BASE ALGÈBRE 5ÈME : RAPPELS DE CALCUL ALGÉBRIQUE BASES THÉORIQUES

1 Les exposants

Si $a, b \in \mathbb{R}_0$ et $m, n \in \mathbb{Z}$, on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
a^m.a^n &= a^{m+n} \\
\frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\
(a^m)^n &= a^{m.n} \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\
a^0 &= 1 \\
(a.b)^m &= a^m.b^m
\end{aligned}
$$

Par contre, on ne pourra en aucun cas écrire :

$$(a+b)^m = a^m + b^m$$

2 Les monômes

Définition: *Un monôme est le produit d'un réel, appelé coefficient, par une partie littérale, produit de puissances, à exposants naturels, d'inconnues représentées par les lettres x, y, z, ...*
Le degré d'un monôme par rapport à une inconnue est l'exposant de cette inconnue.

Exemple:

$5x^2y^3$ est un monôme en x et y, 5 est le coefficient (partie numérique) et x^2y^3 est la partie littérale dont x et y sont les inconnues. C'est un monôme du deuxième degré par rapport à x et du troisième degré par rapport à y.

Définition: *Des monômes semblables sont des monômes ayant même partie littérale.*

Exemple:

$5x^2y^3$, $-x^2y^3$ et $10y^3x^2$ sont des monômes semblables.

3 Les polynômes

3.1 Définition et propriétés

Définition: *Un polynôme est une somme de monômes.*

Exemple:

$5x^4y^3 - 3x^2$ est un polynôme composé des monômes $5x^4y^3$ et $3x^2$.

Propriétés:

- Un polynôme en une seule variable est une somme de monômes en cette variable.
- Tout monôme est un polynôme.
- Un polynôme est dit réduit lorsqu'il ne comporte plus de monômes semblables.
- Un binôme est un polynôme réduit comprenant deux termes. Un trinôme est un polynôme réduit comprenant trois termes. Un quadrinôme est un polynôme réduit comprenant quatre termes.
- Le degré d'un polynôme réduit est le plus grand exposant de la variable dans ce polynôme.
- Un polynôme est dit ordonné par rapport aux puissances décroissantes (croissantes) de la variable si les exposants des puissances de cette variable sont placés en ordre décroissant (croissant).
- Un polynôme réduit de degré n est complet lorsque la variable y figure à toutes les puissances égales ou inférieures à n y compris le terme de degré 0 en la variable, appelé le terme indépendant de la variable.

Définition: *La valeur numérique de $P(x)$ pour $x = a$ est notée $P(a)$ et est la valeur du polynôme lorsque l'on remplace x par a et que l'on réduit l'expression obtenue.*

Exemple:

Si $P(x) = 3x^2 - 5x + 3$ alors $P(2) = 3.2^2 - 5.2 + 3 = 5$

3.2 Opérations de base sur les polynômes

Remarque préliminaire: D'une manière générale, on appliquera les règles connues du calcul dans $\mathbb{R}$ puisque chaque polynôme est une écriture littérale de réels.

3.2.1 Egalité de deux polynômes

Deux polynômes réduits sont égaux si et seulement si les termes de même degré ont des coefficients égaux.

3.2.2 Addition

On applique l'associativité et la commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ et on additionne les termes semblables.

Exemple:

$(2x^3 + 3x^2 - 5) + (5x^2 - 5x + 1) = 2x^3 + (3x^2 + 5x^2) - 5x + (-5 + 1) = 2x^3 + 8x^2 - 5x - 4$

3.2.3 Soustraction

On applique la propriété : "*l'opposé d'une somme de réels égale la somme des opposés*" (c'est-à-dire que l'on peut enlever les parenthèses en changeant les signes de chaque terme du polynôme à soustraire) et on procède ensuite comme pour la somme.

Exemple:

$(2x^3 + 3x^2 - 5) - (5x^2 - 5x + 1) = 2x^3 + 3x^2 - 5 - 5x^2 + 5x - 1 = 2x^3 + 3x^2 - 5x^2 + 5x - 5 - 1 = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 6$

3.2.4 Multiplication

On applique les propriétés du produit : "*multiplier les coefficients et ensuite les termes littéraux, on applique ensuite la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans* $\mathbb{R}$ *et on additionne ensuite les termes semblables*."

Exemple:

$(2x^3 + 3x^2 - 5)(x + 2) = 2x^4 + 3x^3 - 5x + 4x^3 + 6x^2 - 10 = 2x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 5x - 10$

3.3 Division d'un polynôme par un polynôme

3.3.1 Division de deux monômes

Le quotient de deux monômes est un monôme dont le coefficient est le quotient des coefficients et dont la partie littérale est formée des différentes variables, chacune d'elles étant affectée d'un exposant égal à la différence des exposants qu'elles ont dans les deux monômes.

Exemple:

- $\dfrac{8a^7}{2a^4} = 4a^3$;
- $\dfrac{12a^8b^3}{-2a^3b} = -\,6a^5b^2$.

Pour calculer le quotient d'un polynôme par un monôme, on divise chaque terme du polynôme par ce monôme.

Exemple:

$$\frac{24a^3b - 18a^2b^2 - 22a^2b^3}{-6ab} = \frac{24a^3b}{-6ab} - \frac{18a^2b^2}{-6ab} - \frac{22a^2b^3}{-6ab} = -4a^2 + 3ab + \frac{11}{3}ab^2.$$

3.3.2 La division euclidienne des polynômes

Définition: *Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par le polynôme $D(x)$, c'est déterminer les polynômes quotient $Q(x)$ et reste $R(x)$ tels que*

$$P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$$

*où degré de $R(x) <$ degré de $D(x)$. Le polynôme $P(x)$ est appelé le polynôme **dividende**. Le polynôme $D(x)$ est appelé le polynôme **diviseur**.*

Remarques:
- les degrés de ces polynômes répondent à l'égalité suivante : $d°P(x) =$ $d°$D(x)+$d°Q(x)$
- si $P(x)$ =D(x).$Q(x)$, on dit que le polynôme $P(x)$ est divisible par le polynôme $D(x)$; dans ce cas, $R(x) = 0$.

La méthode pratique de division d'un polynôme par un polynôme est basée sur celle de la division écrite d'un nombre par un nombre.
Pour diviser un polynôme $P(x)$ par un polynôme $D(x)$:
- on réduit et on ordonne par ordre décroissant des puissances de la variable, les deux polynômes
- on complète le polynôme $P(x)$
- on effectue la division et on arrête lorsque le reste a un degré inférieur à celui de $D(x)$.

Explication des étapes :
- diviser le 1er terme de $P(x)$ par le 1er terme de $D(x)$; on obtient ainsi le 1er terme du quotient $Q(x)$;
- multiplier tout le diviseur par le 1er terme du quotient ;
- soustraire ce résultat du dividende $P(x)$; on obtient ainsi le 1er reste partiel ;
- recommencer le même travail en prenant comme nouveau dividende ce reste partiel jusqu'à ce que le degré du reste soit inférieur à celui du diviseur.

