



Athénée Royal Uccle 1

Athénée Royal d'Uccle 1

Cours de
Mathématique
5^{ème} année
RÉVISION DE
DÉCEMBRE

Chapitre 1

Trigonométrie

1. Montrer que

$$\cos^2 x + \cos^2(120^\circ + x) + \cos^2(120^\circ - x)$$

est indépendant de x .

2. Vérifier que $\tan^2 a - \tan^2 b = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$

3. Vérifier les identités suivantes :

(a) $\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)} = \cot a$

$$(b) \cot a \cos 2a - \sin 2a = \frac{\cos 3a}{\sin a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos a}{\sin a} \cos 2a - \sin 2a = \frac{\cos 3a}{\sin a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a}{\sin a} = \frac{\cos 3a}{\sin a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(a+2a)}{\sin a} = \frac{\cos 3a}{\sin a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 3a}{\sin a} = \frac{\cos 3a}{\sin a}$$

$$(c) \sin^2(a+b) + \cos^2(a-b) = 1 + \sin 2a \sin 2b$$

$$\Leftrightarrow (\sin a \cos b + \sin b \cos a)^2 + (\cos a \cos b + \sin a \sin b)^2 = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 a \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 a + 2 \sin a \cos a \sin b \cos b \dots$$

$$\dots + \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b + 2 \sin a \cos a \sin b \cos b = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 a \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 a + \sin^2 a \sin^2 b \dots$$

$$\dots + 4 \sin a \cos a \sin b \cos b = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 b (\underbrace{\sin^2 a + \cos^2 a}_1) + \sin^2 b (\underbrace{\cos^2 a + \sin^2 a}_1) \dots$$

$$\dots + 4 \sin a \cos a \sin b \cos b = \text{II}$$

$\sin 2a$

$\sin 2b$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cos^2 b + \sin^2 b}_1 + \sin 2a \sin 2b = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2a \sin 2b = \text{II}$$

4. On donne $\tan a = \frac{4}{3}$ ($a \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$)

(a) Calculer $\sin 2a$, $\cos 2a$ et $\tan 2a$

(b) Dans quel quadrant se trouve l'angle $2a$? Justifier.

$$\text{Si } \tan a = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \frac{16}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{25}{9} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos a = -\frac{3}{5}$$

$\hookrightarrow a \in Q_{III}$

$$\text{et } \sin a = \tan a \cos a \Leftrightarrow \sin a = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ &= 2 \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{24}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 2 \frac{9}{25} - 1 \\ &= -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 2a &= \frac{\sin 2a}{\cos 2a} \\ &= -\frac{24}{7} \end{aligned}$$

b) $2a \in Q_{II}$ car $\cos 2a < 0$ et $\sin 2a > 0$

5. Si $\sin(a+b) = \frac{1}{2}$ et $(a+b) \in Q_{II}$ et $\cot b = -2$ et $b \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, déterminer la valeur de $\cos a$.

$$a = (a+b) - b$$

$$\cos a = \cos [(a+b) - b]$$

$$= \cos(a+b)\cos b + \sin(a+b)\sin b$$

$$\cos(a+b) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(a+b)} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\hookrightarrow \cos Q_{II}$

$$\cot b = -2 \Rightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2 b}$$

$$\Rightarrow \sin b = \pm \sqrt{\frac{1}{1+4}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\hookrightarrow \sin Q_{IV}$

$$\cot b = \frac{\cos b}{\sin b} \Rightarrow \cos b = \cot b \sin b = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos a &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= \frac{-2\sqrt{15} - \sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

6. Vérifier les identités suivantes :

(a) $\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a = 4 \cos 2a \cos^2 \frac{a}{2}$

$$I = \underline{2 \cos \frac{4a}{2} \cos -\frac{2a}{2} + 2 \cos 2a}$$

Simpson

$$= 2 \cos 2a (\cos a + 1)$$

Dupl.

$$= 2 \cos 2a (2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1 + 1)$$

$$= 4 \cos 2a \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$(b) \quad \underline{(\sin a + \sin b)} \underline{(\sin a - \sin b)} = \sin(a + b) \sin(a - b)$$

$$I = \left(2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \right) \left(2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \right) \quad \text{Simp.}$$

$$= 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$= \sin(a-b) \sin(a+b) \quad \text{Dupl.}$$

$$(c) \sin a + \sin b + \sin(a+b) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$I = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + \sin(a+b) \quad \text{Simp.}$$

$$= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \quad \text{Dapl.}$$

$$= 2 \sin \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot 2 \cos \frac{a-b+a+b}{2} \cos \frac{a-b-(a+b)}{2}$$

Simp.

$$= 4 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}$$

Chapitre 2

Algèbre

1. Résoudre $\begin{cases} x - |y + 1| = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases}$

$$|y+1| \Rightarrow \begin{cases} y+1 & \text{si } y \geq -1 \\ -(y+1) & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

• $y \geq -1$: $\begin{cases} x - y - 1 = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + x - 2 - 10 = 0 \end{cases} \quad (*)$

$$\Delta = 1 + 48 = 49 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \begin{matrix} 3 \\ -4 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} \begin{matrix} 1 \\ -6 \end{matrix} \quad (AR) \quad \rightarrow S_1: \{(3, 1)\}$$

• $y < -1$: $\begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - x - 10 = 0 \end{cases}$

$$\Delta = 1 + 40 = 41 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$S_2: \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{41}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{41}}{2} \right) \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2$$

2. Déterminer les valeurs de m pour que le système suivant soit compatible

$$\begin{cases} \frac{x+m}{m} < \frac{1}{4} \\ mx+1 > m \end{cases}$$

CE : $m \neq 0$

$$\bullet \underline{m > 0} : \begin{cases} x < \frac{m}{4} - m \\ x > \frac{m-1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3m}{4} \\ m > \frac{m-1}{m} \end{cases}$$

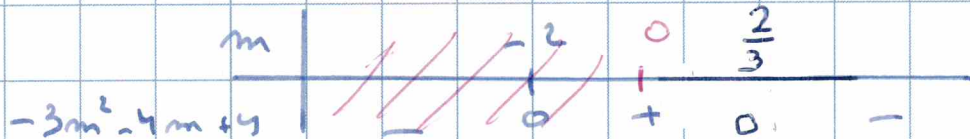
Pour que le système soit compatible, il faut :

$$\frac{m-1}{m} < -\frac{3m}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4m-4 < -3m^2 \Leftrightarrow -3m^2 - 4m + 4 > 0$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

$$m_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{-6} \begin{cases} -2 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$



$$\Rightarrow m \in]-2, \frac{2}{3}[$$

$$\bullet \underline{m < 0} : \begin{cases} x > \frac{m}{4} - m \\ x < \frac{m-1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3m}{4} \\ x < \frac{m-1}{m} \end{cases}$$

la cond. de compatibilité est : $-\frac{3m}{4} < \frac{m-1}{m}$

$$\Leftrightarrow -3m^2 > 4m-4 \Leftrightarrow -3m^2 - 4m + 4 > 0$$

la condition est la même, et la solution est

$$m \in]-2, 0[$$

$$\Rightarrow m \in]-2, 0[\cup]0, \frac{2}{3}[$$

3. Résoudre

$$(a) \sqrt{x+5} = 7 - \sqrt{2x+8}$$

$$\underline{CE} : \left. \begin{array}{l} x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5 \\ 2x+8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \end{array} \right\} x \geq -4$$

