Athénée Royal d'Uccle 1

Cours de Mathématique
5ème année
Révision de décembre

A.Droesbeke
Version : 2022

Chapitre 1

Trigonométrie

1. Montrer que

$$\cos^2 x + \cos^2(120° + x) + \cos^2(120° - x)$$

est indépendant de x.

$$\cos^2 x + (\cos 120 \cos x - \sin 120 \sin x)^2$$
$$+ (\cos 120 \cos x + \sin 120 \sin x)^2$$

$$= \cos^2 x + \left(-\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right)^2$$
$$+ \left(-\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right)^2$$

$$= \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{3}{4} \sin^2 x + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x}$$
$$+ \frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{3}{4} \sin^2 x - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x}$$

$$= \frac{6}{4} \cos^2 x + \frac{6}{4} \sin^2 x$$

$$= \frac{3}{2}$$

2. Vérifier que $\tan^2 a - \tan^2 b = \dfrac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$

$$II = \frac{(\sin a \cos b + \sin b \cos a)(\sin a \cos b - \sin b \cos a)}{\cos^2 a \cos^2 b}$$

$$= \frac{\sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a}{\cos^2 a \cos^2 b}$$

$$= \frac{\sin^2 a \cancel{\cos^2 b}}{\cos^2 a \cancel{\cos^2 b}} - \frac{\sin^2 b . \cancel{\cos^2 a}}{\cancel{\cos^2 a} \cos^2 b}$$

$$= \tan^2 a - \tan^2 b$$

$$= I$$

3. Vérifier les identités suivantes :

   (a) $\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\sin(a+b)+\sin(a-b)} = \cot a$

$$\mathrm{I} = \frac{\cos a \cos b - \cancel{\sin a \sin b} + \cos a \cos b + \cancel{\sin a \sin b}}{\sin a \cos b + \cancel{\sin b \cos a} + \sin a \cos b - \cancel{\cos a \sin b}}$$

$$= \frac{\cancel{2} \cos a \cancel{\cos b}}{\cancel{2} \sin a \cancel{\cos b}}$$

$$= \cot a$$

$$= \underline{\mathrm{II}}$$

(b) $\cot a \cos 2a - \sin 2a = \dfrac{\cos 3a}{\sin a}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos a}{\sin a} \cos 2a - \sin 2a = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a}{\sin a} = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(a + 2a)}{\sin a} = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 3a}{\sin a} = \text{II}$$

(c) $\sin^2(a+b)+\cos^2(a-b)=1+\sin 2a\sin 2b$

$\Leftrightarrow (\sin a\cos b+\sin b\cos a)^2+(\cos a\cos b+\sin a\sin b)^2=\mathrm{II}$

$\Leftrightarrow \sin^2 a\cos^2 b+\sin^2 b\cos^2 a+2\sin a\cos a\sin b\cos b\ldots$

$\ldots+\cos^2 a\cos^2 b+\sin^2 a\sin^2 b+2\sin a\cos a\sin b\cos b=\mathrm{II}$

$\Leftrightarrow \sin^2 a\cos^2 b+\cos^2 a\cos^2 b+\sin^2 b\cos^2 a+\sin^2 a\sin^2 b$;

$\ldots+4\sin a\cos a\sin b\cos b=\mathrm{II}$

$\Leftrightarrow \cos^2 b\underbrace{(\sin^2 a+\cos^2 a)}_{1}+\sin^2 b\underbrace{(\cos^2 a+\sin^2 a)}_{1}\ldots$

$\ldots+\underbrace{4}_{2.2}\underbrace{\sin a\cos a}_{\sin 2a}\underbrace{\sin b\cos b}_{\sin 2b}=\mathrm{II}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\cos^2 b+\sin^2 b}_{1}+\sin 2a\sin 2b=\mathrm{II}$

$\Leftrightarrow 1+\sin 2a\sin 2b=\mathrm{II}$

4. On donne $\tan a = \frac{4}{3}$ ($a \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$)
   (a) Calculer $\sin 2a$, $\cos 2a$ et $\tan 2a$
   (b) Dans quel quadrant se trouve l'angle $2a$? Justifier.