Exemple:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & & P(x) & & & & \quad D(x) \\
2x^5 & +7x^4 & -2x^3 & +4x^2 & -5x & +1 & x^3+2x^2-x+3 \\ \cline{7-7}
-2x^5 & -4x^4 & +2x^3 & -6x^2 & & & 2x^2+3x-6 \\ \cline{1-4}
 & 3x^4 & & -2x^2 & -5x & +1 & \quad Q(x) \\
 & -3x^4 & -6x^3 & +3x^2 & -9x & & \\ \cline{2-5}
 & & -6x^3 & +x^2 & -14x & +1 & \\
 & & 6x^3 & +12x^2 & -6x & +18 & \\ \cline{3-6}
 & & & 13x^2 & -20x & +19 & \\
 & & & & R(x) & &
\end{array}
$$

Etape 1 :

- $2x^5 \div x^3 = 2x^2$;
- $2x^2.(x^3+2x^2-x+3) = 2x^5+4x^4-2x^3+6x^2$;
- $(2x^5+7x^4-2x^3+4x^2-5x+1)-(2x^5+4x^4-2x^3+6x^2) = 3x^4-2x^2-5x+1$.

Etape 2 :

- $3x^4 \div x^3 = 3x$;
- $3x.(x^3+2x^2-x+3) = 3x^4+6x^3-3x^2+9x$;
- $(3x^4-2x^2-5x+1)-(3x^4+6x^3-3x^2+9x) = -6x^3+x^2-14x+1$.

Etape 3 :

- $-6x^3 \div x^3 = -6$;
- $-6.(x^3+2x^2-x+3) = -6x^3-12x^2-18$;
- $(-6x^3+x^2-14x+1)-(-6x^3-12x^2-18) = 13x^2-20x+19$.

Le polynôme peut dès lors s'écrire sous la forme :

$$P(x) = (2x^2+3x-6)(x^3+2x^2-x+3)+(13x^2-20x+19)$$

3.3.3 Division d'un polynôme par un binôme de la forme $(x-a)$: méthode d'Horner

Définition: *Quand on divise un polynôme $P(x)$ par un binôme de la forme $(x-a)$, on sait que $d°D(x) = 1$, $d°R(x) = 0$ et $d°Q(x) = d°P(x) - 1$ avec*

$$P(x) = (x-a).Q(x) + r$$

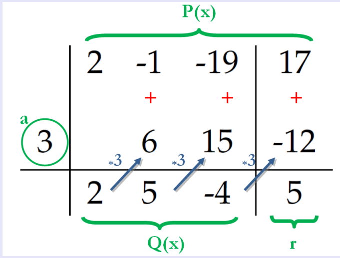
puisque $R(x)$ est constant on le note alors r.

La recherche du quotient d'un polynôme par $(x-a)$ peut se faire par la méthode dite d'Horner [1]. Cette méthode est expliquée sur l'exemple suivant.
Avant de noter les coefficients de $P(x)$ dans le tableau, il ne faut pas oublier de l'ordonner et de le compléter si nécessaire par des termes de coefficients nuls.

1. William Georges Horner, mathématicien anglais, 1786-1837

Exemple:

Diviser le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 19x + 17$ par $(x - 3)$.
On crée le tableau de la manière suivante :



Les coefficients de la première ligne sont les coefficients des différentes puissances de x (complétés par 0 si la puissance n'est pas présente dans le polynôme).
Les trois premiers coefficients de la dernière ligne représentent les coefficients du polynôme $Q(x)$ (qui, rappelons-le à un degré inférieur d'une unité au degré du polynôme $P(x)$) et le dernier coefficient est le reste. On peut donc écrire :

$$P(x) = (x - 3)(2x^2 + 5x - 4) + 5$$

Remarques:
- La méthode de la division euclidienne peut également être utilisée. On utilise pour cela la disposition pratique de la division euclidienne de deux polynômes (voir 3.3.2)
- Le reste de la division par la méthode d'Horner est toujours une constante.

3.3.4 La loi du reste

Définition: *Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par un binôme de la forme $(x - a)$ est la valeur numérique de ce polynôme pour $x = a$.*
On a donc : $r = P(a)$

Définition: *Un polynôme $P(x)$ est divisible par un binôme de la forme $(x - a)$ si le reste de la division de $P(x)$ par $(x - a)$ est nul, c'est-à-dire si la valeur numérique de $P(x)$ pour $x = a$ est nulle ou $P(a) = 0$*

4 Factorisation

Définition: *Factoriser une somme, c'est la transformer en un produit de facteurs.*

4.1 Méthodes

Nous rappelons ici les principales méthodes vues en 3ème.

- Mise en évidence simple : lorsque tous les termes d'un polynôme ont un facteur commun, on commence toujours par mettre ce facteur commun en évidence ;
- Mise en évidence double : après une mise en évidence dans chaque groupe, apparaît un facteur commun qui peut, à son tour, être mis en évidence ;
- Factorisation et produits remarquables
  - Binôme :

    Formule:

    $$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
    $$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
    $$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

    On démontre ces formules en développant complètement, par double distributivité, les seconds membres.
  - Trinôme :

    Formule:

    $$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
    $$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

    Remarque : il faut toujours vérifier que le double produit soit présent dans cette somme (différence).
  - Quadrinôme cube parfait :

    Formule:

    $$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$
    $$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

    On démontre ces formules en observant que $(a)^3 = (a)^2.(a)$
- Méthode de groupement
  - Groupement deux à deux
  - Groupement de trois termes d'un quadrinôme : ces trois termes forment un trinôme carré parfait et ce trinôme carré parfait forme, avec le quatrième terme, une différence de deux carrés.

4.2 Méthode des diviseurs binômes (méthode dite du "désespoir ! !")

Dans le cas où les méthodes précédentes n'aboutissent pas, on peut utiliser la méthode des diviseurs binômes.
Pour factoriser par la méthode des diviseurs binômes, on se souviendra que :

- *Loi du reste* : le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par un binôme de la forme $(x-a)$ est la valeur numérique de ce polynôme pour $x = a$
- Un polynôme $P(x)$ est divisible par un binôme de la forme $(x-a)$ si le reste de la division de $P(x)$ par $(x-a)$ est nul, c'est-à-dire si la valeur numérique de $P(x)$ pour $x = a$ est nulle ou $P(a) = 0$
- Si un polynôme $P(x)$ est divisible par un binôme de la forme $(x-a)$, alors il pourra s'écrire sous la forme d'un produit du type $(x-a).Q(x)$
- Pour factoriser un polynôme $P(x)$, on peut rechercher un facteur de la forme $(x-a)$ par lequel il est divisible. Dans ce cas, le nombre a est *nécessairement* diviseur du terme indépendant de $P(x)$.