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$$

$$\Leftrightarrow x+5 + 2x+8 + 2\sqrt{\quad}\sqrt{\quad} = 49$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+18x+40} = 36-3x$$

$$\underline{CE} : 36-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 12 \rightarrow x \in [-4, 12]$$

$$4(2x^2+18x+40) = 9(144-24x+x^2)$$

$$8x^2+72x+160 = 1296-216x+9x^2$$

$$x^2-288x+1136=0$$

$$\Delta = 78700$$

$$x_{1,2} = \frac{288 \pm 280}{2} \begin{cases} 4 \\ 287 \text{ (AR)} \end{cases}$$

$$S: \{4\}$$

$$(b) \sqrt{10-3x} - \sqrt{x+3} - \sqrt{4x+17} = 0$$

$$\begin{aligned} \underline{CE} : \begin{cases} 10-3x \geq 0 & \Leftrightarrow x \leq \frac{10}{3} \\ x \geq -3 \\ x \geq -\frac{17}{4} \end{cases} & \Rightarrow x \in \left[-3, \frac{10}{3}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10-3x &= x+3 + 4x+12 + 2\sqrt{4x^2+29x+51} \\ -10-8x &= 2\sqrt{4x^2+29x+51} \\ -5-4x &= \sqrt{4x^2+29x+51} \end{aligned}$$

$$\underline{CE} : -5-4x \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \leq -\frac{5}{4} \Rightarrow x \in \left[-3, -\frac{5}{4}\right]$$

$$25 + 16x^2 + 40x = 4x^2 + 29x + 51$$

$$12x^2 + 11x - 26 = 0$$

$$\Delta = 1369$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm 37}{24} < \frac{13}{12} \text{ (A.R.)}$$

$$S: \{-2\}$$

$$(c) \sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{x}$$

$$\underline{CE} : \quad \begin{array}{ll} x \geq -a & a \geq 0 \rightarrow x \in [-a, a] \\ x \leq a & a < 0 \rightarrow \text{imp} \end{array}$$

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{x} + \sqrt{a-x}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x} + \cancel{x} = \cancel{x} + \cancel{x} - \cancel{x} + 2\sqrt{ax-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{ax-x^2}$$

$$\underline{CE} : x \geq 0 \\ \Rightarrow x \in [0, a]$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4ax - 4x^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 4ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x(5x - 4a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4a}{5} \end{cases}$$

$$S : \left\{ 0, \frac{4a}{5} \right\}$$

(d) $x^2 + 3 = 2x^4$

$$2x^4 - x^2 - 3 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \\ -1 \text{ (A.R.)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (\Rightarrow) x = \pm \sqrt{\frac{6}{2}}$$

$$S : \left\{ -\sqrt{\frac{6}{2}}, \sqrt{\frac{6}{2}} \right\}$$

(e) $x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0$ avec $a, b \neq 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 \\ &= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \\ &= (a^2 - b^2)^2\end{aligned}$$

$$x_{1,2}^2 = \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - b^2)}{2} \begin{matrix} \swarrow a^2 \\ \searrow b^2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = \pm a \\ x = \pm b \end{cases}$$

$$S: \{-b, -a, a, b\}$$

4. Résoudre $|7x+1| > |1-4x^2|$

$$|7x+1| = \begin{cases} 7x+1 & \text{si } 7x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{7} \\ -(7x+1) & \text{si } 7x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$|1-4x^2| = \begin{cases} 1-4x^2 & \text{si } 1-4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -(1-4x^2) & \text{si } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$1-4x^2$	-0	$+0$		
x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	
$ 7x+1 $	$-7x-1$	$-7x-1$	$7x+1$	$7x+1$
$ 1-4x^2 $	$-1+4x^2$	$1-4x^2$	$1-4x^2$	$-1+4x^2$
In	①	②	③	④

$$\textcircled{1} -7x-1 > -1+4x^2 \Leftrightarrow 4x^2+7x < 0$$

x	$-\frac{7}{4}$	0
①	$+$	$-$

$$S_1:]-\frac{7}{4}, 0[$$

$$\textcircled{2} -7x-1 > 1-4x^2 \Leftrightarrow -4x^2+7x+2 < 0$$

$$\Delta = 49+32=81$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{-8} < \frac{1}{4}$$

x	$-\frac{1}{4}$	2
	$-$	$+$

$$S_2: -\infty, -\frac{1}{4}[\cup]2, +\infty$$

$$\textcircled{3} 7x+1 > 1-4x^2 \Leftrightarrow -4x^2-7x < 0 \Leftrightarrow 4x^2+7x > 0$$

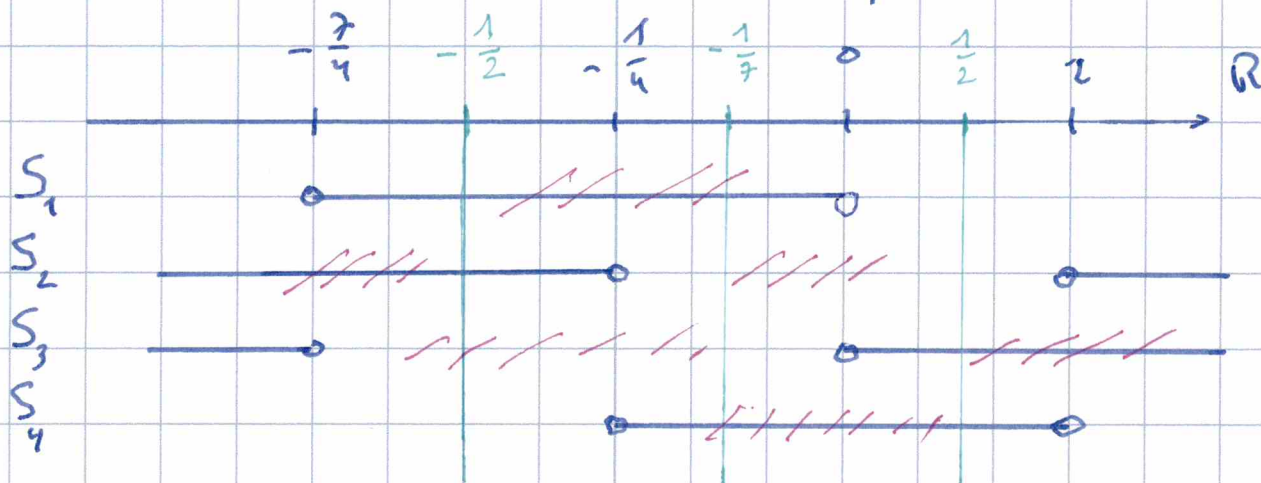
$$S_3: -\infty, -\frac{7}{4}[\cup]0, +\infty$$

⋂ S S ①

④ $7x+1 > -1+4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 7x - 2 < 0$

x	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{2}$	2
	+	0	-	0	+		

$S_4:]-\frac{1}{4}, 2[$



$S:]-\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{2}, 2[$

5. Discuter en fonction de m le nombre, le signe et la position relative des solutions de l'équation

(a) $(m-3)x^2 - 2(m+3)x + m^2 - 9 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(m+3)^2 - 4(m-3)(m-3)(m+3) \\ &= 4(m+3) [m+3 - (m-3)^2] \\ &= 4(m+3) (m+3 - m^2 + 6m - 9) \\ &= 4(m+3) (-m^2 + 7m - 6)\end{aligned}$$

