Athénée Royal Uccle 1

Athénée Royal d'Uccle 1

Cours de Mathématique

5ème année

RÉVISION DE JUIN

Exercices à faire
Juin 2023

1. Analyse

✓ 1	✓ 6	✓ 11
✓ 2	✓ 7	✗ 12
✓ 3	✗ 8	✗ 13
✗ 4	✗ 9	✗ 14
✓ 5	✓ 10	

2. Trigonométrie

✓ 1	✗ 2

3. Géométrie

✗ 1	✗ 3	✗ 5
✗ 2	✗ 4	✗ 6

4. Suites

✓ 1	✓ 3	✓ 5
✓ 2	✓ 4	✓ 6

1 Analyse

1.1 Exercices

1. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 3}{x^2 + c}$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$

   (a) Déterminer a, b et c pour que la fonction admette les droites $y = 2$ et $x = 1$ pour asymptotes et sachant que la tangente au point d'intersection du graphique de $f(x)$ avec l'axe Oy a pour équation $-4x + y + 3 = 0$

   (b) Etudier la variation de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$

2. Ecrire l'équation de la tangente au graphique de $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x} - x$ en le point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

3. On donne la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

   (a) Déterminer le domaine et les zéros de $f(x)$.

   (b) Ecrire l'équation des asymptotes de $f(x)$.

   (c) Calculer la dérivée première de $f(x)$ et justifier que $f(x)$ est toujours croissante.
   Préciser clairement ce qui se passe en $x = 0$.

   (d) Calculer le coefficient angulaire de la tangente au point d'inflexion de la courbe. La dérivée seconde de $f(x)$ s'écrit :

$$f''(x) = \frac{(4x-1)\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}{4x^2(1-x)^2}$$

4. On donne la fonction $f(x)$ définie par :

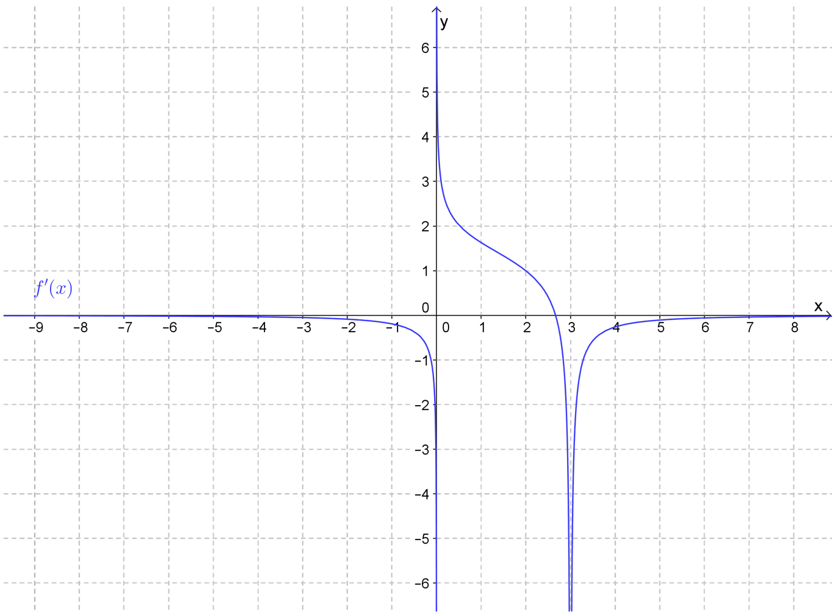
$$f(x) = \begin{cases} a\dfrac{x^3+8}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{\sqrt{x+6}-2}{\sqrt{(2x+20)a^2 - 4a}} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

   Pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction est-elle continue ?