Exemple:

On cherche à factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$.
Aucune des techniques développées ci-dessus n'est applicable. On recherche alors les diviseurs du terme indépendant : $div\ 12 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.
On évalue ensuite la valeur du polynôme $P(x)$ pour ces différentes valeurs.
On obtient $P(1) = 0$. Le polynôme est donc divisible par $(x-1)$.
En effectuant la division d'Horner, on obtient :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -11 & 12 \\ 1 & & 1 & -1 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array}$$

On peut donc écrire : $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 12)$.
En effectuant la même démarche pour le polynôme $Q(x) = x^2 - x - 6$, on obtient : $P(x) = (x-1)(x-+)(x-4)$

Un résumé des différentes méthodes de factorisation est présenté à la page suivante.

Résumé des méthodes de factorisation

Binôme		
Mise en évidence	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
Méthode des diviseurs binômes (désespoir)		

Trinôme		
Mise en évidence	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Méthode des diviseurs binômes (désespoir)		

Quadrinôme		
Mise en évidence	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
	Groupement 2-2 et double mise en évidence	Groupement 3-1, apparition d'un carré parfait et d'un binôme du second degré
Méthode des diviseurs binômes (désespoir)		

5 Fractions algébriques

5.1 Définition

Définition: *Une fraction algébrique est une expression de la forme :*

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$

où $N(x)$ est un polynôme et $D(x)$ un polynôme non nul.

Exemples:

- $\dfrac{2a+b}{4a}$ est une fraction algébrique des variables a et b ;
- $\dfrac{2x+1}{x^2-5}$ est une fraction algébrique de la variable x.

5.2 Conditions d'existence

Définition: *Une fraction algébrique existe si et seulement si son dénominateur ne s'annule pas.*

Méthode: *Comment poser les conditions d'existence CE d'une fraction algébrique ?*

- *On énonce la condition d'existence : le dénominateur doit être non nul ;*
- *On résout l'équation : $D(x) = 0$;*
- *On conclut en citant les réels à écarter.*

Exemple:

Soit la fraction $f(x) = \dfrac{4x-5}{4x^2-12x}$

- On énonce la condition d'existence : le dénominateur doit être non nul : $4x^2 - 12x \neq 0$;
- On résout l'équation : $D(x) = 0$:
  $4x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 4x(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array} \right.$;
- On conclut en citant les réels à écarter : la fraction existe si $x \neq 0$ ou $x \neq 3$.

5.3 Simplifications de fractions algébriques

Rappel: Simplifier une fraction numérique par un réel non nul m signifie diviser le N et le D de cette fraction par m :

$$\frac{m.a}{m.b} = \frac{a}{b} \text{ avec } m \neq 0$$

Méthode: *Comment simplifier une fraction algébrique ?*
- *On factorise le numérateur et le dénominateur en utilisant les méthodes vues dans le chapitre sur la factorisation ;*
- *On énonce les conditions d'existence et on les résout ;*
- *On divise le numérateur et le dénominateur par leur(s) facteur(s) commun(s).*

Remarque: En général, on simplifie la fraction par le plus grand commun diviseur (PGCD) du numérateur et du dénominateur.

Exemple:

Soit la fraction $\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x^2 - 9}$
- On factorise le numérateur et le dénominateur en utilisant les méthodes vues dans le chapitre sur la factorisation :
$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x^2 - 9} = \frac{(2x-3)^2}{(2x-3)(2x+3)}$
- On énonce les conditions d'existence et on les résout :
$(2x-3)(2x+3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{3}{2} \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$;
- On divise le numérateur et le dénominateur par leur(s) facteur(s) commun(s) :
$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x^2 - 9} = \frac{(2x-3)^2}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{2x-3}{2x+3}$

5.4 Addition et soustraction de fractions algébriques

Rappel:
- Faisons la somme (ou la différence) de deux fractions de même dénominateur :
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \text{ avec } b \neq 0$$
- Faisons la somme (ou la différence) de deux fractions quelconques :
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \text{ avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

Méthode: *Comment additionner ou soustraire des fractions algébriques ?*

- *On factorise les numérateurs et les dénominateurs de chaque terme de la somme (différence) en utilisant les méthodes vues dans le chapitre sur la factorisation ;*
- *On énonce les conditions d'existence et on les résout ;*
- *On simplifie si possible chaque fraction ;*
- *On réduit les fractions au même dénominateur. Le dénominateur commun est le PPCM des dénominateurs ;*
- *On procède comme pour les additions et les soustractions des fractions numériques. La réponse doit être une fraction irréductible.*

Exemple:

Soit la somme $\dfrac{2x-4}{3x^3-6x^2} - \dfrac{1}{2x^4-2x^3}$

- On factorise les numérateurs et les dénominateurs de chaque terme de la somme (différence) en utilisant les méthodes vues dans le chapitre sur la factorisation :
$\dfrac{2x-4}{3x^3-6x^2} - \dfrac{1}{2x^4-2x^3} = \dfrac{2(x-2)}{3x^2(x-2)} - \dfrac{1}{2x^3(x-1)}$;
- On énonce les conditions d'existence et on les résout : $3x^2 \neq 0$, $x-2 \neq 0$, $2x^3 \neq 0$ (identique à la première) et $x-1 \neq 0$. Les CE sont donc $x \neq 0$, $x \neq 1$ et $x \neq 2$.
- On simplifie si possible chaque fraction :
$\dfrac{2x-4}{3x^3-6x^2} - \dfrac{1}{2x^4-2x^3} = \dfrac{2(x-2)}{3x^2(x-2)} - \dfrac{1}{2x^3(x-1)} = \dfrac{2}{3x^2} - \dfrac{1}{2x^3(x-1)}$;
- On réduit les fractions au même dénominateur. Le dénominateur commun est le PPCM des dénominateurs : $2.3.x^3(x-1)$
Première fraction : $\dfrac{2.2.x(x-1)}{6x^3(x-1)}$;
Deuxième fraction : $\dfrac{3}{6x^3(x-1)}$;
- On procède comme pour les additions et les soustractions des fractions numériques. La réponse doit être une fraction irréductible.
$\dfrac{2}{3x^2} - \dfrac{1}{2x^3(x-1)} = \dfrac{4x^2-4x-3}{6x^3(x-1)}$

5.5 Multiplication de fractions algébriques

Rappel: Pour multiplier deux fractions, il est inutile de prendre un dénominateur commun. On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Méthode: *Comment multiplier des fractions algébriques ?*

- *On factorise les numérateurs et dénominateurs ;*
- *On énonce les conditions d'existence et on les résout ;*
- *On simplifie si possible chaque fraction ;*
- *On procède comme pour les multiplications de fractions numériques (On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux) ;*
- *On simplifie éventuellement la fraction obtenue.*

Exemple:

Soit le produit $\frac{x^2-5x}{x^2-25}.\frac{x^2+10x+25}{x}$

- On factorise les numérateurs et dénominateurs :
  $\frac{x^2-5x}{x^2-25}.\frac{x^2+10x+25}{x} = \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)}.\frac{(x+5)^2}{x}$;
- On énonce les conditions d'existence et on les résout : $x+5 \neq 0$, $x-5 \neq 0$ et $x \neq 0$. Les CE sont donc $x \neq -5$, $x \neq 5$ et $x \neq 0$;
- On simplifie si possible chaque fraction :
  $\frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)}.\frac{(x+5)^2}{x} = \frac{x}{(x+5)}.\frac{(x+5)^2}{x}$;
- On procède comme pour les multiplications de fractions numériques (On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux)
  $\frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)}.\frac{(x+5)^2}{x} = \frac{x(x+5)^2}{x(x+5)}$;
- On simplifie éventuellement la fraction obtenue
  $\frac{x(x+5)^2}{x(x+5)} = x+5$;

5.6 Division de fractions algébriques

Rappel : Voici la formule donnant le quotient de deux fractions :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Méthode: *Comment diviser deux fractions algébriques ?*

- *On factorise les numérateurs et dénominateurs ;*
- *On remplace la division par la multiplication de la première par l'inverse de la seconde ;*
- *On énonce les conditions d'existence et on les résout ;*
- *On simplifie si possible chaque fraction ;*
- *On procède comme pour les multiplications de fractions numériques (On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux) ;*
- *On simplifie éventuellement la fraction obtenue.*

Exemple:

Soit le quotient $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x} \div \dfrac{x^2-1}{3x}$.

- On factorise les numérateurs et dénominateurs : $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x} \div \dfrac{x^2-1}{3x} = \dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)} \div \dfrac{(x-1)(x+1)}{3x}$;
- On remplace la division par la multiplication de la première par l'inverse de la seconde $\dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)} \div \dfrac{(x-1)(x+1}{3x} = \dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)} . \dfrac{3x}{(x-1)(x+1)}$;
- On énonce les conditions d'existence et on les résout : $x+1 \neq 0$, $x-1 \neq 0$ et $x \neq 0$. Les CE sont donc $x \neq -1$, $x \neq 1$ et $x \neq 0$;
- On simplifie si possible chaque fraction ;
- On procède comme pour les multiplications de fractions numériques (On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux) $\dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)} . \dfrac{3x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3x(x+1)^2}{x(x-1)^2(x+1)}$
- On simplifie éventuellement la fraction obtenue $\dfrac{3x(x+1)^2}{x(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{3(x+1)}{(x-1)^2}$;

6 Système d'équations du premier degré

6.1 Définition

Définition: *Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues est un ensemble de deux équations dont on recherche une solution commune. Ces deux équations doivent donc être vérifiée en même temps. Ces solutions, si elles existent, sont des couples de réels.*

Exemple:

$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ est un système d'équations vérifiées pour $x=1$ et $y=2$.

6.2 Méthode de résolution des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

6.2.1 Résolution graphique

Les deux équations du système peuvent être considérées comme deux équations de droites dans un repère cartésien du plan.
Trois cas peuvent se présenter :

- Les deux droites sont sécantes en un point A de coordonnées (a,b) .Ce couple est donc la solution du système : S :$\{(a,b)\}$;

- Les deux droites sont parallèles distinctes et n'ont donc pas d'intersection. Le système n'admet pas de solution. On dit qu'il est impossible : S :ϕ ou S :$\{\}$;
- Les deux droites sont confondues et ont donc une infinité de points communs. Tous les couples, qui sont les coordonnées des points de ces droites, sont solutions du système. On dit qu'il est indéterminé : S :$\{(k, mk+p)\}$.

Remarque: En transformant les équations du système sous la forme $y = mx + p$ où m est la pente et p l'ordonnée à l'origine, il est facile de déterminer le nombre de solutions du système.

Soit le système $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$

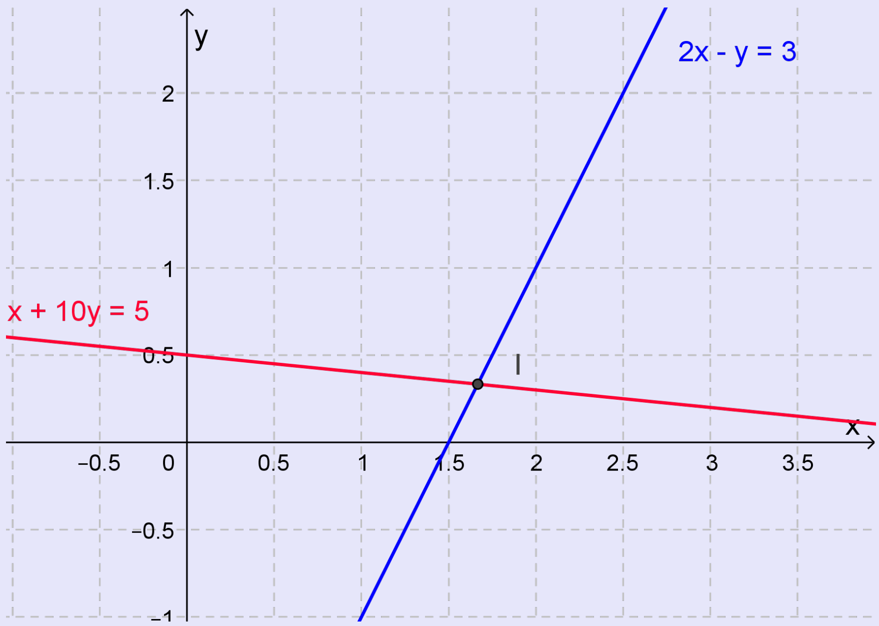
- Si $m \neq m'$, alors les deux droites sont sécantes et le système admet une solution : les coordonnées du point d'intersection des deux droites ;
- Si $m = m'$ et $p \neq p'$, alors les droites sont parallèles distinctes et le système n'admet pas de solutions.
- Si $m = m'$ et $p = p'$, alors les deux droites sont confondues et le système admet une infinité de solutions.

Exemple:

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 10y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

On peut établir le graphique de ces deux droites. Ils sont repris ci-dessous :



On observe que les coordonnées du point I sont (approximativement) $I(1,66; 0,33)$.

6.2.2 Méthode de substitution

La méthode de substitution consiste à isoler une inconnue d'une équation, de la remplacer dans l'autre. On obtient ainsi un système de deux équations à une inconnue qui peuvent être résolues simplement.

Exemple:

Soit à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x+10y=5 \\ 2x-y=3 \end{array}\right.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x+10y=5 \\ 2x-y=3 \end{array}\right. & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-10y \\ 2x-y=3 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-10y \\ 2(5-10y)-y=3 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-10y \\ 10-20y-y=3 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-10y \\ -21y=-7 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-10y \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

En substituant cette valeur de y issue de la dernière équation dans la première, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

La solution du systèmes est donc : $S=\left\{\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3}\right)\right\}$

Cette méthode a l'inconvénient de souvent introduire des fractions (et donc des risques d'erreur de calcul).