$\hookrightarrow m \leq -3$ Δ $\hookrightarrow m = 1$ et $m \leq 6$

m	-3	1	6
$m+3$	-	0	+
$-m^2+7m-6$	-	0	+
Δ	+	0	+

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{2(m+3)}{m-3}$$

m	-3	3
$m+3$	-	0
$m-3$	-	0
S	+	-

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 9}{m-3} = m+3$$

m	-3	3
P	-	+

m	Δ_x	P	S	Conclusions ($ x_1 \geq x_2 $)
-3	0	0	0	2R $x_2 < 0 < x_1$
-	-	+	-	1R $x = 0$
1	0	+	-	0R
+	+	+	-	1R < 0
3	+	+	+	2R < 0
+	+	+	+	1 ^{er} degré
6	0	+	+	2R > 0
-	-	+	+	1R > 0
				0R

$$(b) \quad 2mx - m + 3 = (m+1)x^2$$

$$a = (m+1), \quad b = -2m, \quad c = m-3$$

$$\Delta_x = 4m^2 - 4(m+1)(m-3)$$

$$= 4m^2 - 4(m^2 - 2m - 3)$$

$$= 8m + 12$$

m	Δ_x
	-
	0
	+

$$S = \frac{2m}{m+1}$$

m	S
	-
	0
	+

$$P = \frac{m-3}{m+1}$$

m	P
	-
	0
	+

m	Δ_x	P	S	Conclusions ($ x_1 \geq x_2 $)
	-	+	+	0R
$\frac{3}{2}$	0	+	+	1R ≥ 0
-1	+	$\neq$	$\neq$	1 ^{er} degré
0	+	-	-	2R $x_1 < 0 < x_2$
	+	-	0	2R $x_1 = -x_2$
	+	-	+	2R $x_2 < 0 < x_1$
3	+	0	+	2R $x_2 = 0$ et $x_1 > 0$
	+	+	+	2R > 0

$$(c) (m-6)x^2 - 4(m-1)x + m - 3 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 16(m-1)^2 - 4(m-6)(m-3) \\ &= 16(m^2 - 2m + 1) - 4(m^2 - 9m + 18) \\ &= 12m^2 + 4m - 56 \\ &= 4(3m^2 + m - 14)\end{aligned}$$

$$\Delta \rightarrow m = -\frac{7}{3} \text{ et } m = 2$$

m					
		$-\frac{7}{3}$		2	
Δ	+	0	-	0	+

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{4(m-1)}{m-6}$$

m		1		6	
m-1	-	0	+		+
m-6	-		-	0	+
S	+	0	-	0	+

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m-3}{m-6}$$

m		3		6	
m-3	-	0	+		+
m-6	-		-	0	+
P	+	0	-	0	+

m	Δ_x	P	S	Conclusions ($ x_1 \geq x_2 $)
	+	+	+	2R > 0
$-\frac{7}{3}$	0	+	+	1R ≥ 0
	-	+	+	0R
1	-	+	0	0R
	-	+	-	0R
2	0	+	-	1R < 0
	+	+	-	2R < 0
3	+	0	-	2R $x_2 = 0$ et $x_1 < 0$
	+	-	-	2R $x_1 < 0 < x_2$
6	+	0	0	1 ^{er} degré
	+	+	+	2R > 0