5. Soit
$$f(x) = \frac{(1-x)^3}{x^2}$$
et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative
   (a) Trouver a, b, c, d tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2}$ pour tout x réel non nul.
   (b) Etudier les variations de f .
   (c) Déterminer une équation de la tangente t à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$
   (d) Peut-on trouver un point de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ soit parallèle à la droite $d \equiv y = -x$? Si oui, préciser l'équation de cette tangente t'.
   (e) Montrer que $\mathcal{C}$ a une asymptote oblique d'. Préciser leurs positions respectives.
6. Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$(unité : 2 cm)
   (a) *Etude d'une fonction auxiliaire.*
   Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$
      i. Etudier les variations de la fonction g, et calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
      ii. Montrer qu'il existe un réel a unique tel que $g(a) = 0$. Montrer que $2,1 < a < 2,2$.
      iii. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) *Etude de la fonction f.*
      i. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
      ii. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, $f'(x) = \dfrac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.
      iii. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique d . Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à d.
      iv. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.
7. En utilisant la définition du nombre dérivé, écrire l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ au point d'ordonnée 1.
   Même question avec la fonction $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ au point d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$ et d'abscisse positive.
8. Trois côtés d'un trapèze ont 10 cm de longueur. Quelle doit être la longueur du quatrième côté pour que l'aire du trapèze soit maximale ?

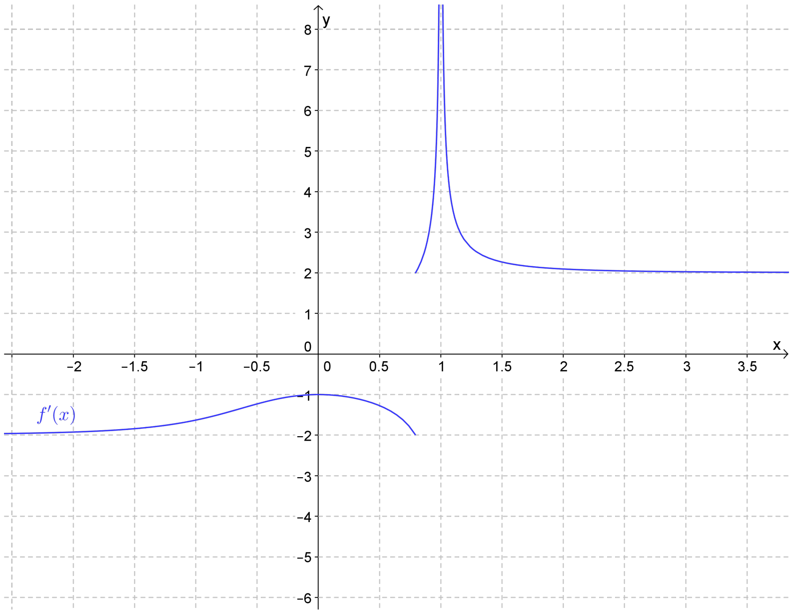
9. On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm. On inscrit dans ce cube, le parallélépipède rectangle $EIJKLPNM$ tel que $EI = IJ = x$ et $AL = x$ ($I \in EF$ et $L \in AE$).
On veut déterminer la valeur x pour laquelle le parallélépipède rectangle est de volume maximum.
   (a) Calculer le volume V du parallélépipède.
   (b) Trouver alors la valeur x et le volume maximum correspondant.
   (c) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, les valeurs de x pour lesquelles le parallélépipède a pour volume 0,025 litres.

10. On donne la fonction $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ et le graphe de sa dérivée.



   (a) Déterminer l'équation des asymptotes de $f(x)$
   (b) Uniquement sur base de ce graphe (***sans calculer*** aucune dérivée) et de la forme analytique de la fonction, établir le tableau récapitulatif du comportement de $f(x)$ et esquisser le graphe de $f(x)$.

11. On donne la fonction $f(x) = \left|\sqrt[3]{x^3 - 1} + x\right|$ et le graphe de sa dérivée.



Uniquement sur base de ce graphe (***sans calculer*** aucune dérivée) et de la forme analytique de la fonction, établir le tableau récapitulatif du comportement de $f(x)$ et esquisser le graphe de $f(x)$.

