

Suites numériques

A LA FIN DE CE CHAPITRE, IL FAUT ÊTRE CAPABLE DE...

1. Déterminer le terme général d'une suite de manière explicite et implicite ;
2. De déterminer si une suite est croissante ou décroissante ;
3. De reconnaître une suite arithmétique et d'en déterminer ses caractéristiques (terme général, raison, somme des n premiers termes) ;
4. De reconnaître une suite géométrique et d'en déterminer ses caractéristiques (terme général, raison, somme des n premiers termes).

7.1 Définitions

Définition: Une suite numérique est une application^a de $\mathbb{N}_0$ dans $\mathbb{R}$.

$$S : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R} : n \rightarrow a_n$$

^a. Une application de A dans B est une fonction qui, à tout élément de A fait correspondre un élément de B

Par souci de simplification, il nous arrivera souvent d'omettre l'adjectif "numérique" et de dire simplement "suite".

Définition: Les *termes* de la suite sont les nombres qui la composent. Une suite est composée d'un nombre infini de termes (sauf si elle est limitée).

Pour nommer un terme d'une suite, on utilise une notation indicée : chaque terme est noté par une lettre affectée d'un indice naturel (différent de 0) qui indique sa place (ou son *rang*) dans la suite.

Les réels $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ forment une suite.

Le *terme général* de la suite se note a_n et la suite (a_n) avec $n \in \mathbb{N}_0$.

Exemples:

- $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right)$ est une suite de premier terme 1 et dont le terme général s'écrit $a_n = \frac{1}{n^2}$ avec $n \in \mathbb{N}_0$.
- $(0, 2, 4, 6, 8, \dots)$ est une suite de premier terme 0 et dont le terme général s'écrit $a_n = 2n - 2$ avec $n \in \mathbb{N}_0$
- $(2, 4, 8, 16, \dots)$ est une suite de premier terme 2 et dont le terme général s'écrit $a_n = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}_0$

7.2 Caractéristique d'une suite

7.2.1 Détermination d'une suite

Définitions: *Le terme général d'une suite peut être déterminé de deux manières :*

- *Formulation explicite : le terme général est défini par une expression dépendant de n . Cette formule permet de déterminer tous les termes de la suite quel que soit leur rang.*
- *Formulation implicite (ou par récurrence) : le terme général est défini par une expression qui le lie au(x) terme(s) précédent(s). Elle ne permet pas de déterminer le premier terme de la suite, il faudra donc le donner pour que la suite soit entièrement définie.*

Exemple:

Soit la suite : 3, 5, 7, 9, 11, ...

- Le terme général peut s'écrire $a_n = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}_0$. Cette formulation est explicite.
- Le terme général peut s'écrire $a_{n+1} = a_n + 2$ avec $a_1 = 3$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Cette formulation est implicite.

7.2.2 Croissance et décroissance

Définitions: *Une suite (a_n) est croissante si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \geq a_{n-1}$$

Une suite (a_n) est décroissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \leq a_{n-1}$$

Une suite (a_n) est strictement croissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n > a_{n-1}$$

Une suite (a_n) est strictement décroissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n < a_{n-1}$$

Exemples:

- La suite $(5n)$ est strictement croissante.
Pour démontrer cette propriété, il faut démontrer que $5n > 5(n-1)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$.
On a $5n > 5(n-1) \Leftrightarrow 0 > -5$ ce qui est toujours vrai.
- La suite $(-5n)$ est strictement décroissante.
La démonstration est la même que précédemment.

7.2.3 Suite alternée

Définition: *Une suite est alternée lorsque chaque terme a le signe opposé de celui qui l'entourent.*

Exemple:

$$((-2)^n) = (-2, 4, -8, 16, \dots)$$

Remarquons que cette suite n'est ni croissante ni décroissante

7.3 Les suites arithmétiques**7.3.1 Définition**

Définition: *Une suite arithmétique (ou progression arithmétique) est une suite de nombres réels tels que chacun d'eux à partir du deuxième est égal au précédent augmenté d'un même nombre r appelé **raison arithmétique**.*

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Exemple:

$(3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, \dots)$ est une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 4.

