Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°6 - Solutions

Opérations sur les fonctions

Série A

Le 22 septembre 2025 Classe: 5A-C

1. On donne les fonctions

$$f(x) = \frac{x+4}{x+3}$$

et

$$g(x) = x+4$$

.../7 (a) Sans utiliser la division de fonctions, établir le graphe de $f(x)$ dans le repère ci-joint. Justifier le graphe obtenu ;

La division euclidienne permet d'écrire la fonction sous la forme :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+3}$$

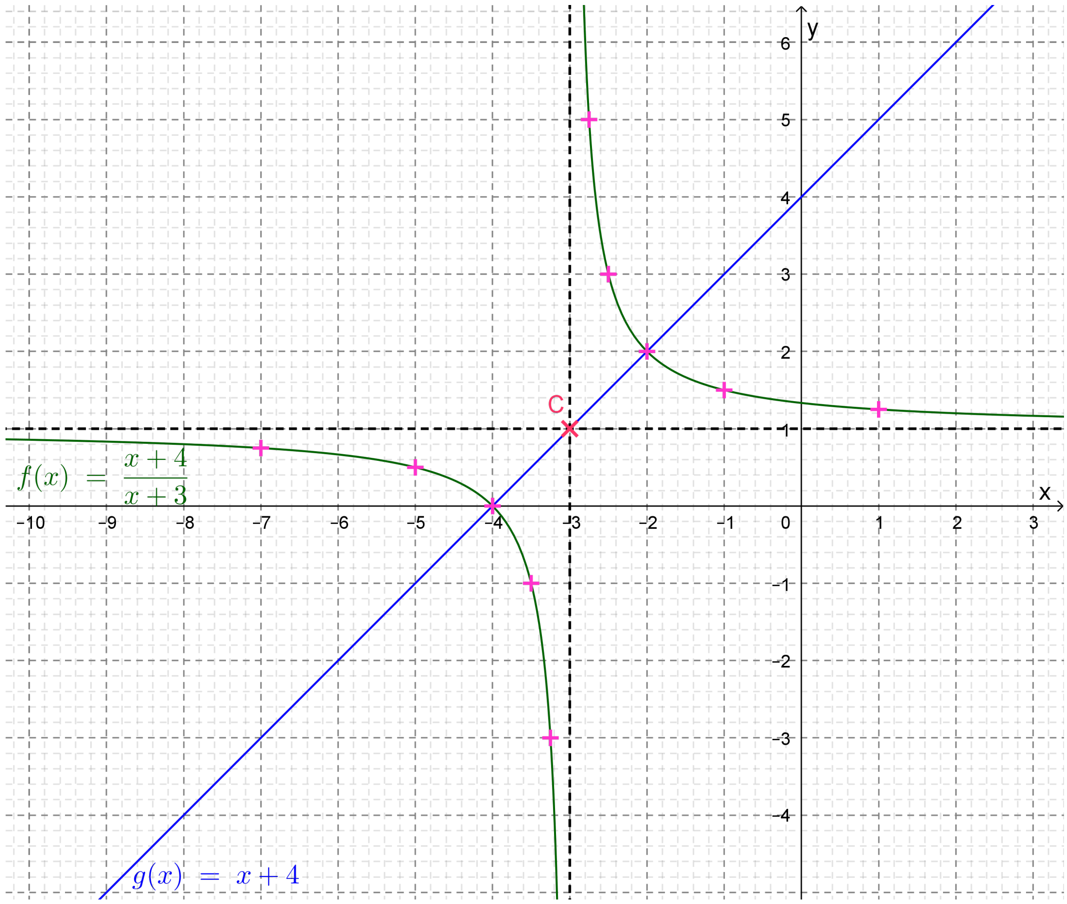
La fonction présente donc les caractéristiques suivante :

AV$\equiv x = -3$
Valeur de x qui annule le dénominateur
AH$\equiv y = 1$
Quotient de la division euclidienne
$C(-3, 1)$
Intersection des asymptotes

Valeurs supplémentaires

x	y
$-\frac{11}{4}$	5
$-\frac{5}{2}$	3
-2	2
-1	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{5}{4}$

Le graphe est donc le suivant :



.../3 (b) Dans le même repère, dessiner le graphe de $g(x)$;
Voir question précédente.

