Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°10 - Solutions

Equations trigonométriques

Série A

Le 15 mai 2025 Classe: 5AC

Résoudre les équations suivantes et exprimer les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

   A l'aide des formules des angles associés, l'équation devient

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$$

   dont les solutions sont :

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} - 3x + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 3x + 2k\pi \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ -x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ -x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

   et donc :

$$S_g : \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{5} | k \in \mathbb{Z}\right\}$$

   Dès lors, les solutions sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont :

$$S_p : \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{29\pi}{60}, \frac{53\pi}{60}, \frac{77\pi}{60}, \frac{101\pi}{60}, \frac{23\pi}{12}\right\}$$

2. $\cos 2x + \cos x = 2$

$$\cos 2x + \cos x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$$

Si on pose $y = \cos x$, l'équation devient $y^2 + y - 3 = 0$ dont les solutions sont (Δ) $y = -\frac{3}{2}$ et $y = 1$.
On a

$$sysd\cos x = -\frac{3}{2} \text{ à rejeter} \cos x = 1 \Leftrightarrow 2k\pi$$

et donc :

$$S_g : \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

Dès lors, les solutions sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont :

$$S_p : \{0\}$$

3. $2\cos x - 3\sin x = 1$
En utilisant les formules en $\tan\frac{x}{2}$ et en posant $t = \tan\frac{x}{2}$, l'équation devient :

$$2\frac{1-t^2}{1+t^2} - 3\frac{2t}{1+t^2} = 1$$

En multipliant toute l'équation par $1 + t^2$, on obtient :

$$2 - 2t^2 - 6t = 1 + t^2$$

ou

$$-3t^2 - 6t + 1 = 0$$

ou encore

$$3t^2 + 6t - 1 = 0$$

dont les solutions sont

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

En repassant à la variable x, on a :

$$tan\frac{x_{1,2}}{2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{x}{2} \approx -1,136 + k\pi \\ \frac{x}{2} \approx 0,153 + k\pi \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -2,272 + 2k\pi \\ x \approx 0,306 + 2k\pi \end{cases}$$

et donc :

$$S_g : \{-2,272 + 2k\pi; 0,306 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

Dès lors, les solutions sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont :

$$S_p : \{0,306; 4,011\}$$

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°10 - Solutions

Equations trigonométriques

Série B

Le 15 mai 2025 Classe: 5AC

Résoudre les équations suivantes et exprimer les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1. $2\sin x + 3\cos x = 1$

En utilisant les formules en $\tan\frac{x}{2}$ et en posant $t = \tan\frac{x}{2}$, l'équation devient :

$$2\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

En multipliant toute l'équation par $1+t^2$, on obtient :

$$4t + 3 - 3t^2 = 1 + t^2$$

ou

$$-4t^2 + 4t + 2 = 0$$

ou encore

$$2t^2 - 2t - 1 = 0$$

dont les solutions sont

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

En repassant à la variable x, on a :

$$tan\frac{x_{1,2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{x}{2} \approx -0,351 + k\pi \\ \frac{x}{2} \approx 0,939 + k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -0,702 + 2k\pi \\ x \approx 1,878 + 2k\pi \end{cases}$$

et donc

$$S_g : \{-0,702 + 2k\pi; 1,878 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

Dès lors, les solutions sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont :

$$S_p : \{1,878; 5,581\}$$

2. $\cos 2x - \cos x = 2$

$$\cos 2x - \cos x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$$

Si on pose $y = \cos x$, l'équation devient $y^2 - y - 3 = 0$ dont les solutions sont (Δ) $y = \dfrac{3}{2}$ et $y = -1$.
On a

$$sysd \cos x = \frac{3}{2} \text{ à rejeter} \cos x = -1 \Leftrightarrow \pi + 2k\pi$$

et donc :

$$S_g : \{\pi + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

Dès lors, les solutions sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont :

$$S_p : \{\pi\}$$

3. $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
A l'aide des formules des angles associés, l'équation devient

$$\begin{aligned} &\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \end{aligned}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} - 3x + 2k\pi \\ \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{6} + 3x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \\ -x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ \\ -x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\dfrac{\pi}{5} \\ \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

et donc :

$$S_g : \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{5} | k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Dès lors, les solutions sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont :

$$S_p : \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{29\pi}{60}, \frac{53\pi}{60}, \frac{77\pi}{60}, \frac{101\pi}{60}, \frac{23\pi}{12}\right\}$$