6.2.3 Méthode de comparaison

La méthode de comparaison est très similaire à la méthode de substitution. Elle consiste à isoler la même inconnue des deux équations et à égaler les deux valeurs obtenues. Elle est rarement utilisée.

Exemple:

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 10y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + 10y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ x = \dfrac{3+y}{2} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ 5 - 10y = \dfrac{3+y}{2} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ 10 - 20y = 3 + y \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ -21y = -7 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

En substituant cette valeur de y issue de la dernière équation dans la première, on obtient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La solution du systèmes est donc : $S = \left\{ \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{1}{3} \right) \right\}$

6.2.4 Méthode par combinaison linéaire

La méthode de combinaison linéaire est basée sur la propriété :"*Si l'on remplace une équation d'un système par une combinaison linéaire*[2] *des autres équations du système, le système reste inchangé*".
On cherche donc, en multipliant une équation par un coefficient et une autre par une autre, et en sommant les deux nouvelles équations, éliminer un inconnue. Si l'on effectue cette opération sur les trois équations de manière à effectuer la même inconnue, on se ramène à un système de deux équations à eux inconnues.

Exemple:

Soit à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x+10y=5 \\ 2x-y=3 \end{array}\right.$$

On a :

$$\left\{\begin{array}{l|l|l} x+10y=5 & 2 & 1 \\ 2x-y=3 & -1 & 10 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+20y-2x+y=10-3 \\ x+10y+20x-10y=5+30 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 21y=7 \\ 21x=35 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

La solution du systèmes est donc : $S=\left\{\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$

On obtient de cette manière directement le résultat. Il est donc clair que cette technique est beaucoup plus rapide que la précédente et ne fait apparaitre des fractions qu'à la dernière étape (et limite donc les risques d'erreurs !).

2. Soient deux "êtres" mathématiques quelconques u_1 et u_2 et deux nombres réels a_1 et a_2. On appelle combinaison linéaire de u_1 et u_2, l'expression $a_1u_1+a_2u_2$

7 Equation du premier degré

7.1 Définition

Définition: *Une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$ est une égalité dans laquelle l'inconnue réelle apparaît au premier degré.*
Résoudre une équation du premier degré consiste à trouver la valeur de l'inconnue vérifiant l'égalité.

Exemple:

$3x - 5 = 2x + 7$

7.2 Principes d'équivalence

Définition:

- *Ajouter (ou soustraire) un même réel aux deux membres d'une équation la transforme en une équation équivalente à la première.*

$$a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$$

- *Multiplier (ou diviser) par un même nombre non nul les deux membres d'une équation la transforme en une équation équivalente à la première.*

$$a = b \Leftrightarrow a.c = b.c$$

7.3 Cas particuliers

- ***Equation impossible*** : une équation impossible est une équation du style $0.x = a$ où $a \in \mathbb{R}_0$. C'est une équation dont il est impossible de trouver la solution ($S = \phi$)
- ***Equation indéterminée*** : une équation indéterminée est une équation du type $0.x = 0$. Cette équation est toujours vraie, quelle que soit la valeur de x. Elle possède une infinité de solutions ($S = \mathbb{R}$).

8 Inéquation du premier degré

8.1 Définition

Définition: *Une inéquation est une relation sous forme d'une inégalité entre deux quantités algébriques. Cette inégalité contient une inconnue au premier degré. Résoudre une inéquation, c'est trouver les valeurs de cette inconnue qui rend vraie l'inégalité.*

8.2 Principes d'équivalence

Comme pour les équations, la résolution des inéquations est basée sur un certains nombre de principes d'équivalence :

Définition:

- *Si $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$ (propriétés valables pour deux inégalités de même nature)*
- *On peut ajouter (soustraire) un même nombre aux deux membres d'une inégalité sans en changer la nature :*

$$a < b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c$$

- *On peut multiplier (diviser) par un même nombre strictement positif les deux membres d'une inégalité sans en changer la nature :*

$$a < b \Leftrightarrow a.c < b.c \ (c > 0)$$

$$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \ (c > 0)$$

- *On peut multiplier (diviser) par un même nombre strictement négatif les deux membres d'une inégalité* ***en changeant*** *le sens de l'inégalité :*

$$a < b \Leftrightarrow a.c > b.c \ (c < 0)$$

$$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \ (c < 0)$$

- *On ne peut pas soustraire membre à membre deux inégalités de même sens (car une soustraction est une addition de l'opposé et la prise de l'opposé change le sens de l'inégalité).*
- *L'inégalité est compatible avec la multiplication seulement pour des nombres positifs, c'est-à-dire que l'on peut multiplier membre à membre deux inégalités constituées de nombres positifs entre deux inégalités de même sens : $0 < a < b$ et $0 < a' < b'$ alors $0 < aa' < bb'$*
- *L'opposé ou l'inverse (pour des nombres de même signe) change le sens de l'inégalité :*

$$a < b \Leftrightarrow -a > -b$$

$$0 < a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a < b < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Exemples:

- $2x+3 < x-1 \Leftrightarrow 2x+3-x-3 < x-1-x-3 \Leftrightarrow x < -4$
- $3x-1 > x+2 \Leftrightarrow 3x-1-x+1 > x+2-x+1 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$
- $-4x-5 \geq x+1 \Leftrightarrow -4x-5-x+5 \geq x+1-x+5 \Leftrightarrow -5x \geq 6 \Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} \leq \frac{6}{-5} \Leftrightarrow x \leq -\frac{6}{5}$

8.3 Notation des solutions d'une inéquation

Contrairement aux équations, les solutions d'une inéquation sont un ensemble de nombres vérifiant une inégalité. Sauf dans le cas d'inéquations indéterminées ou impossibles [3], les solutions seront notées sous forme d'***intervalle***.
Un intervalle est un ensemble de nombres réels représentés par deux nombres : le plus petit et le plus grand des nombres de l'intervalle. Ces deux nombres sont entourés de crochets orientés vers l'intérieur ou l'extérieur selon que le nombre appartient ou non à l'intervalle.

Les solutions d'une inéquation peuvent également être représentée sur la droite des réels [4]. Le tableau de la page suivante reprend tous les cas de figure possibles.

	$x < a$	$-\infty, a[$
	$x \leq a$	$-\infty, a]$
	$a < x < b$	$]a, b[$
	$a < x \leq b$	$]a, b]$
	$a \leq x < b$	$[a, b[$
	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
	$x \geq b$	$[b, +\infty$
	$x > b$	$]b, +\infty$

3. voir paragraphe 8.4
4. Cette technique est très simple et permet de résoudre très simplement les systèmes d'inéquations

Exemples:

- l'intervalle $[1, 3]$ comprend tous les nombres réels entre 1 et 3, 1 et 3 faisant partie de l'intervalle ;
- l'intervalle $[-2, 8[$ comprend tous les nombres réels entre -2 et 8, -2 faisant partie de l'intervalle, 8 n'en faisant pas partie ;
- l'intervalle $]-\pi, \pi[$ comprend tous les nombres réels entre $-\pi$ et π, $-\pi$ et π ne faisant pas partie de l'intervalle.
- L'ensemble des nombres réels strictement positifs peu s'écrire $\mathbb{R}_0^+$ ou $]0, +\infty$

Cas particulier: Lorsque $-\infty$ et $+\infty$ font partie de l'intervalle, il n'est pas nécessaire de mettre un crochet avant ou après le symbole ∞.