.../7 (c) Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$;
On a successivement :

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{x+3} \geq x+4 \quad &\Leftrightarrow \frac{x+4}{x+3} - x + 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+4-(x+4)(x+3)}{x+3} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+4)(1-x-3)}{x+3} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+4)(-x-2)}{x+3} \geq 0\end{aligned}$$

Le tableau de signe est donc :

x		-4		-3		-2	
$-x^2-6x-8$	-	0	+		+	0	-
$x+3$	-		-	0	+		+
Ineq(x)	+	0	-	$\nexists$	+	0	-

dont la solution est :

$$S : -\infty, -4] \cup]-3, -2]$$

.../3 (d) Vérifier graphiquement le résultat.
On constate bien que la fonction homographique est située au-dessus de la droite sur l'intervalle $x \in -\infty, -4] \cup]-3, -2]$

2. On donne les fonctions

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 1$$

et

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

et leurs graphes respectifs. On demande d'établir, en justifiant le graphique et son comportement asymptotique, le graphe de

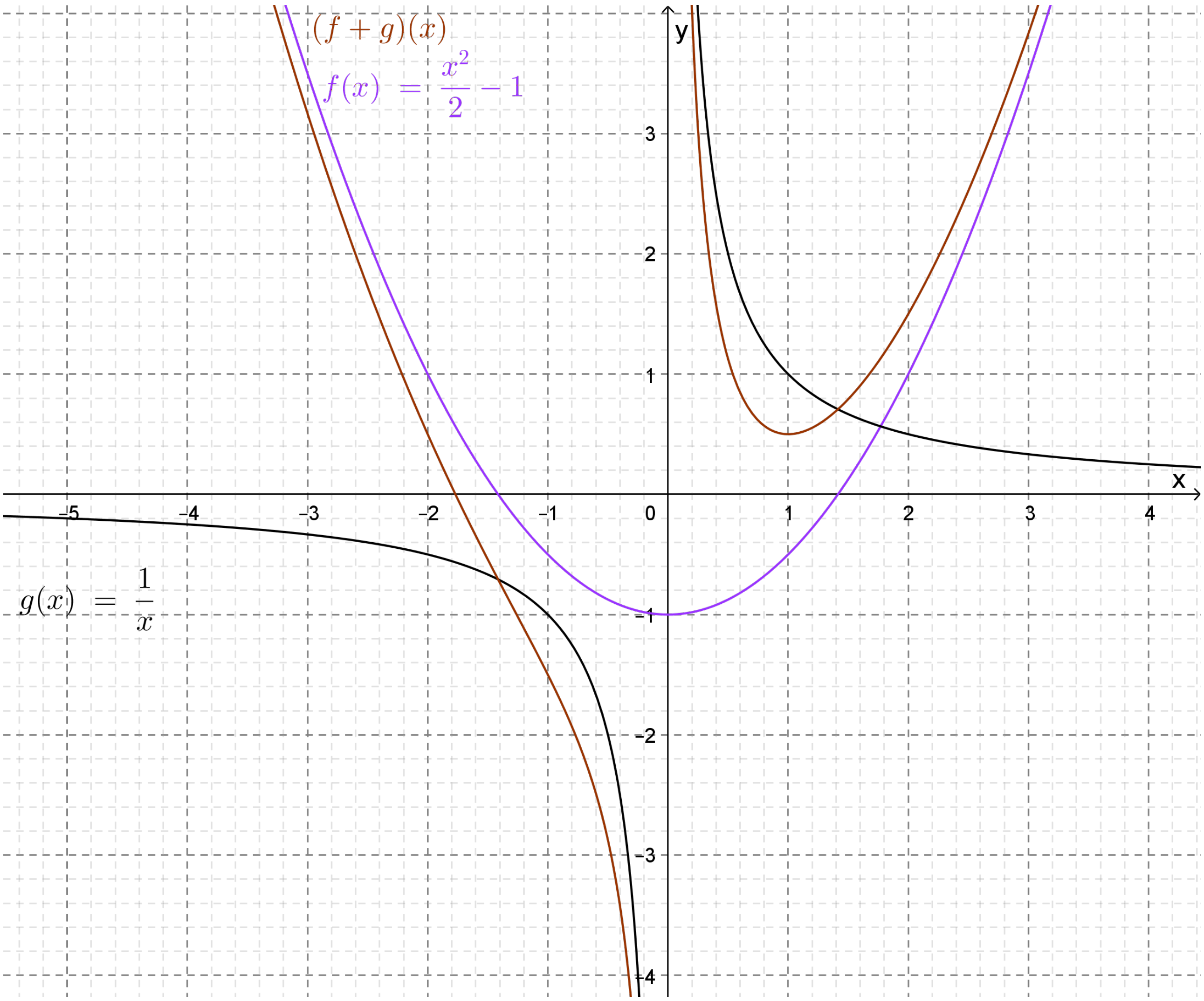
.../7 (a) $(f+g)(x)$;

.../8 (b) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$;

.../5 (c) $\sqrt{g(x)}$.

Nom :..Prénom.......................................