12. Calculer

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 - \cos 2x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$

13. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \dfrac{\cos x}{\sin 3x} + \cot x$ au point d'abscisse $\dfrac{5\pi}{6}$

14. Faire l'étude complète de $f(x) = \cos x + \cos 2x$

1.2 Solutions

1. (a) $a = 2, b = -4$ et $c = -1$

   (b) $f'(x) = \dfrac{2(2x^2 - 5x + 2)}{(x^2 - 1)^2}$.
   Tableau de variations :

x		-1		$\frac{1}{2}$		1		2	
$N(x)$	+		+	0	-		-	0	+
$D(x)$	+	0	+		+	0	+		+
$f'(x)$	+	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
	$\nearrow$		$\nearrow$	M	$\searrow$		$\searrow$	m	$\nearrow$
				$\left(\frac{1}{2}, -2\right)$				$(2, 1)$	

2. $t \equiv y = -x - \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$

3. (a) dom_f : $[0, 1[$ et zéro : $x = 0$;

   (b) $AV \equiv x = 1$

   (c) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}{2x(1-x)}$.
   Sur dom_f $f'(x)$ est toujours positive et donc $f(x)$ toujours croissante.
   $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$. On a donc une tangente verticale.

   (d) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$ et $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

4. $a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

5. (a) $a = -1, b = 3, c = -3$ et $d = 1$;

   (b) $f'(x) = -\dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3}$.
   Tableau de variations :

x		-2		0		1	
-1	-		-		-		-
$(x+2)$	-	0	+		+		+
$(x-1)^2$	+		+		+	0	+
$D(x)$	-		-	0	+		+
$f'(x)$	-	0	+	$\nexists$	-	0	-
	$\searrow$	m	$\nearrow$		$\searrow$	T.H.	$\searrow$
		$\left(-2, \frac{27}{4}\right)$					

   (c) $t \equiv y = -5x + 3$

   (d) $x = \dfrac{2}{3}$ et $t \equiv y = \dfrac{3 - 4x}{4}$

(e) $A.O. \equiv y = 3 - x$, $d(x) = \dfrac{1-3x}{x^2}$. La fonction est située au dessus de l'$A.O.$ si $x \leq \dfrac{1}{3}$.

6. (a) i. $g'(x) = 3x^2 - 3$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$;
Tableau de variations :

x		-1		1	
x^2-1	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
	$\nearrow$	M (-1,-2)	$\searrow$	m (1,-6)	$\nearrow$

ii. En raison des limites de $g(x)$ et $\pm\infty$, du tableau de variations et notamment les valeurs des ordonnées des extremums, on peut dire grâce au théorème des valeurs intermédiaires que $g(x)$ s'annule une seule fois.
$g(2,1) \approx -1,039$ et $g(2,2) \approx 0.048$.

iii.

x		a	
$g(x)$	-	0	+

(b) i. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm 1} f(x) = \pm\infty$

ii. $f'(x) = \dfrac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}$.
Tableau de variations :

x		-1		0		1		a	
x	-		-	0	+		+		+
$g(x)$	-		-		-		-	0	+
$(x^2-1)^2$	+	0	+		+	0	+	0	+
$f'(x)$	+	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
	$\nearrow$		$\nearrow$	M $(0,0)$	$\searrow$		$\searrow$	m $(a, f(a))$	$\nearrow$

iii. Il suffit de simplifier la nouvelle expression donnée. Comme, en $\pm\infty$ le terme $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ tend vers zéro, la fonction tend vers $c+2$ en $\pm\infty$ qui est donc une asymptote oblique de la fonction.
$d(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ dont le signe est :

x		-2		-1		1	
$x+2$	-	0	+		+		+
x^2-1	+		+	0	-	0	+
$d(x)$	-	0	+	$\nexists$	-	0	+

La fonction est sous l'$A.O.$ en $-\infty$ et au dessus en $+\infty$.