8.4 Cas particuliers

- *Inéquation impossible* : une inéquation impossible est une inéquation du style $0x < -1$ ou $2 \leq 0x$. C'est une inéquation dont il est impossible de trouver la solution ($S = \phi$)
- *Inéquation indéterminée* : les inéquations du type $0x < 2$ ou $-3 \leq 0x$ représente des vérités. Elles sont toujours vraies, quelle que soit la valeur de x. Elle possède une infinité de solutions ($S = \mathbb{R}$).

9 Equation produit

9.1 Définition

Définition: *Une équation réductible au premier degré est une équation qui, par des transformations algébriques, peut se ramener à une équation du premier degré.*
Une équation produit est une équation du type

$$P(x).Q(x).R(x)...Z(x) = 0$$

où $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, ..., $Z(x)$ sont des polynômes du premier degré en x.
Une équation produit est une équation réductible au premier degré.

Une équation réductible au premier degré est une équation qui, à priori, ne se présente pas comme une équation du premier degré mais bien comme

- une équation de degré supérieur ;
- une équation où apparaissent une ou plusieurs fractions rationnelles.

9.2 Règle du produit nul

La technique de résolution d'une équation réductible au premier degré est toujours la même et est composée des étapes suivantes :

- égalisation d'un des membres de l'équation à zéro (en utilisant les principes d'équivalence ;
- factorisation du membre non nul de l'équation (mise en évidence, produit remarquable, méthode des diviseurs binômes, ...).

Une fois l'expression factorisée, on arrive à une équation du style $P(x).Q(x).R(x)...Z(x) = 0$ où $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, ..., $Z(x)$ sont des polynômes du premier degré en x.

Définition: *La règle du produit nul affirme que : "Si le produit de deux nombres réels est nul ($A.B = 0$), alors soit $A = 0$, soit $B = 0$". Dès lors, l'expression factorisée d'une équation réductible au premier degré $P(x).Q(x).R(x)...Z(x) = 0$ se résume à :*

$$\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \\ R(x) = 0 \\ \vdots \\ Z(x) = 0 \end{cases}$$

Dès lors, la résolution d'une équation se ramène à résoudre un certain nombre d'équation du premier degré (en utilisant les principes d'équivalence).

Remarque: *Equation rationnelle :*

Dans le cas d'une équation rationnelle, résoudre l'équation

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 0$$

revient à résoudre l'équation

$$N(x) = 0$$

En effet, on a successivement

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 0 \Leftrightarrow D(x).\frac{N(x)}{D(x)} = 0.D(x) \Leftrightarrow N(x) = 0$$

Exemple:

Soit à résoudre l'équation $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = 0$. La factorisation par la méthode des diviseurs binômes permet d'écrire l'équation sous la forme $(2x+1)(x-1)(x+3) = 0$. Dès lors il faut résoudre :

$$\begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$S = \left\{-3, -\dfrac{1}{2}, 1\right\}$

Remarque: | Attention à ordonner les solutions dans l'ordre croissant .

10 Equation fractionnaire

Définition: *Une équation fractionnaire est une équation contenant des fractions rationnelles* [a]*.*
Il s'agit également d'une équation réductible au premier degré.

a. voir le chapitre **??** sur les rappels de 3ème

Méthode: *Comment résoudre une équation fractionnaire ?*
- *On factorise les numérateurs et dénominateurs ;*
- *On détermine les conditions d'existence de chaque fraction et on les résout ;*
- *On réduit les deux membres de l'équation au même dénominateur ;*
- *On multiplie les deux membres par le dénominateur commun ;*
- *On résout l'équation ainsi obtenue ;*
- *On rejette éventuellement les solutions qui ne satisfont pas aux conditions d'existence.*

Exemples:

1. Soit l'équation $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{8}{x^2-2x}$
   - On factorise les numérateurs et dénominateurs : $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{8}{x(x-2)}$;
   - On détermine les conditions d'existence de chaque fraction et on les résout : il faut imposer $x-2\neq 0$ et $\neq 0$. Les CE sont donc $x\neq 2$ et $x\neq 0$;
   - On réduit les deux membres de l'équation au même dénominateur $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{8}{x(x-2)}\Leftrightarrow\dfrac{(x-2)^2+4x}{x(x-2)}=\dfrac{8}{x(x-2)}\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^2-4x+4+4x}{x(x-2)}=\dfrac{8}{x(x-2)}\Leftrightarrow\dfrac{x^2+4}{x(x-2)}=\dfrac{8}{x(x-2)}$;
   - On multiplie les deux membres par le dénominateur commun $\dfrac{x^2+4}{x(x-2)}=\dfrac{8}{x(x-2)}\Leftrightarrow x^2+4=8\Leftrightarrow x^2-4=0$;
   - On résout l'équation ainsi obtenue ;$x^2-4=0\Leftrightarrow(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+2=0\\x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.$
   - On rejète éventuellement les solutions qui ne satisfont pas aux conditions d'existence. La solution $x=2$ est à rejeter. Donc S :$\{-2\}$
2. Soit à résoudre l'équation $\dfrac{x-2}{2x+3}=\dfrac{x-3}{2x-1}$.
   - Les conditions d'existence des dénominateurs sont $2x+3\neq 0\Leftrightarrow x\neq-\dfrac{3}{2}$ et $2x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{1}{2}$. Ces valeurs devront être éventuellement rejetées des solutions obtenues.
   - On égale le second membre à zéro :$\dfrac{x-2}{2x+3}-\dfrac{x-3}{2x-1}=0$
   - On réduit au même dénominateur et on simplifie : $\dfrac{(x-2)(2x-1)-(x-3)(2x+3)}{(2x+3)(2x-1)}=0\Leftrightarrow$ $\dfrac{2x^2-5x+2-(2x^2-3x-9)}{(2x+3)(2x-1)}=0$ $\Leftrightarrow\dfrac{-2x+11}{(2x+3)(2x-1)}=0$
   - On élimine le dénominateur (conformément à la remarque du paragraphe 9.2). L'équation devient : $-2x+11=0$ dont la solution est $x=\dfrac{11}{2}$ qui répond bien aux conditions d'existence.
   - $S=\left\{\dfrac{11}{2}\right\}$

11 Complément : inéquations réductibles au premier degré

11.1 Définition

Définition: *Une inéquation réductible au premier degré est une inéquation dont l'étude peut se ramener, par des transformations algébriques, à celle d'inéquations du premier degré.*
Résoudre une inéquation réductible au premier degré consiste à étudier le signe d'une expression algébrique du type $\frac{N(x)}{D(x)}$, c'est-à-dire trouver les valeurs de la variable qui donne un signe précis (positif ou négatif) à l'expression.