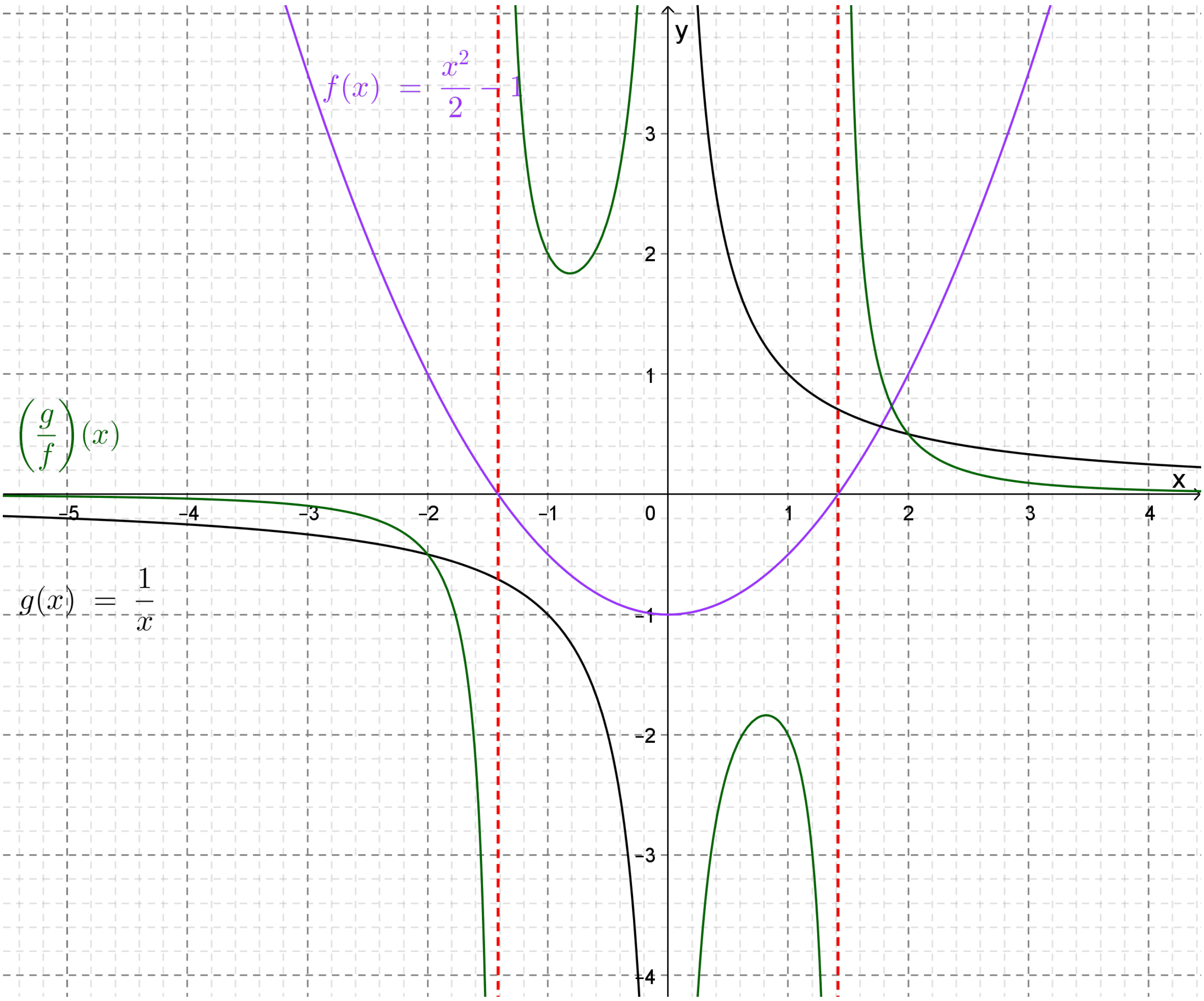
Graphe de $(f+g)(x)$



Lorsque x tend vers $-\infty$, on additionne un nombre qui augmente fort (f) à un nombre qui stagne (g). La somme ($f+g$) augmente donc fort.
L'asymptote verticale de g est toujours présente. A gauche de l'asymptote, la courbe $f+g$ tend vers $-\infty$ car la fonction g tend vers $-\infty$ et f stagne (-1). L'explication est la même à droite de l'asymptote.
L'explication du comportement en $+\infty$ est la même qu'en $-\infty$.

Nom :..Prénom.......................................