Chapitre 3

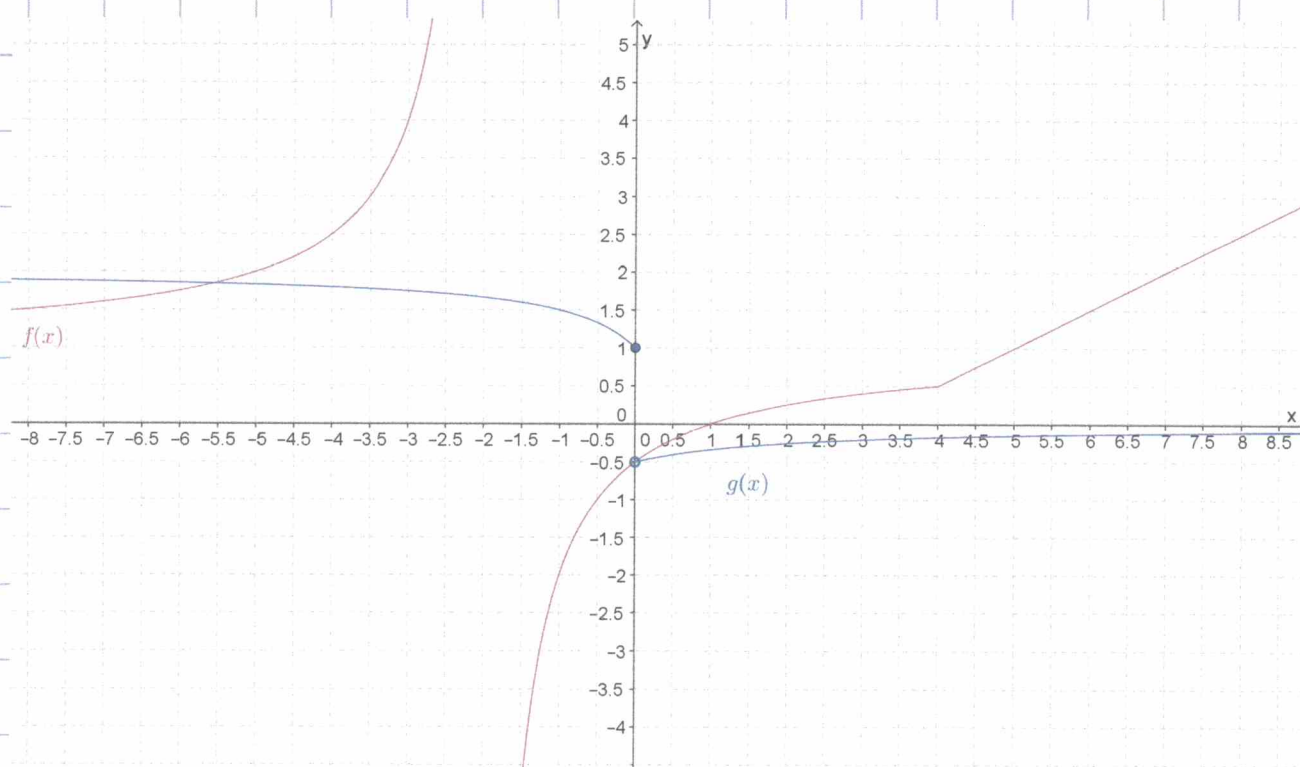
Analyse

1. Soient

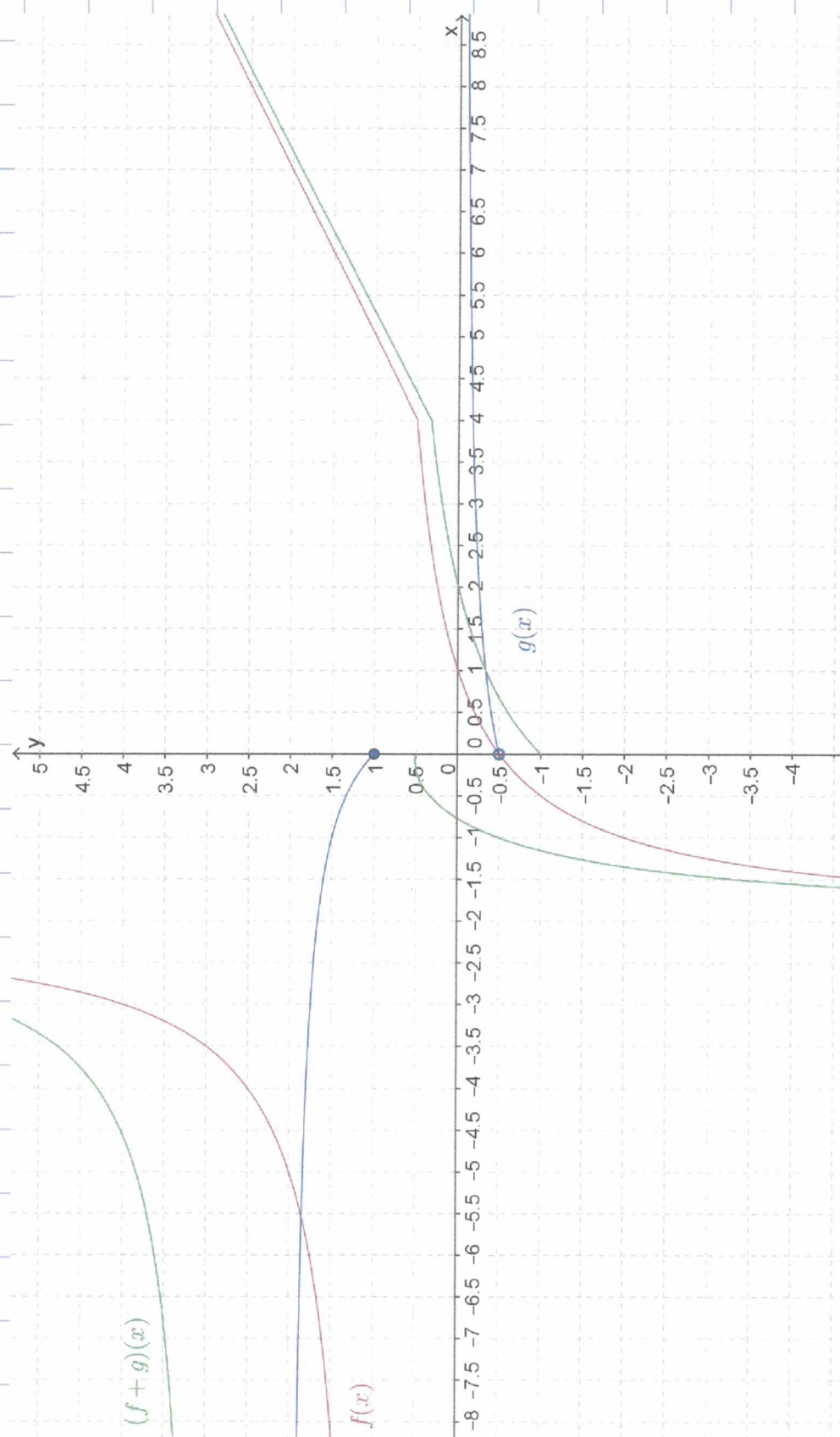
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+2} & \text{si } x \leq 4 \\ \frac{x-3}{2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{-1}{x+2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Construire les graphes de $f(x)$ et $g(x)$



- (b) Construire les graphes de $(f + g)(x)$ et justifier le comportement asymptotique des fonctions obtenues



2. Déterminer le domaine de $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 5}}{|x^2 - 2x - 3| - |1 - 2x|}$

CE : (1) $-x^2 + x + 5 \geq 0$

(2) $|x^2 - 2x - 3| - |1 - 2x| \neq 0$

(1) $\Delta = 1 + 20 = 21 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

x		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	
CE(1)	-	0	+	0	-

(2) $|x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{si } x^2 - 2x - 3 \geq 0 \quad (*) \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases}$

$x^2 - 2x - 3$

x		-1		3	
$x^2 - 2x - 3$	+	0	-	0	+

$|1 - 2x| = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ -1 + 2x & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

x		-1		$\frac{1}{2}$		3	
$ x^2 - 2x - 3 $	$x^2 - 2x - 3$	$-x^2 + 2x + 3$	$-x^2 + 2x + 3$	$x^2 - 2x - 3$			
$ 1 - 2x $	$1 - 2x$	$1 - 2x$	$-1 + 2x$	$-1 + 2x$			
	(1)	(2)	(3)	(4)			

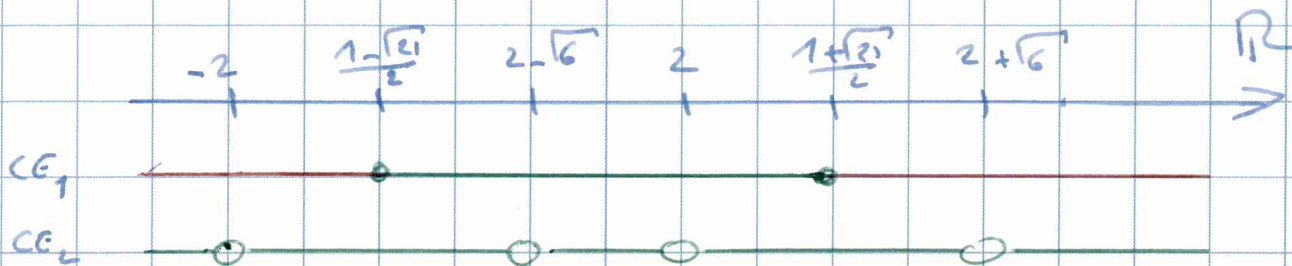
(1) et (3) : $x^2 - 2x - 3 - (1 - 2x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \neq \pm 2$

(2) et (4) : $-x^2 + 2x + 3 - (-1 + 2x) \neq 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x + 2 \neq 0$

$\Delta = 16 + 8 = 24 \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{-2} = 2 \pm \sqrt{6}$

