Les droites - résumé

1 Lieux géométriques

Un lieu géométrique est un ensemble de points répondant à une (ou plusieurs) propriété(s) géométrique(s) donnée(s). La traduction de cette (ces) propriété(s) doit toujours se faire dans un repère cartésien [1].
Dans le cadre du cours de 4ème, nous travaillerons dans le plan et le repère choisi sera systématiquement orthonormé [2]. La traduction de la propriété aboutit à une relation entre x et y, les coordonnées des points du lieu.

Définition: *L'équation d'un lieu géométrique est une relation mathématique liant les coordonnées x et y de tous les points appartenant à ce lieu.*
Elle caractérise complètement les coordonnées des points du lieu.

Remarque importante
Si un point appartient au lieu, ses points ont des coordonnées vérifiant l'équation du lieu.
Cela signifie que si l'on remplace les coordonnées d'un point du lieu dans son équation on trouve une égalité.

2 Equations de droite

2.1 Définition et équation cartésienne de droite

Définition: *Une droite est le lieu géométrique des points alignés du plan.*

On démontre [3] que

$$y - y_A = m\,(x - x_A) \tag{2.1}$$

où

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{2.2}$$

Cette relation est l'***équation cartésienne explicite*** de la droite AB

1. pas nécessairement orthonormé
2. Puisque l'on travaillera ici avec des angles
3. La démonstration complète se trouve dans les notes de théorie de 4ème aux pages 382 à 384 (version 2021)

2.2 Signification graphique des paramètres d'une droite

En réorganisant les termes de l'équation 2.1, on obtient successivement :

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

$$y = mx + y_A - mx_A$$

En posant

$$p = y_A - mx_A$$

on obtient :

$$y = mx + p$$

Dans cette relation m est la ***pente*** de la droite[4] et p est l'***ordonnée à l'origine***.

L'ordonnée à l'origine représente *l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe Oy* (le point correspondant à $x = 0$).
La signification de la pente est plus complexe à cerner. La relation 2.2 montre que la pente représente le quotient d'un accroissement[5] d'ordonnées par un accroissement d'abscisses. Si ce dernier accroissement vaut 1 ($x_B - x_A = 1$), la pente représente l'accroissement d'ordonnées correspondant ($m = y_B - y_A$). La pente représente donc *l'accroissement d'ordonnées correspondant à un accroissement d'abscisses unitaire*.
La figure suivante représente la signification géométrique des différents paramètres de la droite.

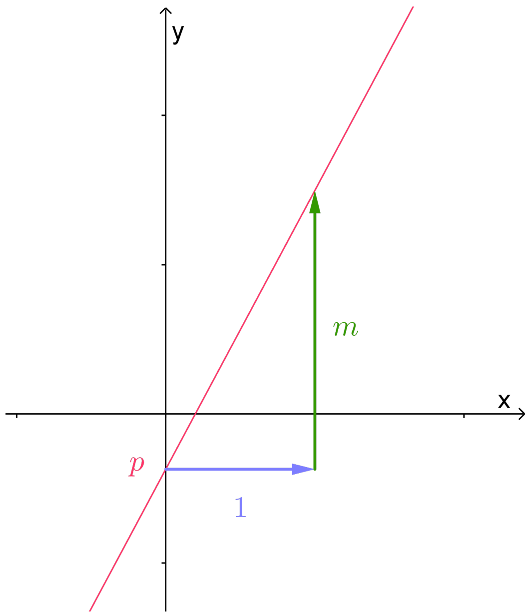


FIGURE 1 – Signification géométrique de la pente et de l'ordonnée à l'origine

4. appelée parfois coefficient angulaire ou coefficient de direction
5. On entend par accroissement une différence entre deux valeurs. Cette différence peut être positive ou négative.

2.3 Equations implicites de droites

Définition: *L'équation cartésienne implicite d'une droite est :*

$$ax + by + c = 0$$

Il est aisé de passer de la forme implicite à la forme explicite (en isolant y) et de montrer que :

$$m = -\frac{a}{b}$$

$$p = -\frac{c}{b}$$

2.4 Droites particulières

Droite parallèle à l'axe Ox

Si la droite est parallèle à l'axe Ox, les points A et B ont la même ordonnée ($y_A = y_B$).

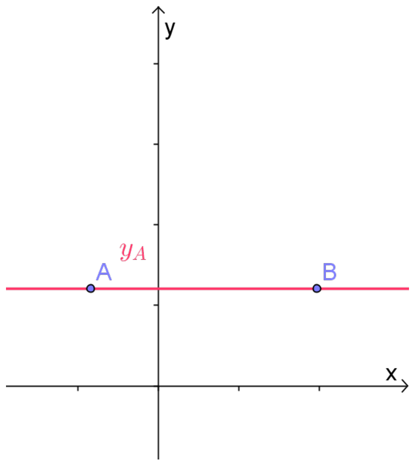


FIGURE 2 – Droite parallèle à l'axe Ox

Comme spécifié au pararaphe 1, tous les points de la droite auront comme caractéristique que leur ordonnée vaudra toujours y_A ou y_B.
L'équation d'une droite parallèle à l'axe Ox est donc :

$$y = y_A$$

Remarque: La pente d'une droite parallèle à l'axe Ox vaut

$$m = \frac{y_A - y_A}{x_B - x_A} = 0$$

En substituant cette valeur dans la relation (2.1), on obtient immédiatement la même équation.