Exemple:

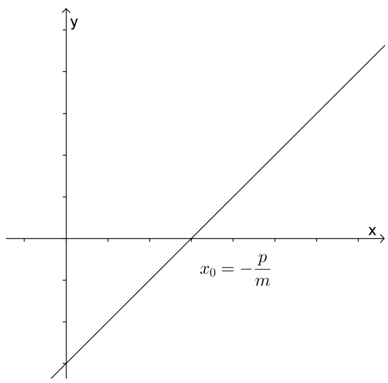
Résoudre l'inéquation $\dfrac{N(x)}{D(x)} \geq 0$ revient à trouver les valeurs de x pour lesquelles l'expression $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ est positive.

Pour étudier le signe d'une expression, il faut donc :
- rendre le second membre nul ;
- factoriser l'expression pour transformer $N(x)$ et $D(x)$ en un produit de facteurs dont l'étude de signe est plus aisée.

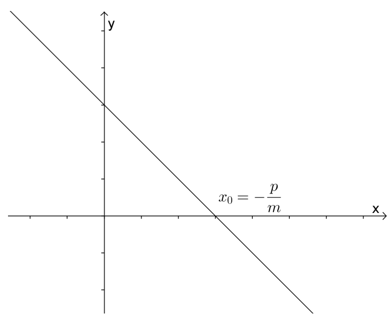
Remarque: Contrairement aux équations on ne peut absolument pas "éliminer" le dénominateur car celui-ci influence le signe de l'expression !

11.2 Signe d'une expression du premier degré

Le signe d'une expression du premier degré peut être déduit du comportement de la fonction du premier degré[5].
Pour rappel, la fonction du premier degré $f(x) = mx + p$ est représentée graphiquement par une droite. La pente m traduit une fonction croissante ($m > 0$) ou décroissante ($m < 0$), comme le montre les figures suivantes.



Fonction croissante



Fonction décroissante

5. Voir cours de 3ème

Ces droites coupent l'axe des x en

$$x_0 = -\frac{p}{m}$$

Ce point est la ***racine*** ou le ***zéro*** de la fonction $f(x) = mx + p$[6].

Considérons le cas où la droite est croissante.

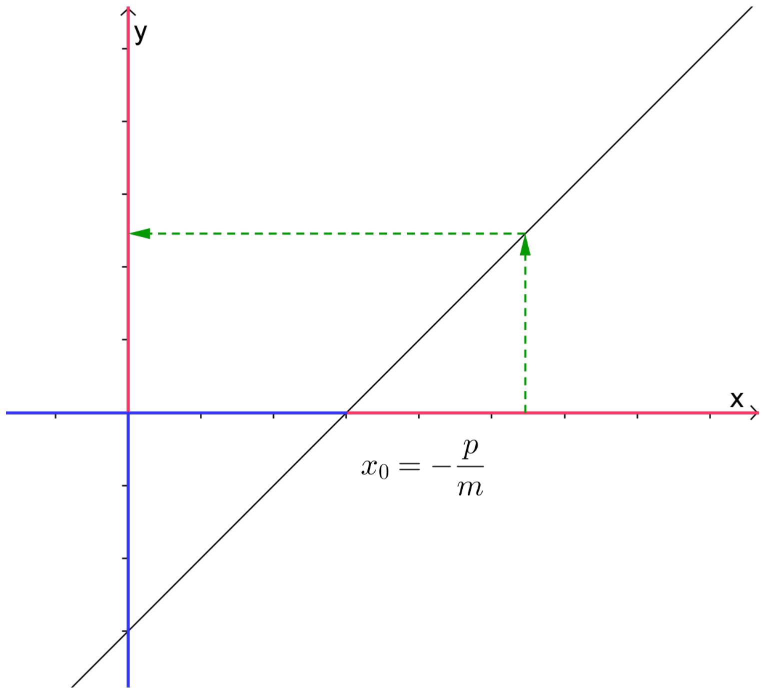


FIGURE 1 – Signe d'une fonction croisssante

On constate que pour les valeurs de x plus petite que x_0, les points de la droite sont situés sous l'axe des x et ont donc une ordonnée négative. Par contre, pour des valeurs de x plus grande que x_0, les ordonnées sont positives.
On peut écrire :

$$\begin{cases} x > -\dfrac{p}{m} \Rightarrow y > 0 \\ \\ x < -\dfrac{p}{m} \Rightarrow y < 0 \\ \\ x = -\dfrac{p}{m} \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Dans le cas d'une fonction décroissante, la même constatation peut être faite : pour les valeurs de x plus petite que x_0, les points de la droite sont situés au-dessus l'axe des x et ont donc une ordonnée positive. Par contre, pour des valeurs de x plus grande que x_0, les ordonnées sont négatives.

6. Le zéro d'une fonction $f(x)$ est la solution de l'équation $f(x) = 0$

On peut écrire :

$$\begin{cases} x > -\dfrac{p}{m} \Rightarrow y < 0 \\[2ex] x < -\dfrac{p}{m} \Rightarrow y > 0 \\[2ex] x = -\dfrac{p}{m} \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

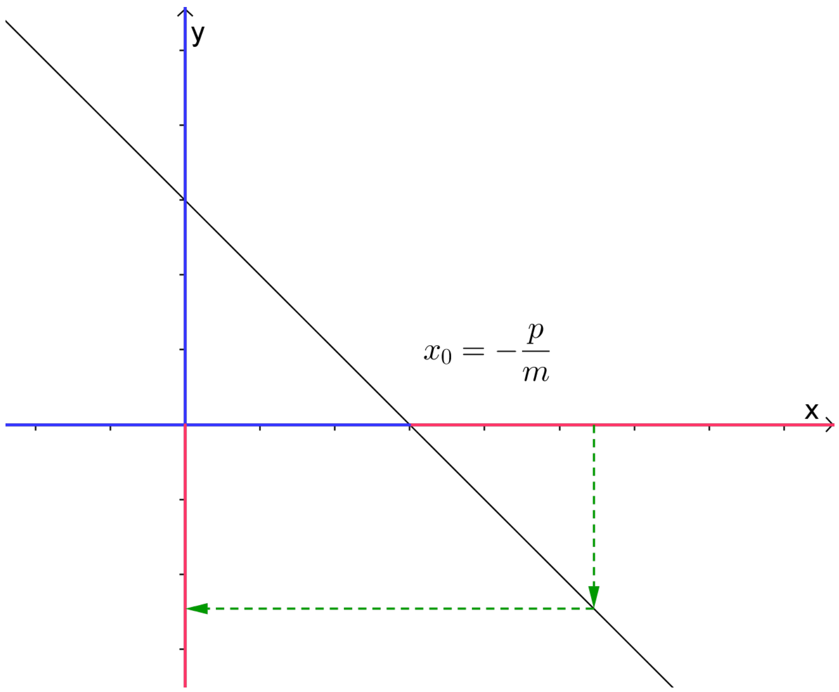


FIGURE 2 – Signe d'une fonction décroisssante

Il est évident que ce qui distingue les deux cas de figures est la pente de la droite.