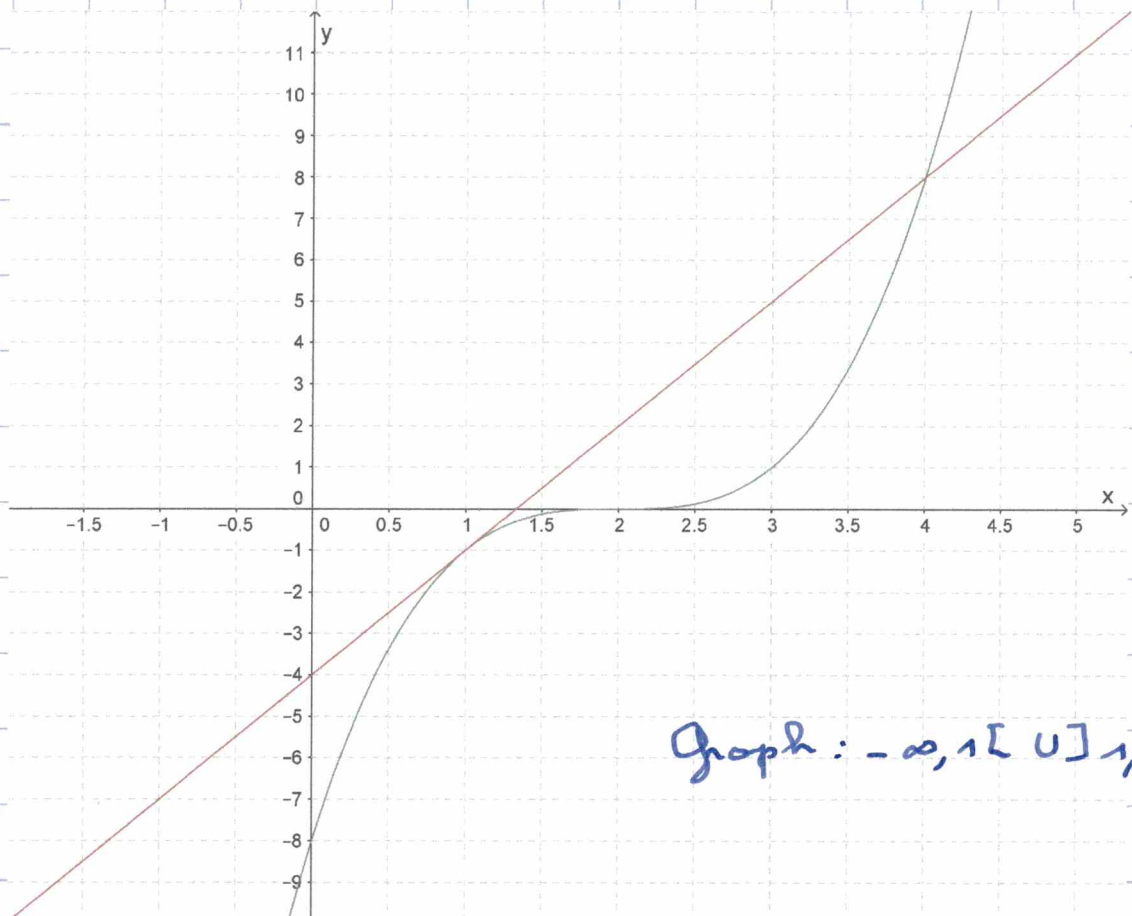


$$\text{don } f: \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 2-\sqrt{6} \right] \cup \left[2-\sqrt{6}, 2 \right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, 2+\sqrt{6} \right]$$

3. Résoudre graphiquement :

Dans chaque cas, vérifier algébriquement le résultat.

(a) $(x-2)^3 < 3x-4$



Graph : $-\infty, 1[\cup] 4, \infty[$

Alg: $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 3x + 4 < 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 < 0$

$P(1) = 0$

	1	-6	9	-4
1		1	-5	4
	1	-5	4	0

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 4) < 0$

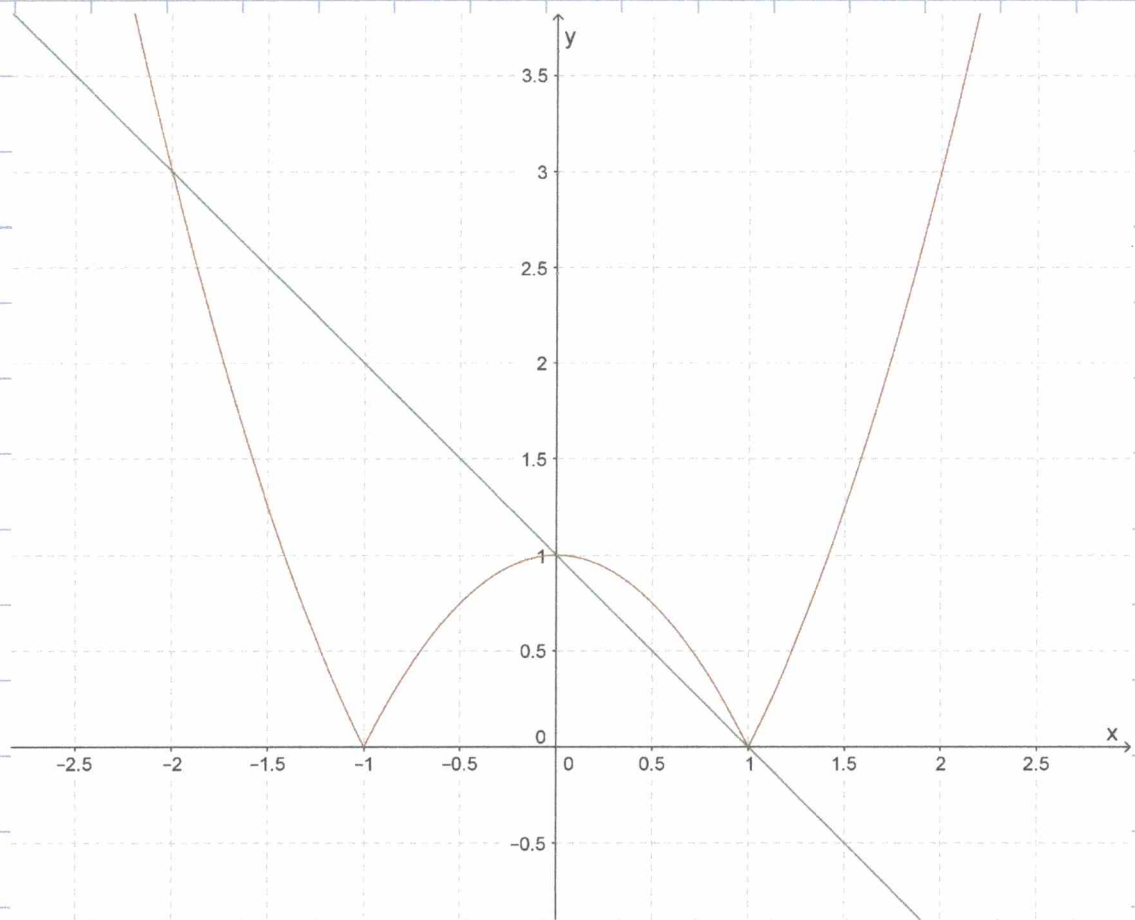
$\Delta < 0$

$x = 1$ ou $x = 4$

x		1		4	
$x-1$	-	0	+		+
x^2-5x+4	+	0	-	0	+
I_n	-	0	-	0	+

$S: -\infty, 1[\cup] 4, \infty[$

(b) $|x^2 - 1| > 1 - x$

Graph: $-\infty, -2[\cup]0, +\infty$

Alg: $|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x^2 - 1 \geq 0 \\ -(x^2 - 1) & \text{si } x^2 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ (1)