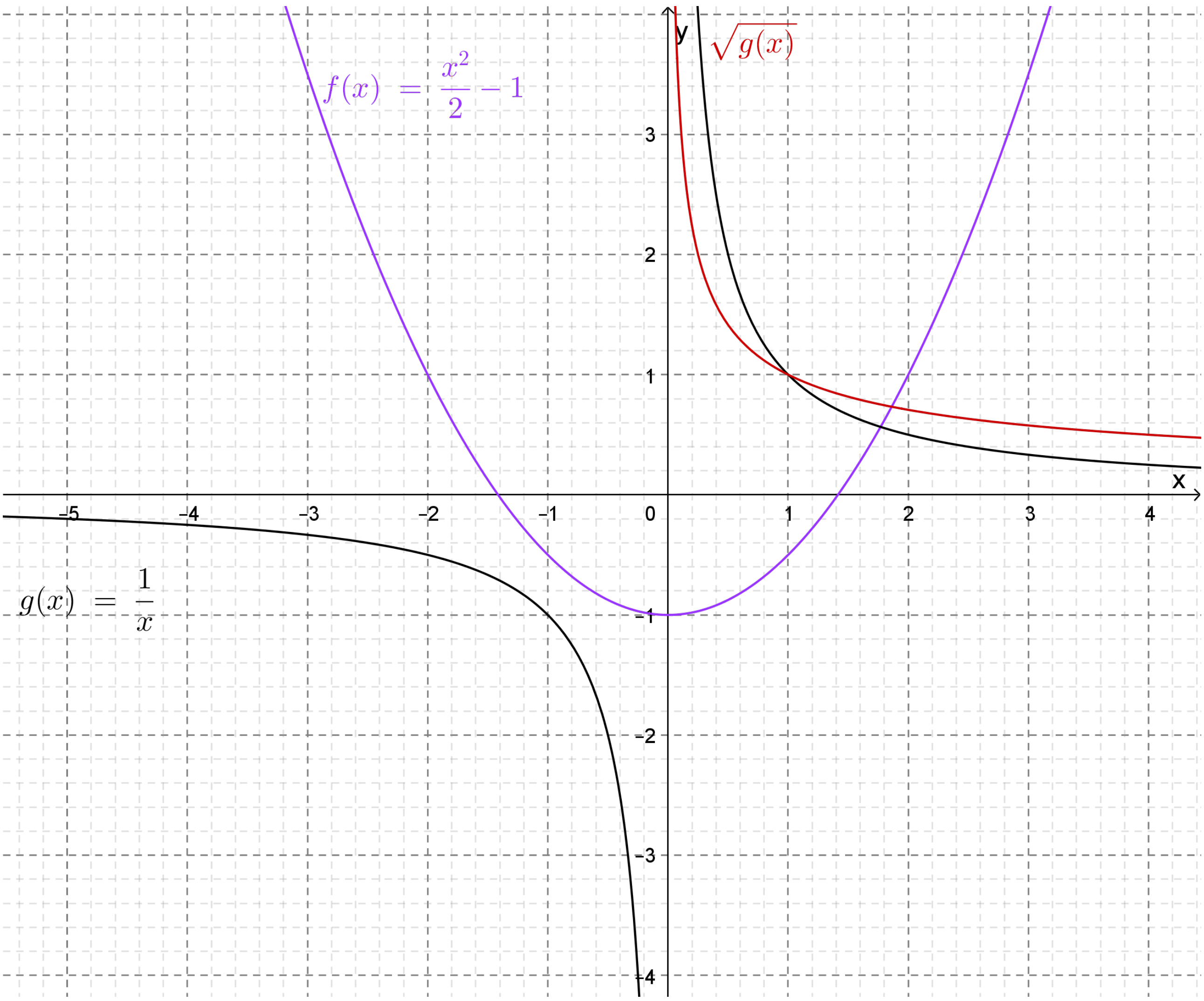
Graphe de $\dfrac{g(x)}{f(x)}$



Lorsque x tend vers $-\infty$, on divise un nombre qui tend vers 0 (g) par un nombre qui augmente très fort (f). Le quotient ($\dfrac{g(x)}{f(x)}$) tend vers 0.
On remarque la présence de deux asymptotes verticales correspondants aux zéros de f (qui est au dénominateur de $\dfrac{g(x)}{f(x)}$). Pour expliquer le comportement de $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ aux alentours des asymptotes, il suffit de regarder le signe des nombres que l'on divise.
L'asymptote verticale de g est toujours présente. Le comportement au niveau de cette asymptote s'explique de la même manière que pour les autres asymptotes verticales.
L'explication du comportement en $+\infty$ est la même qu'en $-\infty$.

Nom :..Prénom.......................................

Graphe de $\sqrt{g(x)}$



Le graphe de $\sqrt{g(x)}$ n'existe que lorsque $g(x)$ est positive (sur $\mathbb{R}^+$).
A gauche de $x = 1$, le graphe de $\sqrt{g(x)}$ est situé sous le graphe de $g(x)$ car si $x \geq 1$, $\sqrt{g(x)} \leq x$.
A droite de $x = 1$, le graphe de $\sqrt{g(x)}$ est situé au-dessus du graphe de $g(x)$ car si $x \leq 1$, $\sqrt{g(x)} \geq x$.

