Athénée Royal Uccle 1

**Nom, Prénom:**

**Devoir surveillé n°5 - Solutions**

**Les fonctions : rappels**

Le 17 octobre 2024 — Classe: 5A

.../7 1. Soit la fonction

$$f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{5-2x} - \sqrt{2x+1}$$

On demande de déterminer le(s) zéro(s) de $f(x)$.
Il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$ ou

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{5-2x} - \sqrt{2x+1} = 0$$

Il s'agit d'une équation irrationnelle. Les CE sont $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq \frac{5}{2} \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$. Pour ne pas avoir de CE supplémentaire, on écrit l'éauation sous la forme

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{5-2x} = \sqrt{2x+1}$$

En résumé, les CE sont $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$. On a successivement :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} + \sqrt{5-2x} = \sqrt{2x+1} &\Leftrightarrow x+2+5-2x+2\sqrt{(x+2)(5-2x)} = 2x+1 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(5-2x)} = 3x-6 \quad \text{CE} : x \geq 2 \Rightarrow x \in \left[2, \frac{5}{2}\right] \\ &\Leftrightarrow 4(-2x^2+x+10) = 9(x^2-4x+4) \\ &\Leftrightarrow -17x^2+40x+4 = 0 \end{aligned}$$

dont les solutions $x_{1,2} = \frac{20 \pm 6\sqrt{13}}{17}$. Vu les CE, le seul zéro est $x = \frac{20+6\sqrt{13}}{17}$

.../3 2. Si $f(2x-1) = \frac{x^3+1}{2x^2-x-1}$, que vaut $f(x)$ ?

Pour obtenir $f(x)$ à partir de $f(2x-1)$, il faut y remplacer $x$ par $\frac{x+1}{2}$.

On a alors $f(x) = \dfrac{\left(\frac{x+1}{2}\right)^3 + 1}{2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{2}\right) - 1}$ ou $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+3x+9}{4(x^2+x-2)}$(

3. On donne la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{6x^2+11x+3}}{x+2}$$

et son graphe en annexe.

On demande de déterminer algébriquement ***et*** graphiquement :

.../4 (a) le domaine de $f(x)$ ;

$$\text{CE} : \begin{cases} 6x^2+11x+3 \geq 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \overset{\Delta \text{ et T.S.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \in -\infty, -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty \\ x \neq -2 \end{cases}$$

La droite des réels permet de trouver le domaine :

$$dom_f : x \in -\infty, -2[ \cup ]-2, -\frac{3}{2}] [-\frac{1}{3}, +\infty$$

Graphiquement, on constate que la fonction est dessinée sur l'intervalle $-\infty, -2[ \cup ]-2, -\frac{3}{2}] [-\frac{1}{3}, +\infty$ et qu'il y a une asymptote verticale en $x = -2$ (valeur exclue du domaine). Le domaine est représenté en vert sur l'axe $Ox$.

.../2 (b) le(s) zéro(s) de $f(x)$ ;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6x^2+11x+3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{1}{3}$

Graphiquement, on constate un point d'intersection avec l'axe $Ox$ en $x = -\frac{3}{2}$ et $x = -\frac{1}{3}$. Ce point est la croix rouge sur le graphe.

.../3 (c) la valeur exacte et approchée de l'image de -3 par la fonction ;

$f(-3) = -\sqrt{24} \approx -4,9$.

L'image de -3 par la fonction est indiquée en bleu sur le graphique.

