Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Evaluation formative n°1 - Solutions

Formules de transformation

Série A

Le 2 décembre 2024 | Classe: 5AC

.../5 1. Démontrer que :

$$\sin(a-b)\sin(a+b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

En développant le premier membre, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\sin(a-b)\sin(a+b) &= (\sin a\cos b - \sin b\cos a)(\sin a\cos b + \sin b\cos a)\\
&= \sin^2 a\cos^2 b - \sin^2 b\cos^2 a\\
&= \sin^2 a(1-\sin^2 b) - \sin^2 b(1-\sin^2 a)\\
&= \sin^2 a - \cancel{\sin^2 a\sin^2 b} - \sin^2 b + \cancel{\sin^2 b\sin^2 a}\\
&= \sin^2 a - \sin^2 b
\end{aligned}$$

.../5 2. Démontrer que :

$$\frac{\sin 2a}{1+\cos 2a} = \tan a$$

On a successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 2a}{1+\cos 2a} &= \frac{2\sin a\cos a}{1+(2\cos^2 a-1)}\\
&= \frac{\cancel{2}\sin a\cancel{\cos a}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}} a}\\
&= \tan a
\end{aligned}$$

.../5 3. Vérifier :

$$\sin 7a - \sin 5a + 2\sin a\cos 4a = 2\cos 5a\sin 2a$$

En appliquant les formules de Simpson au deux premiers termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sin 7a - \sin 5a + 2\sin a\cos 4a &= 2\cos 6a\sin a + 2\sin a\cos 4a\\
&= 2\sin a(\cos 6a + \cos 4a)\\
&= 2\sin a(2\cos 5a\cos a)\\
&= 2\sin 2a\cos 5a
\end{aligned}$$

.../5 4. Si $\tan x = 2$ et sans calculer $\sin x$ et $\cos x$ (car on ne connait pas le quadrant dans lequel se trouve x !), calculer les nombres trigonométriques de $2x$. Dans quel quadrant se trouve l'angle $2x$?

On a

— $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2(\tan x\cos x)\cos x = 2\tan x\cos^2 x = 2\tan x\dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \dfrac{4}{5}$;

— $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\dfrac{1}{1+\tan^2 x} - 1 = -\dfrac{3}{5}$;

$2x$ est dans le deuxième quadrant car le sinus est positif et le cosinus négatif.

Nom, Prénom:

Evaluation formative n°1 - Solutions

Formules de transformation

Série B

Le 2 décembre 2024 Classe: 5AC

.../5 1. Démontrer que :

$$\cos(a-b)\cos(a+b) = \cos^2 a - \sin^2 b$$

En développant le premier membre, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\cos(a-b)\cos(a+b) &= (\cos a\cos b - \sin b\sin a)(\cos a\cos b + \sin b\sin a)\\
&= \cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 b\sin^2 a\\
&= \cos^2 a(1-\sin^2 b) - \sin^2 b(1-\cos^2 a)\\
&= \cos^2 a - \cancel{\cos^2 a\sin^2 b} - \sin^2 b + \cancel{\sin^2 b\cos^2 a}\\
&= \cos^2 a - \sin^2 b
\end{aligned}$$

.../5 2. Démontrer que

$$\frac{1-\cos 2a}{\sin 2a} = \tan a$$

On a successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos 2a}{\sin 2a} &= \frac{1-(1-2\sin^2 a)}{2\sin a\cos a}\\
&= \frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}} a}{\cancel{2}\sin a\cancel{\cos a}}\\
&= \tan a
\end{aligned}$$

.../5 3. Vérifier :

$$\sin 7a - \sin 5a + 2\sin a\cos 4a = 2\cos 5a\sin 2a$$

voir Série A

.../5 4. Si $\tan x = -2$ et sans calculer $\sin x$ et $\cos x$ (car on ne connait pas le quadrant dans lequel se trouve x !), calculer les nombres trigonométriques de $2x$. Dans quel quadrant se trouve l'angle $2x$?

On a

— $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2(\tan x\cos x)\cos x = 2\tan x\cos^2 x = 2\tan x\dfrac{1}{1+\tan^2 x} = -\dfrac{4}{5}$;

— $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\dfrac{1}{1+\tan^2 x} - 1 = -\dfrac{3}{5}$;

$2x$ est dans le troisième quadrant car le sinus et le cosinus sont négatifs.