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°6 - Solutions

Opérations sur les fonctions

Série B

Le 22 septembre 2025 Classe: 5A-C

1. On donne les fonctions

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

et

$$g(x) = x - 1$$

.../7 (a) Sans utiliser la division de fonctions, établir le graphe de $f(x)$ dans le repère ci-joint. Justifier le graphe obtenu ;

La division euclidienne permet d'écrire la fonction sous la forme :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

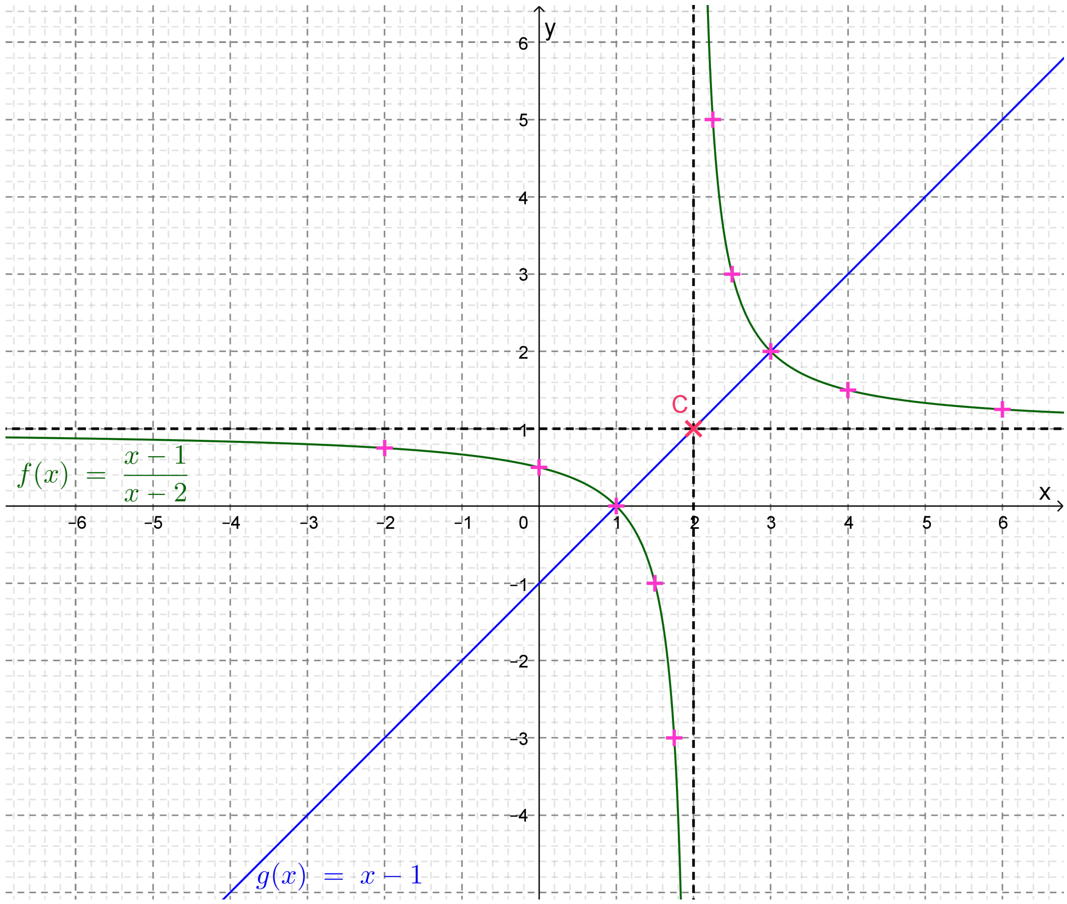
La fonction présente donc les caractéristiques suivante :

AV$\equiv$ $x = 2$
Valeur de x qui annule le dénominateur
AH$\equiv$ $y = 1$
Quotient de la division euclidienne
C$(2, 1)$
Intersection des asymptotes

Valeurs supplémentaires

x	y
$\frac{9}{4}$	5
$\frac{5}{2}$	3
3	2
4	$\frac{3}{2}$
6	$\frac{5}{4}$

Le graphe est donc le suivant :



.../3 (b) Dans le même repère, dessiner le graphe de $g(x)$;
Voir question précédente.