Si $\tan a = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \frac{16}{9}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{25}{9} \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos a = \cancel{\pm} - \frac{3}{5}$

$\hookrightarrow a \in Q_{\underline{III}}$

et $\sin a = \tan a \cos a \Leftrightarrow \sin a = -\frac{4}{5}$

a) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$= 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$

$= \frac{24}{25}$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$= 2\,\frac{9}{25} - 1$

$= -\frac{7}{25}$

$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a}$

$= -\frac{24}{7}$

b) $2a \in Q_{\underline{II}}$ car $\cos 2a < 0$ et $\sin 2a > 0$

5. Si $\sin(a+b) = \dfrac{1}{2}$ et $(a+b) \in Q_{II}$ et $\cot b = -2$ et $b \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, déterminer la valeur de $\cos a$.

$$a = (a+b) - b$$

$$\cos a = \cos[(a+b) - b]$$

$$= \cos(a+b)\cos b + \sin(a+b)\sin b$$

$$\cos(a+b) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(a+b)} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\hookrightarrow$ car Q_{II}

$$\cot b = -2 \Rightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2 b}$$

$$\Leftrightarrow \sin b = \pm\sqrt{\frac{1}{1+4}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\hookrightarrow$ car Q_{IV}

$$\cot b = \frac{\cos b}{\sin b} \Rightarrow \cos b = \cot b \sin b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$= \frac{-2\sqrt{15} - \sqrt{5}}{10}$$

6. Vérifier les identités suivantes :

   (a) $\cos a + 2\cos 2a + \cos 3a = 4\cos 2a \cos^2 \frac{a}{2}$

$$I = \underline{2\cos\frac{4a}{2}\cos\frac{-2a}{2}} + 2\cos 2a$$

Simpson

$$= 2\cos 2a\,(\cos a + 1)$$

Dupl.

$$= 2\cos 2a\left(2\cos^2\frac{a}{2} - 1 + 1\right)$$

$$= 4\cos 2a\cos^2\frac{a}{2}$$

(b) $(\sin a + \sin b)(\sin a - \sin b) = \sin(a+b)\sin(a-b)$

$$I = \left(2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}\right)\left(2\cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}\right) \quad \text{Simp.}$$

$$= 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \; 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$= \sin(a-b)\sin(a+b) \quad \text{Dupl.}$$

(c) $\sin a + \sin b + \sin(a+b) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cancel{\sin \frac{a}{2}}$ $\cos \frac{b}{2}$

$I = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + \sin(a+b)$ Simp.

$= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$ Dapl.

$= 2 \sin \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right)$

$= 2 \sin \frac{a+b}{2} \, 2 \cos \frac{\frac{a-b+a+b}{2}}{2} \cos \frac{\frac{a-b-(a+b)}{2}}{2}$

Simp.

$= 4 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}$

Chapitre 2

Algèbre

1. Résoudre $\begin{cases} x - |y+1| = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases}$

2. Déterminer les valeurs de m pour que le système suivant soit compatible

$$\begin{cases} \dfrac{x+m}{m} < \dfrac{1}{4} \\ mx + 1 > m \end{cases}$$

3. Résoudre

   (a) $\sqrt{x+5} = 7 - \sqrt{2x+8}$

(b) $\sqrt{10-3x}-\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+17}=0$

(c) $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{x}$

(d) $x^2 + 3 = 2x^4$

(e) $x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0$ avec $a, b \neq 0$

4. Résoudre $|7x+1| > |1-4x^2|$

5. Discuter en fonction de m le nombre, le signe et la position relative des solutions de l'équation
   (a) $(m-3)x^2 - 2(m+3)x + m^2 - 9 = 0$

m	Δ_x	P	S	Conclusions ($\lvert x_1\rvert \geq \lvert x_2\rvert$)
	+	-	+	2R $x_2 < 0 < x_1$
-3	0	0	0	1R $x = 0$
	-	+	-	0R
1	0	+	-	1R < 0
	+	+	-	2R < 0
3	+	$\nexists$	$\nexists$	1^{er} degré
	+	+	+	2R > 0
6	0	+	+	1R > 0
	-	+	+	0R