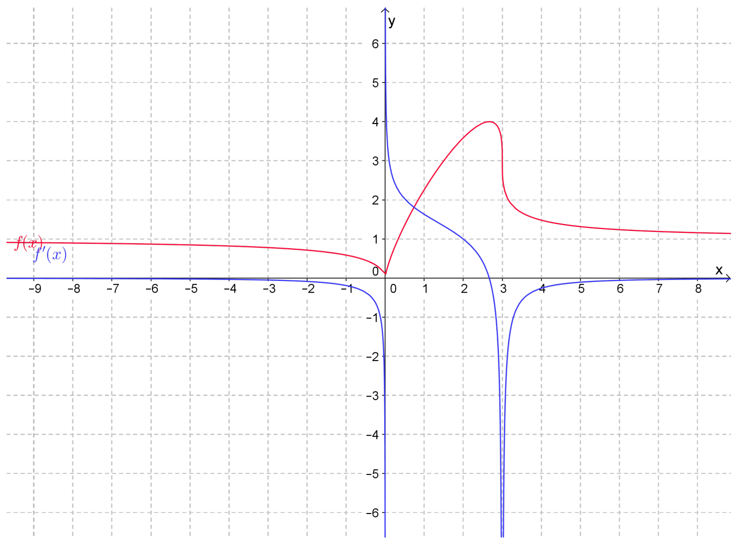
iv. Il faut résoudre l'équation $f'(x) = 1$ dont les solutions sont $x = -2 \pm \sqrt{3}$.

7. $f'(1) = \dfrac{1}{3}$ et $t \equiv y = \dfrac{x+2}{3}$

8. La base a une longueur de 20 cm.

9. (a) $V = x^2(6-x)$
   (b) $x = 4$
   (c) $x = 5$ et $x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$
10. (a) $AH \equiv y = 1$
    (b) Le tableau récapitulatif est le suivant :

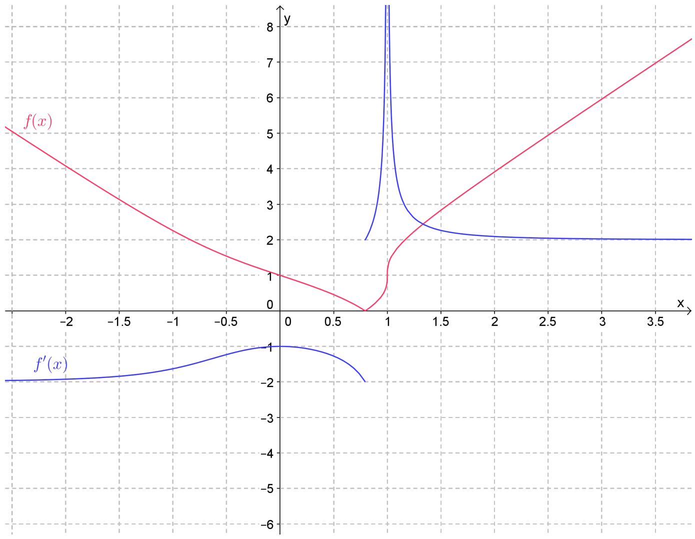
x		0		$2{,}6$		3	
$f'(x)$	-	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	-
$f''(x)$	-	$\nexists$	-		-	$\nexists$	+
$f(x)$	$\searrow$ $\cap$	P.R. $(0,0)$	$\nearrow$ $\cap$	M $\approx (2,6;4)$	$\searrow$ $\cap$	T.V. $(3,3)$	$\searrow$ $\cup$



11. Le tableau récapitulatif est le suivant :

x		0		$0{,}7$		1	
$f'(x)$	-		-		+	$\nexists$	+
$f''(x)$	+	0	-		+	$\nexists$	-
$f(x)$	$\searrow$ $\cup$	PI $(0,1)$	$\searrow$ $\cap$	PA (0,7 ;0)	$\nearrow$ $\cup$	TV $(1,1)$	$\nearrow$ $\cap$

12. Calculer
    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos 2x} = \dfrac{1}{2}$
    (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{2}$
13. $t \equiv y = -\dfrac{9x}{2} + 15\dfrac{\pi}{4} - 3\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