.../7 (c) Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$;
On a successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x-2} \geq x-1 \quad & \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} - x - 1 \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{x-1-(x-1)(x-2)}{x-2} \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{(x-1)(1-x+2)}{x-2} \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{(x-1)(-x+3)}{x-2} \leq 0
\end{aligned}$$

Le tableau de signe est donc :

x		1		2		3	
$-x^2+4x-3$	-	0	+		+	0	-
$x-2$	-		-	0	+		+
$\mathrm{Ineq}(x)$	+	0	-	$\nexists$	+	0	-

dont la solution est :

$$S : [1, 2[\cup [3, +\infty$$

.../3 (d) Vérifier graphiquement le résultat.
On constate bien que la fonction homographique est située sous la droite sur l'intervalle $x \in [1, 2[\cup [3, +\infty$

2. On donne les fonctions

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

et

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$$

et leurs graphes respectifs. On demande d'établir, en justifiant le graphique et son comportement asymptotique, le graphe de

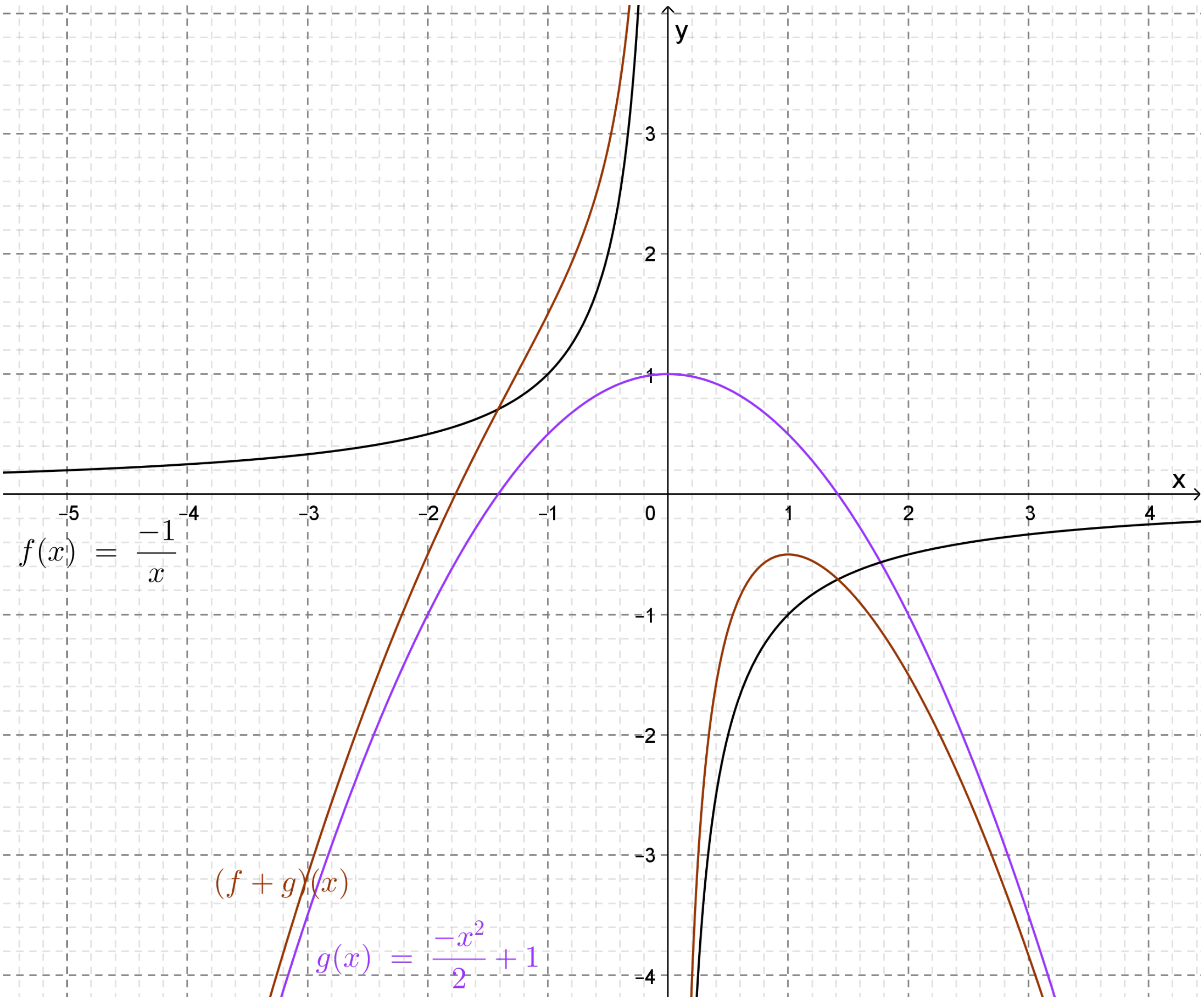
.../7 (a) $(f+g)(x)$;

.../8 (b) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$;

.../5 (c) $\sqrt{f(x)}$.

Nom :..Prénom.......................................

