}{(2x^3+3)^2} = \dfrac{6x(-x^3+5x+3)}{(2x^3+3)^2}$
   Formule : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$.

3. $f(x) = 7(4x^2+3)^3$
   $f'(x) = 7.3(4x^2+3)^2.(4x^2+3)' = 21(4x^2+3)^2.8x = 168x(4x^2+3)^2$
   Formule : $(f^n)'$.

4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$
   $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}}.\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}}.\dfrac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}$
   $= \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}}.\dfrac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{-3}{2(x-2)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}}$
   Formule : $(\sqrt{f})'$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$.

5. $f(x)=\dfrac{(3x^2-4)\sqrt{2x-2}}{2x-1}$

$$f'(x)=\frac{\left[(3x^2-4)\sqrt{2x-2}\right]'(2x-1)-\left[(3x^2-4)\sqrt{2x-2}\right](2x-1)'}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{\left[(3x^2-4)'\sqrt{2x-2}+(3x^2-4)\left(\sqrt{2x-2}\right)'\right](2x-1)-\left[(3x^2-4)\sqrt{2x-2}\right](2x-1)'}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{\left[6x\sqrt{2x-2}+(3x^2-4)\left(\dfrac{(2x-2)'}{2\sqrt{2x-2}}\right)\right](2x-1)-\left[(3x^2-4)\sqrt{2x-2}\right]2}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{\left[6x\sqrt{2x-2}+(3x^2-4)\left(\dfrac{2}{2\sqrt{2x-2}}\right)\right](2x-1)-\left[(3x^2-4)\sqrt{2x-2}\right]2}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{\left[6x\sqrt{2x-2}+(3x^2-4)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x-2}}\right)\right](2x-1)-2\left[(3x^2-4)\sqrt{2x-2}\right]}{(2x-1)^2}$$

En réduisant le premier crochet au même dénominateur :

$$=\frac{\dfrac{6x(2x-2)+(3x^2-4)}{\sqrt{2x-2}}(2x-1)-2\left[(3x^2-4)\sqrt{2x-2}\right]}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{12x^2-12x+3x^2-4}{\sqrt{2x-2}}(2x-1)-2\left[(3x^2-4)\sqrt{2x-2}\right]}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{15x^2-12x-4}{\sqrt{2x-2}}(2x-1)-2\left[(3x^2-4)\sqrt{2x-2}\right]}{(2x-1)^2}$$

et ensuite le numérateur de cette fraction :

$$=\frac{\dfrac{(15x^2-12x-4)(2x-1)-2(3x^2-4)(2x-2)}{\sqrt{2x-2}}}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{30x^3-39x^2+4x+4-(12x^3-12x^3-16x+16)}{\sqrt{2x-2}}}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{18x^3-27x^2+20x-12}{\sqrt{2x-2}}}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{18x^3-27x^2+20x-12}{\sqrt{2x-2}}\ \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{18x^3-27x^2+20x-12}{(2x-1)^2\sqrt{2x-2}}$$

Formule : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$, $(f.g)'$ et $(\sqrt{f})'$.