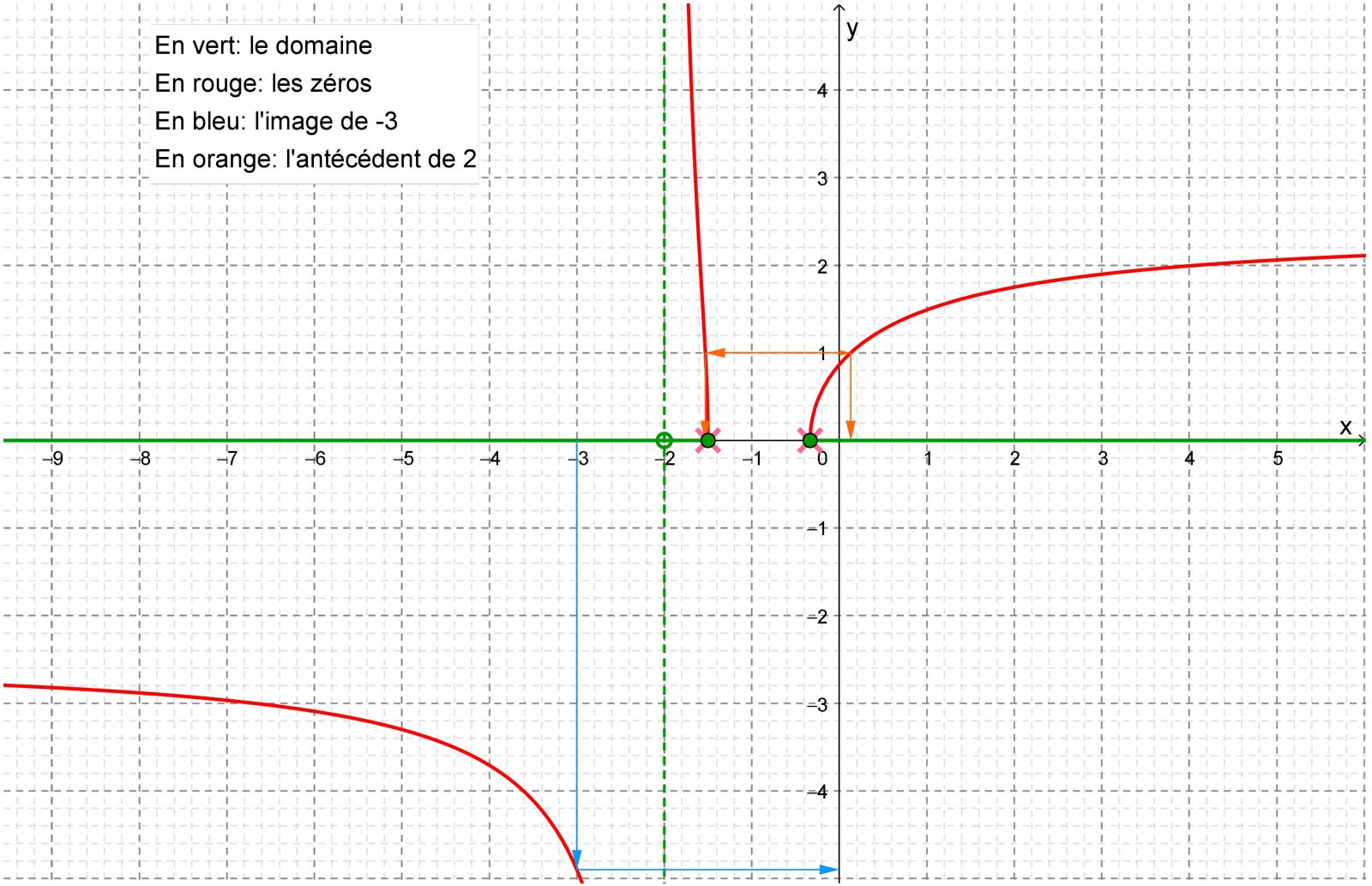
.../5 (d) le (les) antécédent(s) de 3 par $f$.

L'(les) antécédent(s) de 3 par la fonction sont la(les) solution(s) de l'équation $f(x) = 3$. On a successivement :

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{6x^2+11x+3}}{x+2} = 3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{6x^2+11x+3} = 3(x+2) \quad (\text{CE } x \geq -2) \\ &\Leftrightarrow 6x^2+11x+3 = 9(x+2)^2 \\ &\Leftrightarrow 6x^2+11x+3 = 9(x^2+4x+4) \\ &\Leftrightarrow -3x^2-25x-33 \\ &\Leftrightarrow x \overset{\Delta=229}{=} \frac{-25 \pm \sqrt{229}}{6} \end{aligned}$$

En raison des conditions d'existence, seule la solution $x = \frac{-25+\sqrt{229}}{6} \approx -1,64$ peut être acceptée.

Elle est représentée en orange sur le graphe.


En vert: le domaine
En rouge: les zéros
En bleu: l'image de -3
En orange: l'antécédent de 2
y
x
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4