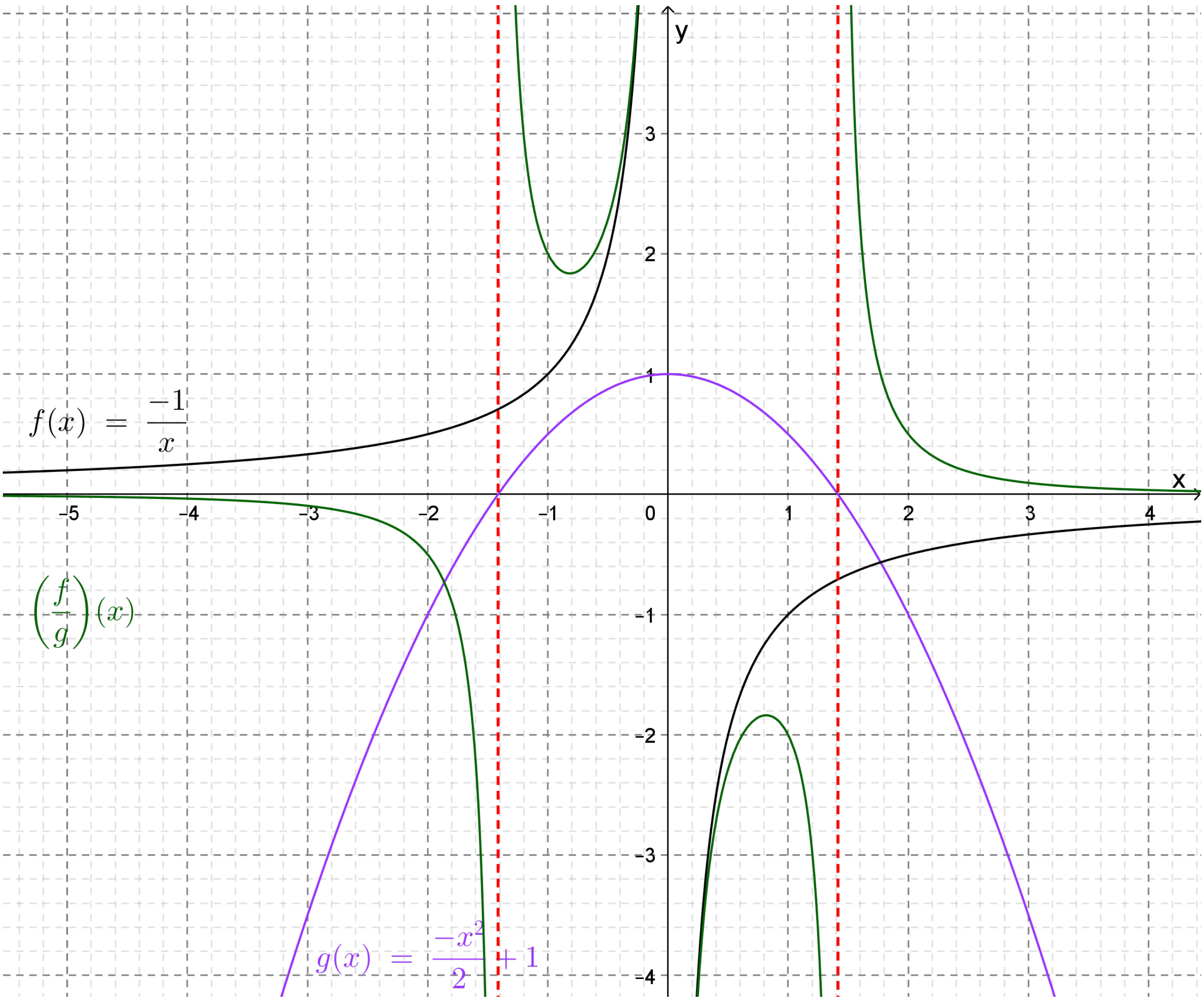
Graphe de $(f+g)(x)$



Lorsque x tend vers $-\infty$, on additionne un nombre qui diminue fort (g) à un nombre qui stagne (f). La somme $(f+g)$ diminue donc fort.
L'asymptote verticale de g est toujours présente. A gauche de l'asymptote, la courbe $f+g$ tend vers $+\infty$ car la fonction f tend vers $+\infty$ et g stagne (1). L'explication est la même à droite de l'asymptote.
L'explication du comportement en $+\infty$ est la même qu'en $-\infty$.

Nom :..Prénom.......................................

Graphe de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$



Lorsque x tend vers $-\infty$, on divise un nombre qui tend vers 0 (f) par un nombre qui augmente très fort (g). Le quotient ($\dfrac{f(x)}{g(x)}$) tend vers 0.