14. dom_f : $\mathbb{R}$, période : 2π, fonction paire, intervalle d'étude $[0, \pi]$;
zéros : $x = \dfrac{\pi}{3}$ et $x = \pi$;
$f'(x) = -2\sin 2x - \sin x$

x	0		$1{,}82$		π
$-\sin x$	0	-		-	0
$4\cos x + 1$		$+$	0	-	
$f'(x)$	0	-	0	$+$	0
	M $(0, 2)$	$\searrow$	m (1,82 ;-1,125)	$\nearrow$	M $(\pi, 0)$

2 Trigonométrie

2.1 Exercices

1. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle $[0, 2\pi[$:
   (a) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sqrt{3}$
   (b) $3\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$
   (c) $\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$
   (d) $\sin 4x + \sin x = 0$
   (e) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$
   (f) $2\cos^2 x - 1 = 0$
   (g) $3\tan\theta = 2\cos\theta$
   (h) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$
   (i) $\tan 4\theta = 4\tan\theta$
   (j) $2\sin z + 3\cos z = 1$
2. Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ (sauf pour l'exercices 2g) :
   (a) $\dfrac{\cos 2x}{1 - 2\sin 2x} < 0$
   (b) $\sin^2 x + \sin x > 0$
   (c) $\cos^2 x - \sin x > 0$
   (d) $3\cos x + 2\sin x \leq 1$
   (e) $3\sin x + 2 > 2\sin^2 x$
   (f) $\sqrt{3}\tan^2 x - 4\tan x + \sqrt{3} < 0$
   (g) $2\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} - 1 > 0$
   (h) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2 < 0$

2.2 Solutions

1. (a) $S : \left\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}\right\}$
   (b) $S : \left\{-\frac{35\pi}{36}, -\frac{23\pi}{36}, -\frac{11\pi}{36}, \frac{\pi}{36}, \frac{13\pi}{36}, \frac{25\pi}{36}\right\}$
   (c) $S : \left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{19\pi}{24}, -\frac{7\pi}{24}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}\right\}$
   (d) $S : \left\{-\frac{4\pi}{5}, -\frac{2\pi}{5}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi\right\}$
   (e) $S : \left\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$
   (f) $S : \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
   (g) $S : \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
   (h) $S : \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$
   (i) $S : \{-1,99; -1,15; 1,15; 1,99\}$
   (j) $S : \{-12,7; 1,88\}$
2. (a) $x \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{17\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}\right[$
   (b) $x \in]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
   (c) $x \in]0; 0,666[\cup]2,475; 2\pi]$
   (d) $x \in [1,878; 5,581]$
   (e) $x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right[$
   (f) $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right[$
   (g) $x \in \left[0, \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{8\pi}{3}, 2\pi\right[+ 4k\pi$
   (h) $x \in]0, \pi[\cup \left]\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$