On peut donc énoncer les conclusions suivantes :
- si $m > 0$, l'expression du premier degré $mx + p$ est négative avant le zéro et positive après ;
- si $m < 0$, l'expression du premier degré $mx + p$ est positive avant le zéro et négative après.

Règle: *Le signe d'une expression du premier degré mx + p est le signe contraire du coefficient de x (m) avant le zéro de l'expression et le signe du coefficient de x après.*

11.3 Tableau de signe

Définition: *Un tableau de signe comprend :*
- *sur la première ligne, le(s) zéro(s) ordonné(s) de la fonction à étudier ;*
- *sur la (les) ligne(s) suivante(s) les signes pris par l'expression pour les différentes valeurs envisagées de la variable.*

La règle énoncée au paragraphe 11.2 peut se résumer à l'aide d'un ***tableau de signe***.

x		$-\frac{p}{m}$	
$mx+p$	signe contraire de m	0	signe de m

Exemples:

- Signe de $f(x) = 2x+3$. Le zéro est $x = -frac32$ et m est positif ($m=2$). Le tableau de signe correspondant est :

x		$-\frac{3}{2}$	
$2x+3$	$-$	0	$+$

- Signe de $f(x) = 4-5x$. Le zéro est $x = \frac{4}{5}$ et m est négatif ($m=-5$). Le tableau de signe correspondant est :

x		$-\frac{4}{5}$	
$4-5x$	$+$	0	$-$

11.4 Signe d'un produit ou d'un quotient

Un produit d'expression du premier degré s'écrit sous la forme :

$$P(x) = P_1(x).P_2(x)...P_n(x)$$

où les $P_i(x)$ sont des expressions du premier degré.
De même, un quotient d'expression du premier degré s'écrit sous la forme

$$Q(x) = \frac{N_1(x).N_2(x)...N_n(x)}{D_1(x).D_2(x)...D_m(x)}$$

où $N_i(x)$ et $D_i(x)$ sont des expressions du premier degré.

Le signe d'un produit ou d'un quotient dépend du signe de chaque facteurs composants le produit ou le quotient.
En effet, on peut rappeler une propriété des nombres réels :

- si le produit (quotient) de deux nombres est positif, les deux nombres sont de même signe (tous les deux positifs ou tous les deux négatifs) ;
- si le produit (quotient) de deux nombres est négatif, les deux nombres sont de signes contraires (un positif et un négatif).

Pour prendre en compte l'effet de chaque facteur, on intègrera dans le tableau de signe tous les facteurs composant le produit ou le quotient. Les zéros de chaque facteur seront placés dans l'ordre croissant.
On appliquera ensuite la règle des signe bien connue :

- $+$ par $+$ égal $+$
- $+$ par $-$ égal $-$
- $-$ par $-$ égal $+$

Exemples:

- Etudier le signe de $P(x) = (x-1)(x+2)$.
Pour dresser le tableau de signe, il faut déterminer tout d'abord les zéros de chacun des facteurs. Il s'agit ici de $x = 1$ et $x = -2$. Nous allons créer un tableau de signe avec chacun des facteurs et chacun des zéros.

x		-2		1	
$x-1$	-		-	0	+
$x+2$	-	0	+		+
$P(x)$	+	0	-	0	+

- Etudier le signe de $Q(x) = \dfrac{3-2x}{5x+2}$.
Pour dresser le tableau de signe, il faut déterminer tout d'abord les zéros de chacun des facteurs. Il s'agit ici de $x = \dfrac{3}{2}$ et $x = -\dfrac{2}{5}$. Nous allons créer un tableau de signe avec chacun des facteurs et chacun des zéros.

x		$-\frac{2}{5}$		$\frac{3}{2}$	
$3-2x$	+		+	0	-
$5x+2$	-	0	+		+
$Q(x)$	-	$\nexists$	+	0	-

- Etudier le signe de $R(x) = \dfrac{(2x+5)(2-x)^2}{3-4x}$.
Pour dresser le tableau de signe, il faut déterminer tout d'abord les zéros de chacun des facteurs. Il s'agit ici de $x = -\dfrac{5}{2}$, $x = 2$ et $x = \dfrac{3}{4}$. Nous allons créer un tableau de signe avec chacun des facteurs et chacun des zéros.

x		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{4}$		2	
$2x+5$	-	0	+		+		+
$(2-x)^2$	+		+		+	0	+
$3-4x$	+		+	0	-		-
$R(x)$	-	0	+	$\nexists$	-	0	-

11.5 Résolution d'une inéquation réductible au premier degré

Méthode: *Pour résoudre une inéquation quelconque :*

- *on pose les éventuelles conditions d'existence ;*
- *on factorise éventuellement les dénominateurs ;*
- *on réduit un des membres à zéro. Nous appellerons le membre non-nul "E" ;*
- *on réduit et on factorise le membre E ;*
- *on détermine les zéros de chaque facteur au numérateur et au dénominateur ;*
- *on dresse un tableau de signe en y indiquant tous les zéros trouvés au point précédent et en étudiant le signe de chaque facteur du premier degré trouvé après factorisation ;*
- *on dresse le bilan de signe de E ;*
- *on repère dans le tableau de signe l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le signe de E correspond à l'inéquation à résoudre ;*
- *on explicite la solution (selon les indications données au paragraphe 8.3)*

Exemple:

Soit à résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{2}{x-3}$

- Conditions d'existence : $x \neq 1$, $x \neq -2$ et $x \neq 3$
- Egalisation du second membre à zéro : $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}<0$
- Réduction au même dénominateur :

$$\frac{(x+2)(x-3)+(x-1)(x-3)-2(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}<0$$

- Développement et réduction de l'expression :

$$\frac{x^2-x-6+x^2-4x+3-2(x^2+x-2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7x+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}<0$$

- Recherche des zéros du numérateur et du dénominateur :
  - numérateur : $x=\dfrac{1}{7}$
  - dénominateur : $x=1$, $x=-2$ et $x=3$
- Tableau de signe complet

x		-2		$\frac{1}{7}$		1		3	
$-7x+1$	+		+	0	-		-		-
$x-1$	-		-		-	0	+		+
$x+2$	-	0	+		+		+		+
$x-3$	-		-		-		-	0	+
$Q(x)$	-	∞	+	0	-	∞	+	∞	-

- Solution :

$$\left]-\infty,-2\right[\cup\left]\frac{1}{7},1\right[\cup\left]3,+\infty\right[$$

11.6 Cas particuliers

Certaines expression mathématique gardent toujours un signe constant. Il s'agit :

- des constantes (positives ou négatives en fonction du signe de la constante) ;
- d'expressions élevées à une puissance paire (toujours positives).

En outre, le signe d'expressions élevées à une puissance impaire est le même que le signe de l'expression sans exposant.