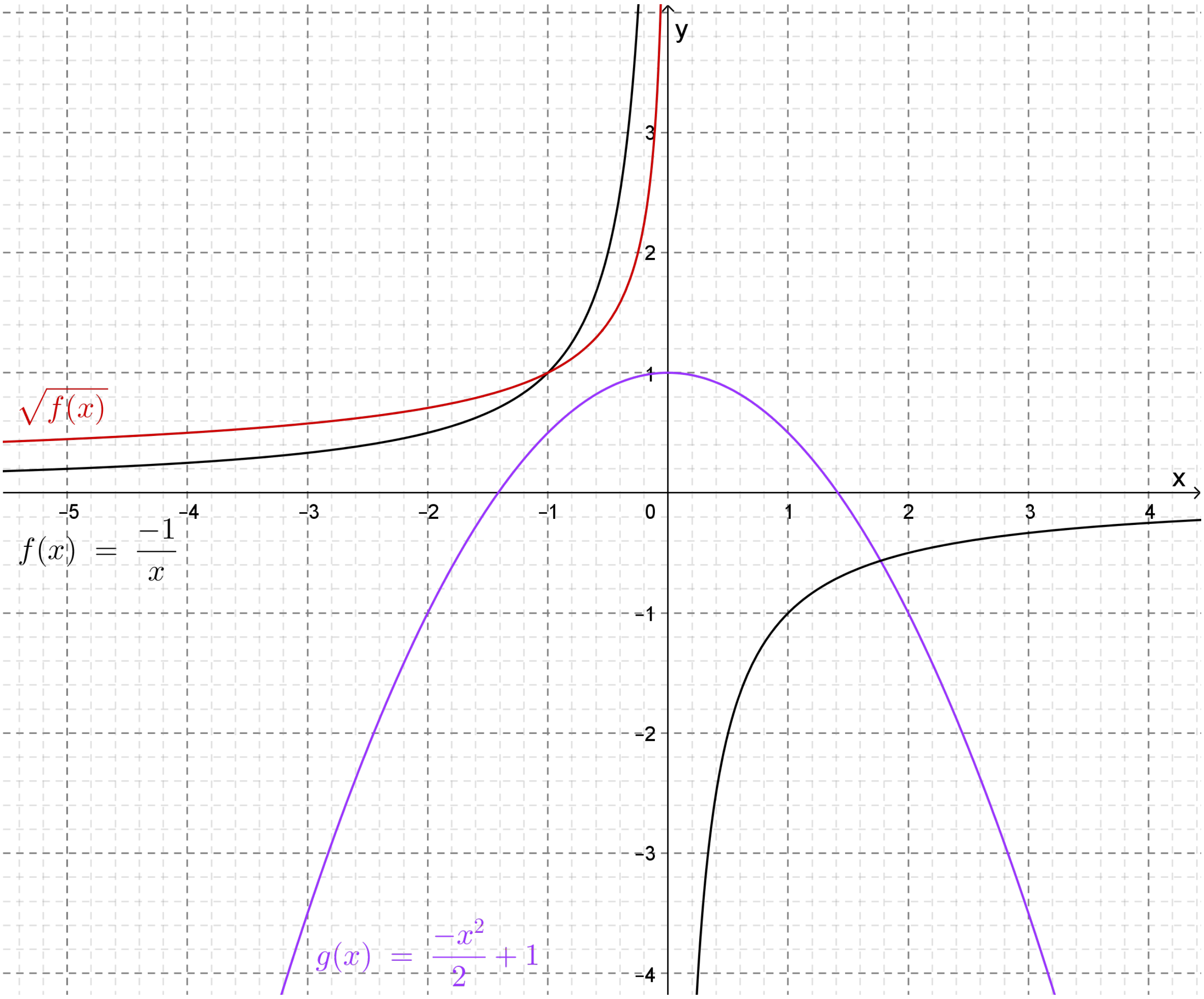
On remarque la présence de deux asymptotes verticales correspondants aux zéros de g (qui est au dénominateur de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$). Pour expliquer le comportement de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ aux alentours des asymptotes, il suffit de regarder le signe des nombres que l'on divise.

L'asymptote verticale de f est toujours présente. Le comportement au niveau de cette asymptote s'explique de la même manière que pour les autres asymptotes verticales.

L'explication du comportement en $+\infty$ est la même qu'en $-\infty$.

Nom :..Prénom.......................................

Graphe de $\sqrt{f(x)}$



Le graphe de $\sqrt{f(x)}$ n'existe que lorsque $f(x)$ est positive (sur $\mathbb{R}^-$).
A gauche de $x = 1$, le graphe de $\sqrt{f(x)}$ est situé sous le graphe de $f(x)$ car si $x \geq 1$, $\sqrt{f(x)} \leq x$.
A droite de $x = 1$, le graphe de $\sqrt{f(x)}$ est situé au-dessus du graphe de $f(x)$ car si $x \leq 1$, $\sqrt{f(x)} \geq x$.