Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°7 - Solutions

Suites

Série A

Le 20 mars 2025 Classe: 5AC

.../3 1. Etudier la croissance ou la décroissance de la suite définie par

$$a_n = n + \frac{1}{n}$$

On a $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)}$. En étudiant le signe de cette expression (en utilisant des valeurs naturelles pour n), on obtient :

n	0		1	
n^2+n-1		-	0	+
$n(n+1)$	0	+		+
$u_{n+1}-u_n$	$\nexists$	-	0	+

$a_{n+1} - a_n$ est positif après 1. La suite est donc croissante.

.../2 2. (a) La suite (a_n) est définie pour tout entier naturel n par $a_n = n^2 - 3n + 2$ est-elle arithmétique ?

$a_{n+1} - a_n = 2n - 2$. La suite n'est donc pas arithmétique.

.../2 (b) (b_n) est une suite géométrique de premier terme b_1 et de raison q positive telle que b_2 = -18 et b_4 = -162. Déterminer q et b_1.

On a

$$\begin{cases} b_2 = b_1.q \\ b_4 = b_1.q^3 \end{cases}$$

Dès lors $\dfrac{b_4}{b_2} = q^2$ ou $q = 3$.

Puisque $b_2 = b_1.q$, on trouve $b_1 = -6$

.../2 (c) (c_n) est une suite arithmétique de raison r telle que c_1=-6 et $c_1 + c_2 + ... + c_8 = 92$. Calculer c_8 et r.

On a $S_8 = 8.\dfrac{c_1+c_8}{2}$. En remplaçant par les valeurs données, on a $92 = 8.\dfrac{-6+c_8}{2}$ ou $c_8 = 29$.

Puisque $c_8 = c_1 + 7.r$, on trouve $r = 5$.

.../2 (d) Calculer la somme $S = 2 + 5 + 8 + ... + 32 + 35$

Il s'agit d'une S.A. de premier terme 2 et de raison $r = 3$. On a $a_n = a_1 + (n-1)r$. En remplaçant par les valeurs données, on trouve $n = 12$.

$S = S_{12} = 12.\dfrac{2+35}{2} = 222.$

.../3 (e) La suite (d_n) est arithmétique de raison 2 et de quatrième terme d_4=3. Calculer n sachant que $S_n = 437$

Si $d_4 = 3$, alors $d_1 = d_4 - 3.r = -3$. Dès lors $S_n = n\dfrac{a_1 + [a_1 + (n-1).r]}{2} = n\dfrac{-3 + [-3 + (n-1).2]}{2}$. En réduisant un des membres à 0, on obtient l'équation $n^2 - 4n - 437 = 0$ dont la seule solution acceptable est $n = 23$.

.../3 (f) Déterminer 3 nombres a, b et c en progression arithmétique de raison négtive dont la somme est 27 et la somme des carrés est 261.

Il faut résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = 27 \\ 2b = a + c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 261 \end{cases}$$

dont la solution de raison négative est $a = 12$, $b = 9$ et $c = 6$.

Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°7 - Solutions

Suites

Série B

Le 20 mars 2025 Classe: 5AC

.../2 1. (a) (a_n) est une suite géométrique de premier terme a_1 et de raison q négative telle que a_2 = -18 et a_4 = -162. Déterminer q et a_1.

On a

$$\begin{cases} a_2 = a_1.q \\ a_4 = a_1.q^3 \end{cases}$$

Dès lors $\dfrac{a_4}{a_2} = q^2$ ou $q = -3$.

Puisque $a_2 = a_1.q$, on trouve $a_1 = 6$

.../2 (b) La suite (b_n) est définie pour tout entier naturel n par $b_n = n^2 - 3n + 2$ est-elle arithmétique ?

$b_{n+1} - b_n = 2n - 2$. La suite n'est donc pas arithmétique.

.../3 (c) Déterminer 3 nombres a, b et c en progression arithmétique de raison négative dont la somme est 27 et la somme des carrés est 275.

Il faut résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = 27 \\ 2b = a + c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 261 \end{cases}$$

dont la solution de raison négative est $a = 13$, $b = 9$ et $c = 5$.

.../2 (d) (c_n) est une suite arithmétique de raison r telle que c_1=-6 et $c_1 + c_2 + ... + c_8 = 92$. Calculer c_8 et r.

On a $S_8 = 8.\dfrac{c_1 + c_8}{2}$. En remplaçant par les valeurs données, on a $92 = 8.\dfrac{-6 + c_8}{2}$ ou $c_8 = 29$.

Puisque $c_8 = c_1 + 7.r$, on trouve $r = 5$.

.../2 (e) Calculer la somme $S = 2 + 5 + 8 + ... + 32 + 35$

Il s'agit d'une S.A. de premier terme 2 et de raison $r = 3$. On a $a_n = a_1 + (n-1)r$. En remplaçant par les valeurs données, on trouve $n = 12$.

$S = S_{12} = 12.\dfrac{2 + 35}{2} = 222$.

.../3 (f) La suite (d_n) est arithmétique de raison 2 et de quatrième terme d_4=5. Calculer n sachant que $S_n = 440$

Si $d_4 = 5$, alors $d_1 = d_5 - 3.r = -1$. Dès lors $S_n = n\dfrac{a_1 + [a_1 + (n-1).r]}{2} = n\dfrac{-1 + [-1 + (n-1).2]}{2}$. En réduisant un des membres à 0, on obtient l'équation $n^2 - 2n - 440 = 0$ dont la seule solution acceptable est $n = 22$.

2. Etudier la croissance ou la décroissance de la suite définie par

$$a_n = n + \frac{1}{n}$$

On a $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n^2 + n - 1}{n(n+1)}$. En étudiant le signe de cette expression (en utilisant des valeurs naturelles pour n), on obtient :

n	0		1	
$n^2 + n - 1$		-	0	+
$n(n+1)$	0	+		+
$a_{n+1} - a_n$	$\nexists$	-	0	+

$a_{n+1} - a_n$ est positif après 1. La suite est donc croissante.