(b) $2mx - m + 3 = (m+1)x^2$

m	Δ_x	P	S	Conclusions ($\lvert x_1\rvert \geq \lvert x_2\rvert$)
	-	+	+	0R
$-\frac{3}{2}$	0	+	+	1R >= 0
	+	+	+	2R > 0
-1	+	$\nexists$	$\nexists$	1^{er} degré
	+	-	-	2R $x_1 < 0 < x_2$
0	+	-	0	2R $x_1 = -x_2$
	+	-	+	2R $x_2 < 0 < x_1$
3	+	0	+	2R $x_2 = 0$ et $x_1 > 0$
	+	+	+	2R > 0

(c) $(m-6)x^2 - 4(m-1)x + m = 3$

m	Δ_x	P	S	Conclusions ($\lvert x_1\rvert \geq \lvert x_2\rvert$)
	+	+	+	2R > 0
-$\frac{7}{3}$	0	+	+	1R >= 0
	-	+	+	0R
1	-	+	0	0R
	-	+	-	0R
2	0	+	-	1R < 0
	+	+	-	2R < 0
3	+	0	-	2R $x_2 = 0$ et $x_1 < 0$
	+	-	-	2R $x_1 < 0 < x_2$
6	+	$\nexists$	$\nexists$	1$^{\text{er}}$ degré
	+	+	+	2R > 0

Chapitre 3

Analyse

1. Soient

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} & \text{si} \quad x \leq 4 \\[2ex] \dfrac{x-3}{2} & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1} & \text{si} \quad x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{-1}{x+2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

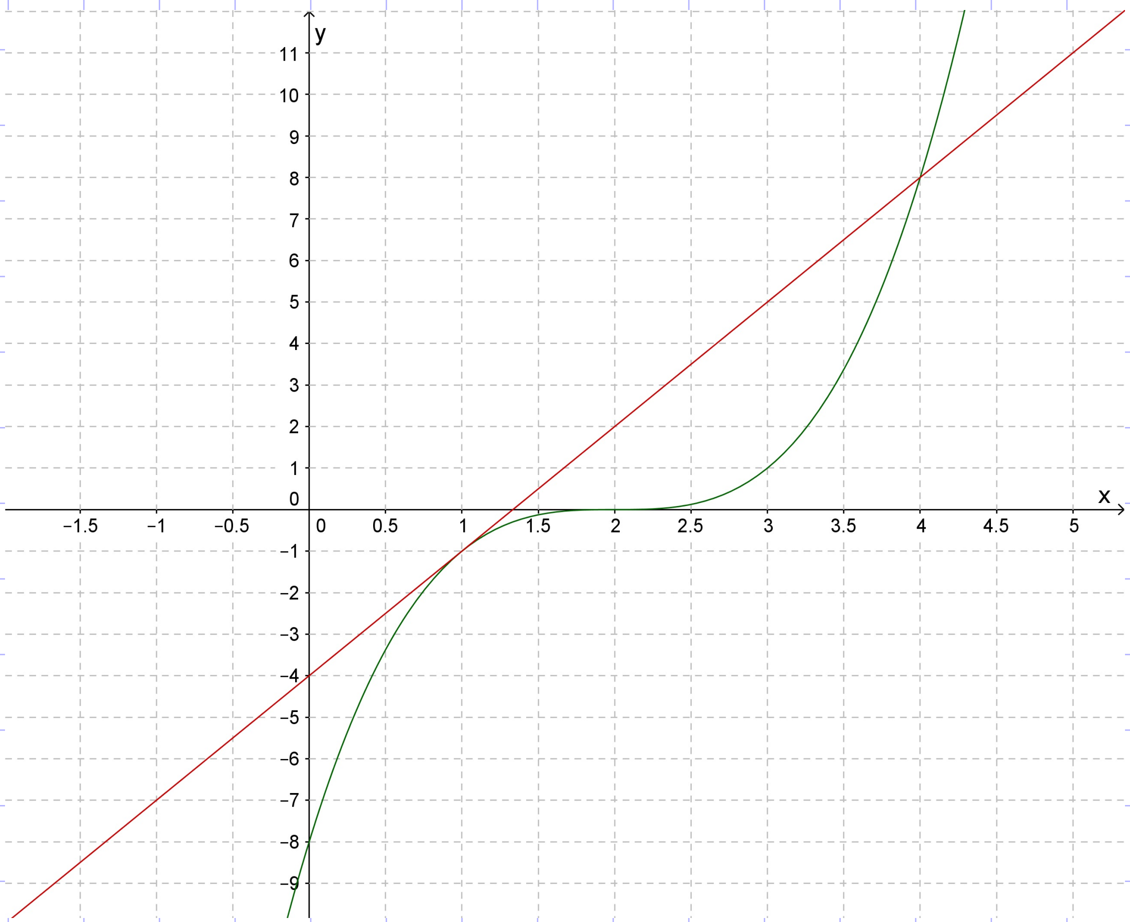
   (a) Construire les graphes de $f(x)$ et $g(x)$