7.3.2 Terme général d'une suite arithmétique

Par définition, on a

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_1 + 3r \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

7.3.3 Propriétés

1. On a :

$$a_n = a_p + (n - p)r$$

En effet

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n - 1)r \\ a_p = a_1 + (p - 1)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = a_1 + nr - r \\ a_p = a_1 + pr - r \end{cases}$$

En soustrayant les deux relations :

$$a_n - a_p = nr - pr$$

ou, en réorganisant les termes :

$$a_n = a_p + (n - p)r$$

2. Un terme d'une suite arithmétique est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent.

En effet, on peut écrire :

$$a_n = a_{n-1} + r$$

ou encore

$$a_{n-1} = a_n - r$$

De plus,

$$a_{n+1} = a_n + r$$

En sommant ces deux dernières expressions, on obtient :

$$a_{n+1} + a_{n-1} = a_n + r + a_n - r = 2a_n$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

3. Croissance et décroissance d'une suite arithmétique :

- Si la raison r est strictement positive, la suite arithmétique est strictement croissante.
- Si la raison r est nulle, la suite arithmétique est formée de termes égaux : ce cas manque évidemment d'intérêt ; la suite est constante.
- Si la raison r est strictement négative, la suite arithmétique est strictement décroissante.

4. Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique limitée :

Relation préliminaire :

Calculons la somme de n nombres naturels : $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n$.

On peut écrire :

$$\begin{array}{r} S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ S_n = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_n = n + 1 + n + 1 + \dots + n + 1 + n + 1 + n + 1 \end{array}$$

ou

$$2S_n = n(n+1)$$

ou

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Nous désirons maintenant établir une formule qui permet de calculer rapidement la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique limitée à n termes. On a :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

ou encore, en utilisant la définition de la suite arithmétique :

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + \dots + a_1 + n - 2r + a_1 + (n-1)r \\ S_n &= n.a_1 + r + 2r + 3r + \dots + (n-1)r \\ S_n &= n.a_1 + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)]r \\ S_n &= n.a_1 + r \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

en raison de la relation démontrée ci-dessus.

On a encore

$$\begin{aligned} S_n &= n \frac{2a_1 + r(n-1)}{2} \\ S_n &= n \frac{a_1 + a_1 + r(n-1)}{2} \end{aligned}$$

ou, en utilisant la définition du terme générale d'une suite arithmétique :

$$S_n = n \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Cette relation permet de déterminer la somme de n termes d'une suite arithmétique limitée.

7.4 Les suites géométriques

7.4.1 Définition

Définition: Une suite géométrique est une suite de nombres réels tels que chacun d'eux à partir du deuxième est égal au précédent multiplié par un même nombre q appelé **raison géométrique**.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

La raison est toujours différente de 0 et de 1 ; le premier terme est toujours différent de 0.

Exemple:

(2, 4, 8, 16, 32, 64 ...) est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2.

7.4.2 Expression du terme général

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

7.4.3 Propriétés

1. On a

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$

En effet

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_p = a_1 \cdot q^{p-1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a_n = a_1 \cdot q^n q^{-1} \\ a_p = a_1 \cdot q^p q^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

En divisant les deux relations :

$$\frac{a_n}{a_p} = \frac{q^n}{q^p}$$

ou, en réorganisant les termes :

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$

2. La valeur absolue d'un terme d'une suite géométrique est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent.

On a :

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

ou encore

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$$

et

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

En multipliant ces deux expressions membre à membre, on obtient :

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \frac{a_n}{q} a_n \cdot q$$

ou

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_n^2$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

3. Croissance et décroissance d'une suite géométrique :

- Lorsque le premier terme de la progression géométrique est strictement positif, on a :
 - Si la raison q est strictement plus grande que 1, la suite géométrique est strictement croissante ;
 - Si la raison q est strictement comprise entre 0 et 1, la suite géométrique est strictement décroissante ;
 - Si la raison q est strictement négative, la suite géométrique est alternée : le signe de chaque terme est différent du signe de ceux qui l'encadrent.
- Lorsque le premier terme de la progression géométrique est strictement négatif, on a :
 - Si la raison q est strictement plus grande que 1, la suite géométrique est décroissante ;
 - Si la raison q est strictement comprise entre 0 et 1, la suite géométrique est croissante ;
 - Si la raison q est strictement négative, la suite géométrique est alternée : le signe de chaque terme est différent du signe de ceux qui l'encadrent.

4. Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique limitée.

On a successivement :

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} \\ S_n &= a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q \cdot S_n &= q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) \\ q \cdot S_n &= q \cdot (a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}) \\ q \cdot S_n &= a_1 (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n) \end{aligned}$$

et, par différence membre à membre,

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 (1 - q^n)$$

Donc

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Cette relation permet de déterminer la somme de n termes d'une suite géométrique limitée.