(*) $x^2 - 1 \geq 0$

x	-1	1
$x^2 - 1$	$+$	$+$
	(1)	(1)

x	-1	1
$ x^2 - 1 $	$x^2 - 1$	$1 - x^2$
$1 - x$	$1 - x$	$1 - x$
In	(1)	(2)

$$\textcircled{1} \text{ or } \textcircled{3} \quad x^2 - 1 > 1 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0$$

$$\Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$$

x	-2	1
	+	-
$x^2 + x - 2$	+	+

$$S_1: -\infty, -2[\cup]1, +\infty$$

(OR over $\mathbb{C}(1)$)

$$\textcircled{2} \quad 1 - x^2 > 1 - x \Leftrightarrow -x^2 + x > 0$$

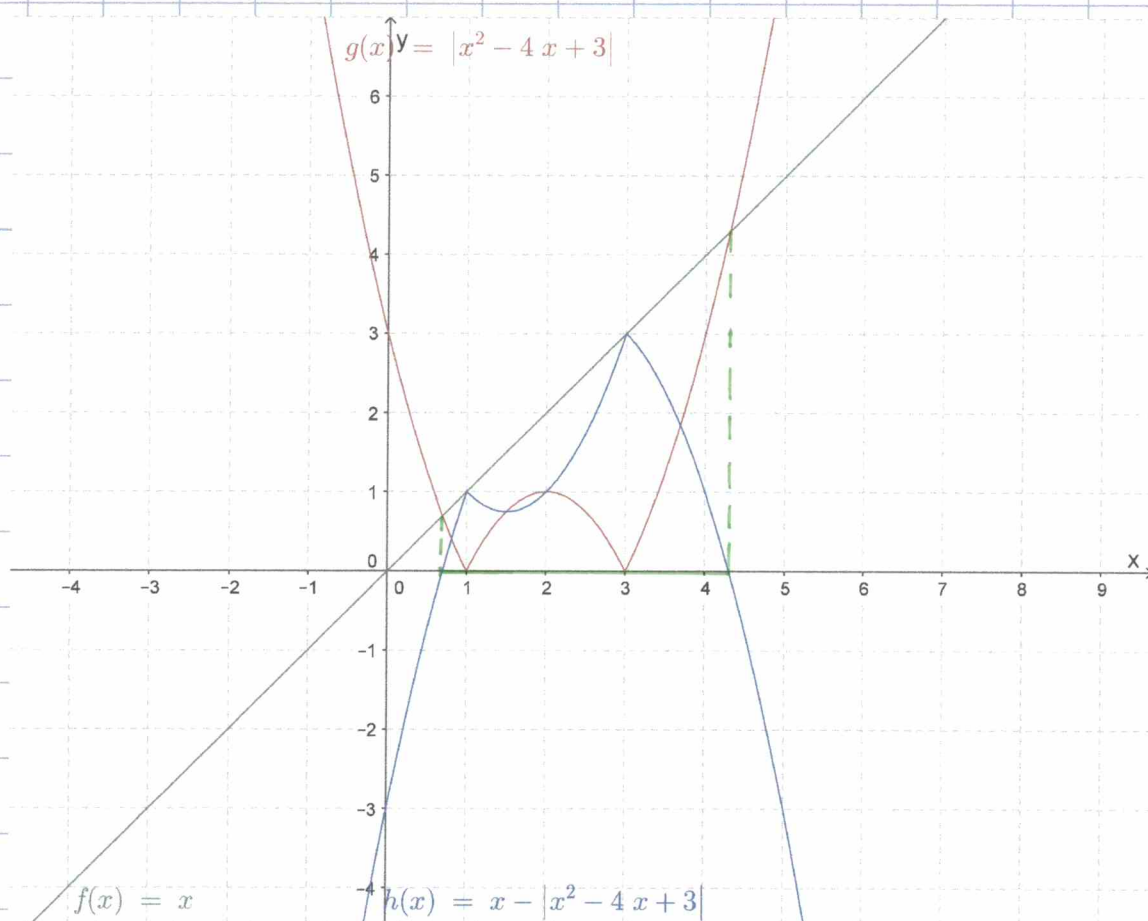
$$\Leftrightarrow x(-x + 1) > 0$$

x	0	1
	-	+
x	-	+
$-x + 1$	+	-
I_n	-	-

$$S_2:]0, 1[\quad (\text{OR over } \mathbb{C}(1))$$

$$S: S_1 \cup S_2$$

4. Résoudre $x - |x^2 - 4x + 3| > 0$ et vérifier graphiquement le résultat.



$$|x^2 - 4x + 3| < x$$

$$\text{graph: }]0,7; 4,2[$$

$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty) \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{si } x \in]1, 3[\end{cases}$$

x	1	3	
$ x^2 - 4x + 3 $	$x^2 - 4x + 3$	$-(x^2 - 4x + 3)$	$x^2 - 4x + 3$
x	x	x	x
In	①	②	③

$$\textcircled{1} \text{ et } \textcircled{3} \quad x^2 - 4x + 3 < x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 < 0$$

$$\Delta = 25 - 12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \begin{cases} \approx 4,3 \\ \approx 0,7 \end{cases}$$

x	x_1	x_2
I_n	+	-
S_1	$]$	

$\forall n \in \mathbb{C} (x \leq 1 \text{ or } x \geq 3)$

$$S_1 :] \frac{5-\sqrt{13}}{2}, 1] \cup [3, \frac{5+\sqrt{13}}{2} [$$

$$(2) -x^2 + 4x - 3 < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 3 < 0$$

$$\Delta = 9 - 12 = -3$$

x
I_n

$$S_2 : \mathbb{R}$$

$$\forall n \in \mathbb{C} (n \in]1, 3[) \quad S_2 :]1, 3[$$

$$\rightarrow S = S_1 \cup S_2$$

$$=] \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2} [\quad (x \in]0,69; 4,3[)$$