3 Géométrie

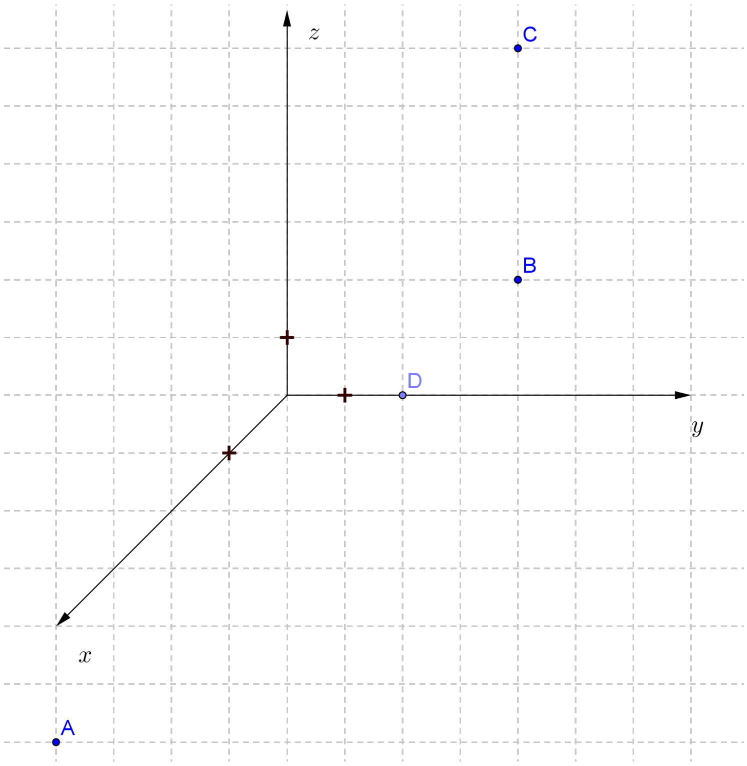
3.1 Exercices

Soit les points $A(3,-1,-3)$, $B(0,4,2)$, $C(-3,1,3)$ et $D(-2,0,-2)$

1. Placer ces points dans le repère donné
2. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}$
3. Déterminer les coordonnées de G sachant que $2\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{CG}$
4. Déterminer les coordonnées de E tel que $AECD$ soit un parallélogramme.
5. Déterminer une valeur de k pour que le vecteur $(k,2k-1,3)$ soit orthogonal au vecteur $\overrightarrow{DA}$
6. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.

3.2 Solutions

1.



2. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} : (3, 11, 3)$
3. $G : (-5, -11, -5)$
4. $E(2, 0, 2)$
5. $k = \dfrac{2}{3}$
6. $\widehat{ABC} \approx 1.54(88°)$.

4 Suites

4.1 Exercices

1. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ par

$$a_n = \frac{-2}{n+1} + 1$$

et

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = -{b_n}^2 + b_n - 1 \end{cases}$$

Etudier le sens de variation des suites.

2. Soit la suite (a_n) définie par $a_n = 7 - 3n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$
   (a) Calculer a_1, a_2 et a_3
   (b) Démontrer que (a_n) est une suite arithmétique et déterminer la raison de la suite ?
   (c) Quelle est la valeur du 51ème terme ?
   (d) Calculer la somme des 51 premiers termes ?
3. Soit la suite arithmétique (a_n) de raison r dont on connait 2 termes $a_{100} = 90$ et $a_{1000} = 900$.
   (a) Calculer la raison r et a_1.
   (b) Calculer la somme de a_{100} à a_{1000}.
4. Soit (a_n) la suite arithmétique dont le 7ème terme vaut 74, le $n$ème 226 et la somme des n premiers termes 2794,5. Déterminer le nombre de termes de cette suite.
5. Calculer la valeur exacte de la somme suivante :

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + ... + 4096$$

6. La population actuelle augmente de 1% par an. En 2010, elle était de 6,9 milliards. On note a_n la population mondiale l'année $2010 + (n - 1)$.

   (a) Expliquer pourquoi la suite (a_n) est géométrique. Préciser son premier terme a_1 et sa raison.

   (b) Exprimer (a_n) en fonction de n.

   (c) En supposant que le taux d'accroissement se maintienne, estimer la population mondiale en 2025.

   (d) A l'aide de la calculatrice, estimer en quelle année les 9 milliards d'habitants seront atteints.

4.2 Solutions

1. On considère les suites (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
2. (a) $a_1 = 4$, $a_2 = 1$ et $a_3 = -1$
   (b) $r = -3$
   (c) $a_{51} = -146$
   (d) $S_{51} = -3621$
3. (a) $r = \dfrac{9}{10}$ et $a_1 = 0,9$
   (b) Somme de a_{100} à a_{1000} : 445223,2.
4. $n = 23$
5. $S = 2731$
6. (a) $a_1 = 6,9$ et $q = 1,01$
   (b) $a_n = 6,9.(1,01)^{n-1}$
   (c) $a_{16} = 8,01$
   (d) $n = 28$