(b) Construire les graphes de $(f+g)(x)$ et justifier le comportement asymptotique des fonctions obtenues

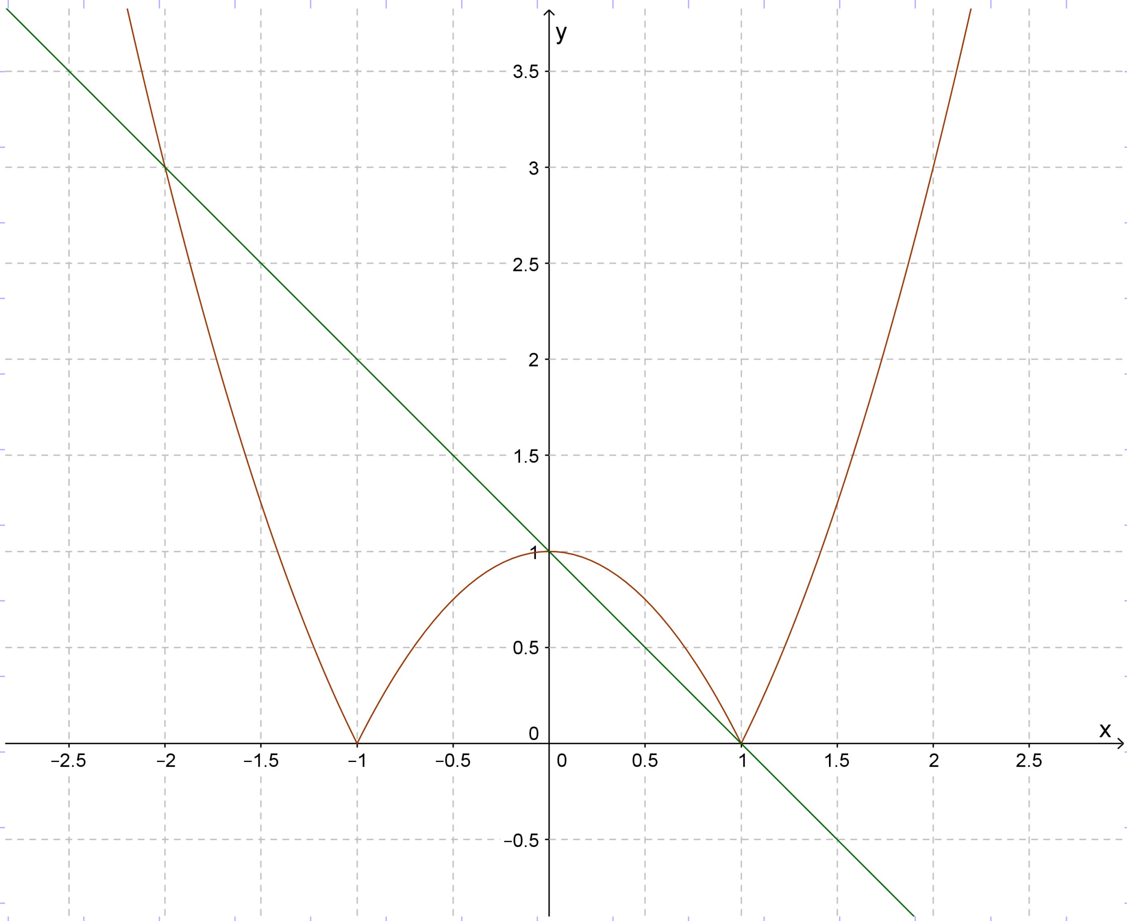
2. Déterminer le domaine de $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2+x+5}}{|x^2-2x-3|-|1-2x|}$

