



Troisième partie

5SUAA2 - Suites

« Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer. »
Victor Hugo

Suites numériques

A LA FIN DE CE CHAPITRE, IL FAUT ÊTRE CAPABLE DE...

1. Déterminer le terme général d'une suite de manière explicite et implicite ;
2. De déterminer si une suite est croissante ou décroissante ;
3. De reconnaître une suite arithmétique et d'en déterminer ses caractéristiques (terme général, raison, somme des n premiers termes) ;
4. De reconnaître une suite géométrique et d'en déterminer ses caractéristiques (terme général, raison, somme des n premiers termes).

7.1 Définitions

Définition: Une suite numérique est une application^a de $\mathbb{N}_0$ dans $\mathbb{R}$.

$$S : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R} : n \rightarrow a_n$$

^a. Une application de A dans B est une fonction qui, à tout élément de A fait correspondre un élément de B

Par souci de simplification, il nous arrivera souvent d'omettre l'adjectif "numérique" et de dire simplement "suite".

Définition: Les termes de la suite sont les nombres qui la composent. Une suite est composée d'un nombre infini de termes (sauf si elle est limitée).

Pour nommer un terme d'une suite, on utilise une notation indicée : chaque terme est noté par une lettre affectée d'un indice naturel (différent de 0) qui indique sa place (ou son *rang*) dans la suite.

Les réels $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ forment une suite.

Le terme général de la suite se note a_n et la suite (a_n) avec $n \in \mathbb{N}_0$.

Exemples:

- $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right)$ est une suite de premier terme 1 et dont le terme général s'écrit $a_n = \frac{1}{n^2}$ avec $n \in \mathbb{N}_0$.
- $(0, 2, 4, 6, 8, \dots)$ est une suite de premier terme 0 et dont le terme général s'écrit $a_n = 2n$ avec $n \in \mathbb{N}_0$
- $(2, 4, 8, 16, \dots)$ est une suite de premier terme 2 et dont le terme général s'écrit $a_n = 2^{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}_0$

7.2 Caractéristique d'une suite

7.2.1 Détermination d'une suite

Définitions: *Le terme général d'une suite peut être déterminé de deux manières :*

- *Formulation explicite : le terme général est défini par une expression dépendant de n . Cette formule permet de déterminer tous les termes de la suite quel que soit leur rang.*
- *Formulation implicite (ou par récurrence) : le terme général est défini par une expression qui le lie au(x) terme(s) précédent(s). Elle ne permet pas de déterminer le premier terme de la suite, il faudra donc le donner pour que la suite soit entièrement définie.*

Exemple:

Soit la suite : 3, 5, 7, 9, 11, ...

- Le terme général peut s'écrire $a_n = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}_0$. Cette formulation est explicite.
- Le terme général peut s'écrire $a_{n+1} = a_n + 2$ avec $a_1 = 3$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Cette formulation est implicite.

7.2.2 Croissance et décroissance

Définitions: *Une suite (a_n) est croissante si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \geq a_{n-1}$$

Une suite (a_n) est décroissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \leq a_{n-1}$$

Une suite (a_n) est strictement croissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n > a_{n-1}$$

Une suite (a_n) est strictement décroissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n < a_{n-1}$$

Exemples:

- La suite $(5n)$ est strictement croissante.
Pour démontrer cette propriété, il faut démontrer que $5n > 5(n-1)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$.
On a $5n > 5(n-1) \Leftrightarrow 0 > -5$ ce qui est toujours vrai.
- La suite $(-5n)$ est strictement décroissante.
La démonstration est la même que précédemment.

7.2.3 Suite alternée

Définition: Une suite est alternée lorsque chaque terme a le signe opposé de celui qui l'entourent.

Exemple:

$$((-2)^n) = (-2, 4, -8, 16, \dots)$$

Remarquons que cette suite n'est ni croissante ni décroissante

7.3 Les suites arithmétiques**7.3.1 Définition**

Définition: Une suite arithmétique (ou progression arithmétique) est une suite de nombres réels tels que chacun d'eux à partir du deuxième est égal au précédent augmenté d'un même nombre r appelé *raison arithmétique*.

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Exemple:

$(3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, \dots)$ est une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 4.

7.3.2 Terme général d'une suite arithmétique

Par définition, on a

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_1 + 3r \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

7.3.3 Propriétés

1. On a :

$$a_n = a_p + (n - p)r$$

En effet

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n - 1)r \\ a_p = a_1 + (p - 1)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = a_1 + nr - r \\ a_p = a_1 + pr - r \end{cases}$$

En soustrayant les deux relations :

$$a_n - a_p = nr - pr$$

ou, en réorganisant les termes :

$$a_n = a_p + (n - p)r$$

2. Un terme d'une suite arithmétique est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent.

En effet, on peut écrire :

$$a_n = a_{n-1} + r$$

ou encore

$$a_{n-1} = a_n - r$$

De plus,

$$a_{n+1} = a_n + r$$

En sommant ces deux dernières expressions, on obtient :

$$a_{n+1} + a_{n-1} = a_n + r + a_n - r = 2a_n$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

3. Croissance et décroissance d'une suite arithmétique :

- Si la raison r est strictement positive, la suite arithmétique est strictement croissante.
- Si la raison r est nulle, la suite arithmétique est formée de termes égaux : ce cas manque évidemment d'intérêt ; la suite est constante.
- Si la raison r est strictement négative, la suite arithmétique est strictement décroissante.

4. Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique limitée :

Relation préliminaire :

Calculons la somme de n nombres naturels : $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n$.

On peut écrire :

$$\begin{array}{r} S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ S_n = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_n = n + 1 + n + 1 + \dots + n + 1 + n + 1 + n + 1 \end{array}$$

ou

$$2S_n = n(n+1)$$

ou

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Nous désirons maintenant établir une formule qui permet de calculer rapidement la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique limitée à n termes. On a :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

ou encore, en utilisant la définition de la suite arithmétique :

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + \dots + a_1 + n - 2r + a_1 + (n-1)r \\ S_n &= n.a_1 + r + 2r + 3r + \dots + (n-1)r \\ S_n &= n.a_1 + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)]r \\ S_n &= n.a_1 + r \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

en raison de la relation démontrée ci-dessus.

On a encore

$$\begin{aligned} S_n &= n \frac{2a_1 + r(n-1)}{2} \\ S_n &= n \frac{a_1 + a_1 + r(n-1)}{2} \end{aligned}$$

ou, en utilisant la définition du terme générale d'une suite arithmétique :

$$S_n = n \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Cette relation permet de déterminer la somme de n termes d'une suite arithmétique limitée.

7.4 Les suites géométriques

7.4.1 Définition

Définition: Une suite géométrique est une suite de nombres réels tels que chacun d'eux à partir du deuxième est égal au précédent multiplié par un même nombre q appelé *raison géométrique*.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

La raison est toujours différente de 0 et de 1 ; le premier terme est toujours différent de 0.

Exemple:

(2, 4, 8, 16, 32, 64 ...) est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2.

7.4.2 Expression du terme général

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

7.4.3 Propriétés

1. On a

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$

En effet

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_p = a_1 \cdot q^{p-1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a_n = a_1 \cdot q^n q^{-1} \\ a_p = a_1 \cdot q^p q^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

En divisant les deux relations :

$$\frac{a_n}{a_p} = \frac{q^n}{q^p}$$

ou, en réorganisant les termes :

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$

2. La valeur absolue d'un terme d'une suite géométrique est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent.

On a :

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

ou encore

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$$

et

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

En multipliant ces deux expressions membre à membre, on obtient :

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \frac{a_n}{q} a_n \cdot q$$

ou

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_n^2$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

3. Croissance et décroissance d'une suite géométrique :

- Lorsque le premier terme de la progression géométrique est strictement positif, on a :
 - Si la raison q est strictement plus grande que 1, la suite géométrique est strictement croissante ;
 - Si la raison q est strictement comprise entre 0 et 1, la suite géométrique est strictement décroissante ;
 - Si la raison q est strictement négative, la suite géométrique est alternée : le signe de chaque terme est différent du signe de ceux qui l'encadrent.
- Lorsque le premier terme de la progression géométrique est strictement négatif, on a :
 - Si la raison q est strictement plus grande que 1, la suite géométrique est décroissante ;
 - Si la raison q est strictement comprise entre 0 et 1, la suite géométrique est croissante ;
 - Si la raison q est strictement négative, la suite géométrique est alternée : le signe de chaque terme est différent du signe de ceux qui l'encadrent.

4. Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique limitée.

On a successivement :

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} \\ S_n &= a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q \cdot S_n &= q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) \\ q \cdot S_n &= q \cdot (a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}) \\ q \cdot S_n &= a_1 (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n) \end{aligned}$$

et, par différence membre à membre,

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 (1 - q^n)$$

Donc

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Cette relation permet de déterminer la somme de n termes d'une suite géométrique limitée.

7.5 Exercices

1. Soit la suite définie par $a_n = \frac{n-1}{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Démontrer que cette suite est croissante.
2. La suite définie par $a_n = n^2 - n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.
3. Étudier la croissance (décroissance) des suites :

$$(a) \ a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

$$(c) \ a_n = \frac{3n-1}{5n-2}$$

$$(b) \ a_n = n + \frac{3}{4n+2}$$

4. Pour chacune des suites suivantes, déterminer s'il s'agit d'une suite géométrique ou arithmétique. Déterminer ensuite la raison et le terme général (formulation implicite et explicite) de la suite :

$$(a) \ (1; 6; 11; 16; 21; \dots)$$

$$(d) \ (20; 13; 6; -1; \dots)$$

$$(b) \ (1; 10; 100; 1000; \dots)$$

$$(e) \ (120; 60; 30; 15; \dots)$$

$$(c) \ (-3; -4; -5; -6; \dots)$$

$$(f) \ (-2; 2; -2; 2; -2; \dots)$$

5. Pour chacune des suites suivantes, déterminer s'il s'agit d'une suite : géométrique, arithmétique, ni arithmétique ni géométrique. Déterminer ensuite le terme général (formulation explicite) de la suite :

$$(a) \ (1; 14; 19; 116; 125; \dots)$$

$$(e) \ (0; 12; 1; 32; 2; \dots)$$

$$(b) \ (-1; 2; -3; 4; -5; \dots)$$

$$(f) \ (2; 32; 1; 12; 0; \dots)$$

$$(c) \ (1; -4; 9; -16; 25; \dots)$$

$$(d) \ (1; 3; 9; 27; \dots)$$

$$(g) \ (8; -4; 2; -1; \frac{1}{2}; \dots)$$

6. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ou géométriques ($n \in \mathbb{N}_0$) ?