5. Soit la fonction

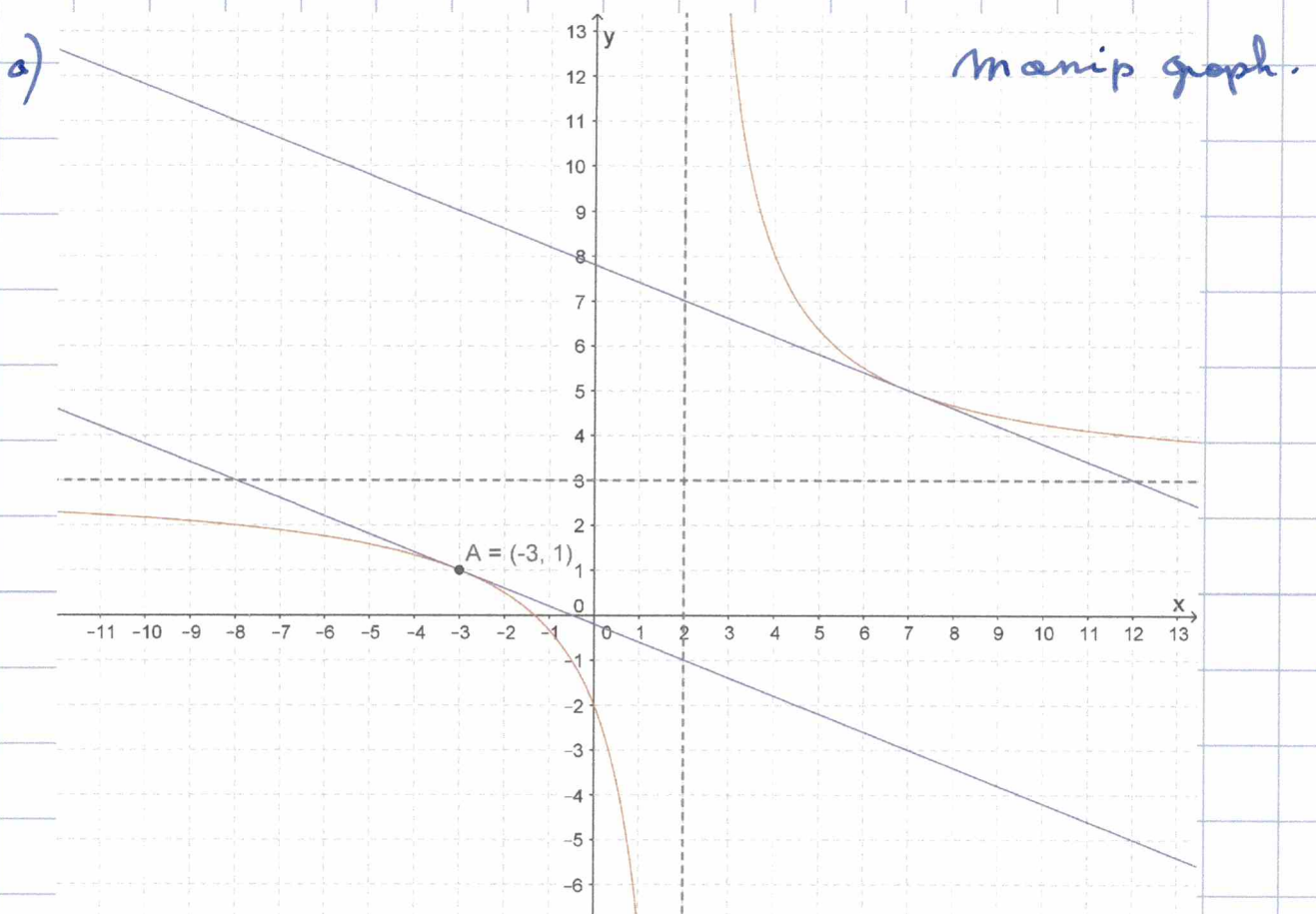
$$f(x) = \frac{3x + 4}{x - 2}$$

- a) Tracer le graphe de $f(x)$ au départ du graphe d'une fonction de référence.
 b) Déterminer ensuite la (les) valeur(s) de p pour laquelle (lesquelles) les droites

$$d \equiv y = -\frac{2}{5}x + p$$

sont tangentes au graphique de f .

- c) Vérifier graphiquement les résultats et déterminer les coordonnées du point de contact à abscisse négative.



$$\begin{array}{r|l} 3x + 4 & x - 2 \\ - (3x - 6) & 3 \\ \hline & 10 \end{array}$$

$$f(x) = 3 + \frac{10}{x-2}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x-2}$$

TH (2 →)

$$f_3(x) = \frac{10}{x-2}$$

EV (y ≠ 10)
 échelle!

$$f_4(x) = 3 + \frac{10}{x-2}$$

TV (3?)

$$b) \begin{cases} y = \frac{3x+4}{x-2} \\ y = -\frac{2}{5}x + p \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+4}{x-2} = -\frac{2}{5}x + p \Leftrightarrow (3x+4) = \left(-\frac{2}{5}x + p\right)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \left(3x+4 = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + px - 2p\right) \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow 15x + 20 = -2x^2 + 4x + 5px - 10p$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 15x + 20 - 4x - 5px + 10p = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (11-5p)x + 20 + 10p = 0 \quad (*)$$

$f(x)$ t'gê $d \Rightarrow \Delta = 0$

$$\Leftrightarrow (11-5p)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (20 + 10p) = 0$$

$$\Leftrightarrow 121 - 110p + 25p^2 - 160 - 80p = 0$$

$$\Leftrightarrow 25p^2 - 190p - 39 = 0$$

$$\Delta = 36100 + 3900 = 40000 \quad (= 200^2)$$

$$p_{1,2} = \frac{190 \pm 200}{50} \begin{cases} \frac{39}{5} \quad (x=7,8) \\ -\frac{1}{5} \quad (x=-0,2) \end{cases}$$

⊛ l'éq donne les abscisses des pts d'intersection de d et f . Comme $\Delta = 0$, $x = -\frac{b}{2a}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(11-5p)}{4} \begin{cases} p_1 \quad 7 \\ p_2 \quad -3 \end{cases}$$

Si $p = -\frac{1}{5}$ et $x = -3$, (1) donne $y = 1$
 $\Rightarrow A(-3, 1)$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(a) $2x + 1 \leq \sqrt{7 - 6x}$

. CE : $7 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{6}$

. Si $2x + 1 \leq 0 \Rightarrow$ tjrs vraie $\Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}$
 $S_1 : -\infty, -\frac{1}{2}]$

. Si $2x + 1 \geq 0$ ($x \geq -\frac{1}{2}$) (1)

$4x^2 + 4x + 1 \leq 7 - 6x$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 10x - 6 \leq 0$

$\Delta = 100 + 96 = 196$

$x_{1,2} = \frac{-10 \pm 14}{8} < \frac{1}{2}$
-3

x		-3		$\frac{1}{2}$	
		+	0	-	0
I_n		+	0	-	0

$S_2 : [-3, \frac{1}{2}]$ over $CE_{(1)} : S_2 : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 : -\infty, \frac{1}{2}]$

$$(b) -\sqrt{2x^2 - 7x - 4} \leq -x + 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 7x - 4} \geq x - 2$$

$$\bullet \text{ CE: } 2x^2 - 7x - 4 \geq 0$$

$$\Delta = 49 + 32 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{4} \begin{matrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

x	$-\frac{1}{2}$	4
$2x^2 - 7x - 4$	$+$	$+$

$$\text{CE: } x \in -\infty, -\frac{1}{2}] \cup [4, +\infty$$

• si $x - 2 \leq 0$ ($\Leftrightarrow x \leq 2$) l'inégalité est toujours vraie $\Rightarrow S_1: -\infty, 2]$

$$\bullet \text{ si } x - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 \geq x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 8 \geq 0$$

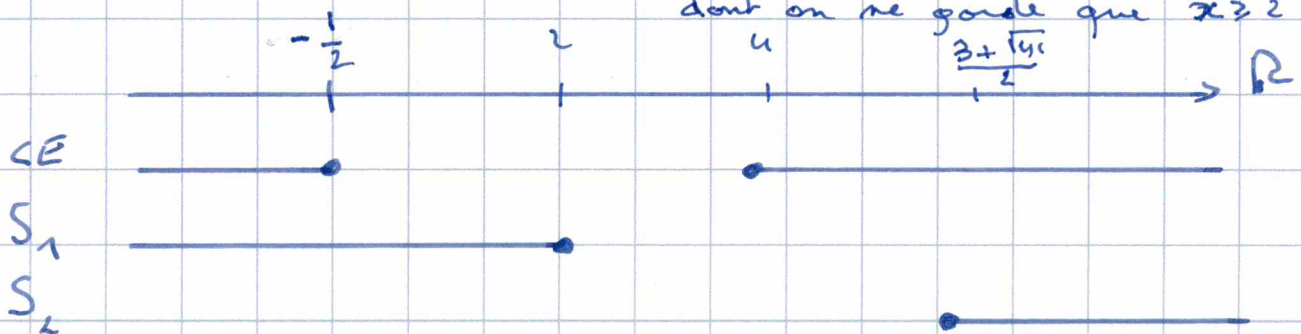
$$\Delta = 9 + 32 = 41$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

x	$\frac{3 - \sqrt{41}}{2}$	$\frac{3 + \sqrt{41}}{2}$
I_m	$+$	$+$

$$S_2: -\infty, \frac{3 - \sqrt{41}}{2}] \cup [\frac{3 + \sqrt{41}}{2}, +\infty$$

dont on ne garde que $x \geq 2$



$$S: -\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{3 + \sqrt{41}}{2}, +\infty$$