3. Résoudre graphiquement :
   Dans chaque cas, vérifier algébriquement le résultat.

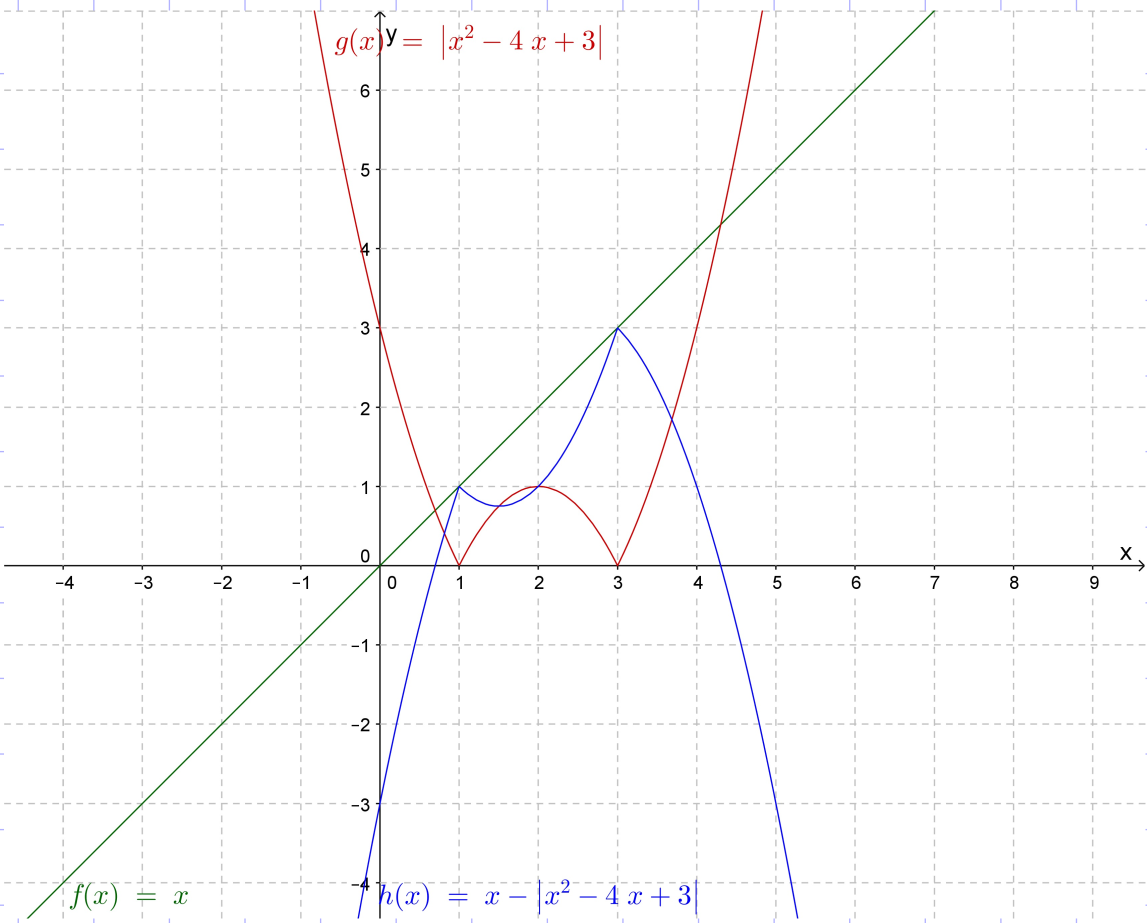
   (a) $(x-2)^3 < 3x - 4$



(b) $|x^2 - 1| > 1 - x$



4. Résoudre $x - |x^2 - 4x + 3| > 0$ et vérifier graphiquement le résultat.



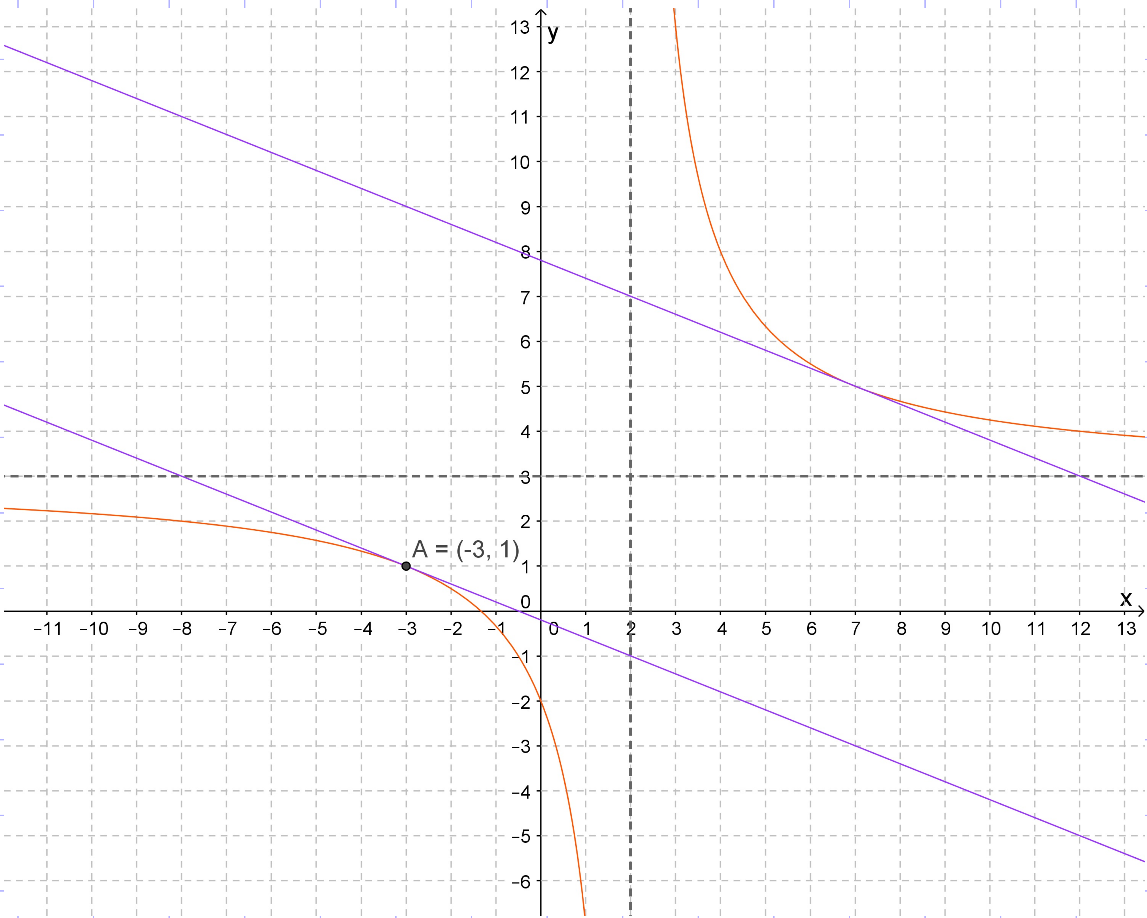
5. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$$

Tracer le graphe de $f(x)$ au départ du graphe d'une fonction de référence.
Déterminer ensuite la (les) valeur(s) de p pour laquelle (lesquelles) les droites

$$d \equiv y = -\frac{2}{5}x + p$$

sont tangentes au graphique de f.
Vérifier graphiquement les résultats et déterminer les coordonnées du point de contact à abscisse négative.



6. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   (a) $2x + 1 \leq \sqrt{7 - 6x}$

(b) $-\sqrt{2x^2 - 7x - 4} \leq -x + 2$

(c) $1-\sqrt{\dfrac{3-x}{x}} \leq \dfrac{2}{x-1}$

7. Déterminer l'ensemble image des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x - 3}$

8. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2x - 3}$ admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.

9. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ admet un centre de symétrie d'abscisse 1. Quelles sont les coordonnées de ce point ?