$$(a) \ a_n = 3n + 5$$

$$(b) \ a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$$

$$(c) \ a_n = 3.2^n$$

7. Calculer le 21ème terme de la suite arithmétique de premier terme -1 et de raison 4 .
8. Soit (a_n) une suite arithmétique telle que $a_2 = 23$ et $a_8 = 14$.
 - (a) Calculer la raison de la suite.
 - (b) Calculer a_1 .
 - (c) Donner les formules explicites et implicites du terme général de la suite.
9. Calculer la somme des 15 premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique, le premier étant 3 et le dernier $21,2$.
10. Trouver le 12ème terme et la somme des 15 premiers termes de la suite arithmétique $8, \frac{19}{3}, \frac{14}{3}, \dots$
11. Le 7ème terme d'une suite arithmétique est 41 et le 13ème, 77 . Trouver le 20ème terme.

12. Le 6ème terme d'une suite arithmétique est 21 et la somme des 17 premiers vaut 0. Déterminer les 3 premiers termes.
13. Calculer la somme des nombres impairs supérieurs à 20 et inférieurs à 80.
14. Calculer le nombre de termes d'une suite arithmétique de premier terme 17, de raison 3 et dont la somme des termes est égale à 1150.
15. Insérer 5 termes d'une SA entre 12 et 42.
16. Une horloge sonne toutes les heures. Quel est le nombre de sons de cloche entendus en 24 heures ?
17. Un charpentier désire construire une échelle avec neuf échelons dont la longueur décroît uniformément (chaque échelon mesurer r centimètres en moins que le précédent). Il dispose de 378cm de bois pour construire ses échelons. On suppose qu'il construit le premier échelon (celui du bas de l'échelle) d'une longueur de 48cm.
 - (a) Quelle sera la longueur du dernier échelon (celui du haut de l'échelle) ?
 - (b) Quelle est la différence de longueur entre deux échelons consécutifs ?
 - (c) Quelle sera la longueur du troisième échelon ?
18. Calculer le 6ème terme d'une suite géométrique de premier terme 100 000 et de raison 0,5.
19. Calculer la somme des 8 termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2.
20. Trouver le 7ème terme et la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique $12, 16, \frac{64}{3}, \dots$
21. Le 4ème terme d'une suite géométrique est 1 et le huitième $\frac{1}{256}$. Trouver le 10ème terme.
22. Insérer 5 termes d'une suite géométrique entre 8 et $\frac{1}{8}$.
23. Trouver la valeur de k pour que les nombres $2k - 5$, $k - 4$ et $10 - 3k$ forment une suite géométrique.
24. Démontrer que les nombres $x^2 - 4x + 2$, $x^2 - 2x + 2$ et $x^2 + 2$ sont en progression arithmétique lorsque x décrit l'ensemble des entiers naturels.
25. Trois nombres réels a , b , c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer ces 3 nombres sachant que : $a + b + c = 21$ et $abc = -105$
26. Trouver trois nombres x , y , z qui constituent dans cet ordre, une suite géométrique dont la raison en valeur absolue est inférieure à 1 sachant que : $x + y + z = \frac{35}{6}$ et $xyz = -125$
27. Les longueurs des côtés d'un triangle rectangle de périmètre 24 m forment une progression arithmétique. Déterminer les longueurs des côtés.

28. Une balle en caoutchouc est lâchée d'une hauteur de 100 cm au-dessus du sol. Elle rebondit plusieurs fois et perd de l'énergie à chaque rebond. La hauteur atteinte à chaque rebond est égale aux $\frac{9}{10}$ ^{ème} la hauteur du précédent rebond. On désigne par h_n la hauteur en centimètres du $n^{\text{ème}}$ rebond et par $h_1 = 100$ la hauteur d'où elle est lâchée.
- (a) Calculer h_2 , h_3 et h_4 .
 - (b) Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n . En déduire la valeur de h_n en fonction de n .
 - (c) Calculer la hauteur du dixième rebond.
 - (d) Calculer la distance parcourue par la balle pendant 10 bonds.
 - (e) On estime la balle immobile dès que la hauteur du rebond est inférieure à 1 cm. Déterminer graphiquement le nombre de rebonds accomplis.
29. La somme des 7 premiers terme d'une SA est 98 et la somme des 12 premiers termes est 288. Trouver la somme des 20 premiers termes
30. Dans une colonie de bactéries, chacune se divise en 2 toutes les heures. Combien de bactéries seront produites en 12h à partir de l'une d'entre elles ?