(c) $1 - \sqrt{\frac{3-x}{x}} \leq \frac{2}{x-1}$

• L'inéquation peut s'écrire :

$$-\sqrt{\frac{3-x}{x}} \leq \frac{2}{x-1} - 1 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{3-x}{x}} \leq \frac{2-x+1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3-x}{x}} \geq -\frac{3-x}{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3-x}{x}} \geq \frac{x-3}{x-1}$$

• CE_1 $\frac{3-x}{x} \geq 0$

x	0	3
$3-x$	+	+ 0 -
x	- 0 +	+
CE_1	- 0	+ 0 -

$CE_1: x \in]0, 3]$

• Si $\frac{x-3}{x-1} \leq 0$ l'inég est toujours vraie

x	1	3
$x-3$	-	- 0 +
$x-1$	- 0 +	+
$\frac{x-3}{x-1}$	+ 0	- 0 +

$S_1:]1, 3]$

• Si $\frac{x-3}{x-1} \geq 0$ (1) $\Rightarrow \frac{3-x}{x} \geq \frac{(x-3)^2}{(x-1)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-3)}{x} + \frac{(x-3)^2}{(x-1)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{1}{x} + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \frac{(x-1)^2 + x(x-3)}{x(x-1)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \frac{x^2 - 2x + 1 + x^2 - 3x}{x(x-1)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \frac{2x^2 - 5x + 1}{D} \leq 0$$

zeros N: $x = 3$

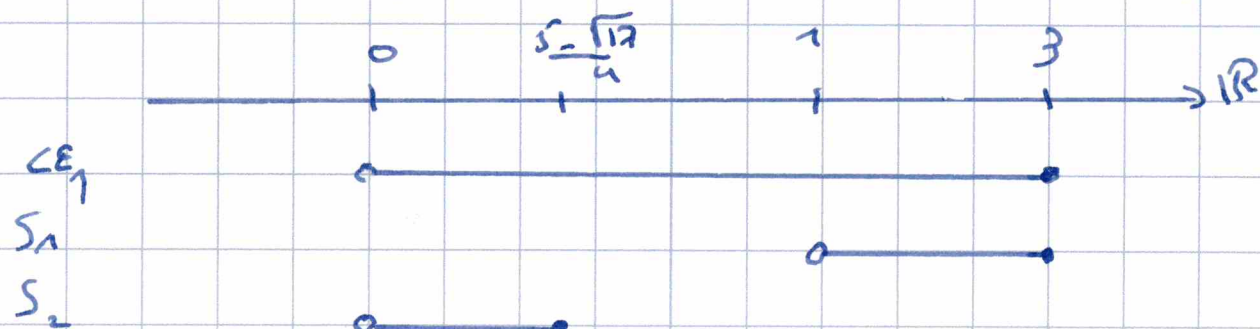
$$2x^2 - 5x + 1 = 0 \quad \Delta \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

D: $x = 0$

$x = 1$

x	0	$\frac{5-\sqrt{17}}{4}$	1	$\frac{5+\sqrt{17}}{4}$	3
$x-3$	-	-	-	-	0 +
$2x^2-5x+1$	+	+	0 -	-	0 + +
x	-	0 +	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	0 +	+
I_n	+	+ -	0 +	+ +	0 -

$$S_2:]0, \frac{5-\sqrt{17}}{4}] \cup [\frac{5+\sqrt{17}}{4}, 3] =]0, \frac{5-\sqrt{17}}{4}] \text{ (par (1))}$$



$$S:]0, \frac{5-\sqrt{17}}{4}] \cup]1, 3]$$

7. Déterminer l'ensemble image des fonctions suivantes :

$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$$

Il faut trouver les valeurs de k telles que l'éq. $f(x) = k$ ait des solutions.

$$\begin{aligned} f(x) = k &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = k(x^2 - 1) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 - kx^2 + k = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-k)x^2 - 2x + (2+k) = 0 \end{aligned}$$

Cette eq a des sol. si $\Delta \geq 0$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= 4 - 4(1-k)(2+k) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4[1 - (-k^2 - k + 2)] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow k^2 + k - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \Delta_k = 5 \quad k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

k	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Δ_x	+	-
	0	0
	-	+

$$\Rightarrow \text{im}_f : -\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$$

$$(b) \ g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x - 2}$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} = k(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = k^2(x^2 - 4x + 4)$$

$$\Leftrightarrow k^2 x^2 - 4k^2 x + 4k^2 - x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 1)x^2 + (4 - 4k^2)x + 4k^2 - 3 = 0$$

$$\Delta_x = (4 - 4k^2)^2 - 4(k^2 - 1)(4k^2 - 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 32k^2 + 16k^4 - 4(4k^4 - 7k^2 + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 32k^2 + 16k^4 - 16k^4 + 28k^2 - 12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4k^2 + 4 \geq 0$$

k	-1	1
Δ_x	-	+

$$\Rightarrow \text{im}_f: [-1, 1]$$

8. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{3}{x^2 + 2x - 3}$ admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.

Il faut comparer $f(-1-x)$ et $f(-1+x)$

$$\begin{aligned} f(-1-x) &= \frac{3}{(-1-x)^2 + 2(-1-x) - 3} \\ &= \frac{3}{x^2 + 2x + 1 - 2 - 2x - 3} \\ &= \frac{3}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1+x) &= \frac{3}{(-1+x)^2 + 2(-1+x) - 3} \\ &= \frac{3}{x^2 - 2x + 1 - 2 + 2x - 3} \\ &= \frac{3}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

$$f(-1-x) = f(-1+x) \Rightarrow x = -1 \text{ est A.S.}$$

9. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ admet un centre de symétrie d'abscisse 1. Quelles sont les coordonnées de ce point ?

Si l'abscisse du C.S. est 1, son ordonnée est

$$b = \frac{f(1-x) + f(1+x)}{2}$$

$$f(1-x) = \frac{x^2 - 2x + 1 + 1 - x + 1}{1 - x - 1} = \frac{x^2 - 3x + 3}{-x}$$

$$f(1+x) = \frac{x^2 + 2x + 1 + x + 1 + 1}{1 + x - 1} = \frac{x^2 + 3x + 3}{x}$$

$$f(1-x) + f(1+x) = -\frac{x^2 - 3x + 3}{x} + \frac{x^2 + 3x + 3}{x}$$

$$= \frac{-x^2 + 3x - 3 + x^2 + 3x + 3}{x}$$

$$= \frac{6x}{x} = 6$$

$$\Rightarrow b = 3$$

$$\text{C.S. } (1, 3)$$