Droite parallèle à l'axe Oy

De même, si la droite est parallèle à l'axe Oy, les points A et B ont la même abscisse ($x_A = x_B$).

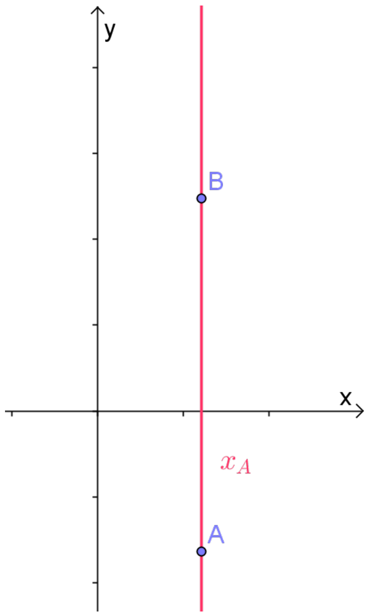


FIGURE 3 – Droite parallèle à l'axe Oy

Tous les points de la droite auront comme caractéristique que leur abscisse vaudra toujours x_A ou x_B.
L'équation d'une droite parallèle à l'axe Oy est donc :

$$x = x_A$$

Remarque: La pente d'une droite parallèle à l'axe Oy vaut

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_A}$$

ce qui est impossible à calculer. L'équation d'une droite parallèle à l'axe Oy est donc *impossible* à obtenir à l'aide de la forme (2.1).

Droite passant par l'origine des axes

Si la droite passe par l'origine, l'ordonnée à l'origine sera nulle et l'équation de la droite sera

$$y = mx$$

2.5 Condition d'appartenance d'un point à une droite

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1, l'équation d'un lieu géométrique est une relation mathématique liant les coordonnées x et y de tous les points appartenant à ce lieu.

Dès lors, si un point $Q(x_Q, y_Q)$ appartient à la droite $d \equiv y = mx + p$, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite et dès lors :

$$y_Q = mx_Q + p$$

2.6 Angles entre une droite et l'axe Ox

Reprenons la définition de la pente de la droite donnée au paragraphe 2.2. Si l'on appelle respectivement $\Delta y = y_B - y_A$ et $\Delta x = x_B - x_A$ les accroissements d'ordonnées et d'abscisses, on a :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

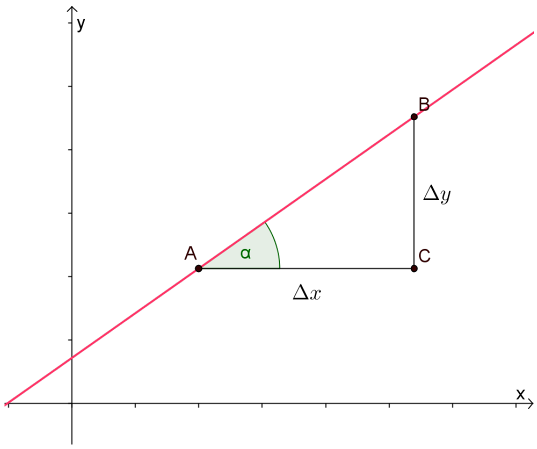


FIGURE 4 – Angle d'une droite par rapport à l'axe Ox

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a $\tan \alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Définition: *La pente d'une droite est la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe Ox.*

Remarque: Cette définition permet d'expliquer le nom de *coefficient angulaire* d'une droite

2.7 Intersection de droites

Considérons deux droites d et d' d'équations respectives $d \equiv y = mx + p$ et $d' \equiv y = m'x + p'$ [6].

Le point d'intersection $I(x_I, y_I)$ de ces deux droites est, par définition, le point appartenant ***simultanément*** à la droite d et à la droite d'. On a donc simultanément :

$$\left\{ \begin{array}{c} y_I = mx_I + p \\ y_I = m'x_I + p' \end{array} \right.$$

Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites, il suffit de résoudre le système d'équations [7] :

$$\left\{ \begin{array}{c} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{array} \right.$$

3 Parallélisme de droites

Si deux droites sont parallèles, l'angle qu'elles font avec l'axe Ox est identique. Elles auront donc le même coefficient angulaire.

Définition: *Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.*

$$d \equiv y = mx + p \ // \ d' \equiv y = m'x + p'$$
$$\Updownarrow$$
$$m = m'$$

4 Perpendicularité de droites

Définition: *Deux droites sont perpendiculaires si et seulement le produit de leur pente vaut -1 c'est-à-dire si leurs pentes sont inverses et opposées.*

$$d \equiv y = mx + p \perp d' \equiv y = m'x + p'$$
$$\Updownarrow$$
$$m' = -\frac{1}{m}$$

La démonstration complète se trouve dans les notes de théorie de 4ème aux pages 389 à 390 (version 2021).

6. La différenciation des droites se fait uniquement via leur pente et leur ordonnée à l'origine.
7. Ensemble d'équations devant être vérifiées *simultanément*.

5 Distances

5.1 Distance entre deux points

Si l'on considère un vecteur dont l'origine est A et l'extrémité est B, la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donnée par le théorème Pythagore et correspond à la distance entre A et B.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

5.2 Distance entre un point et une droite

La distance entre un point A et une droite d est la plus courte distance entre le point A et la droite d c'est-à-dire la distance entre le point A et le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur d, comme le montre le graphe suivant :

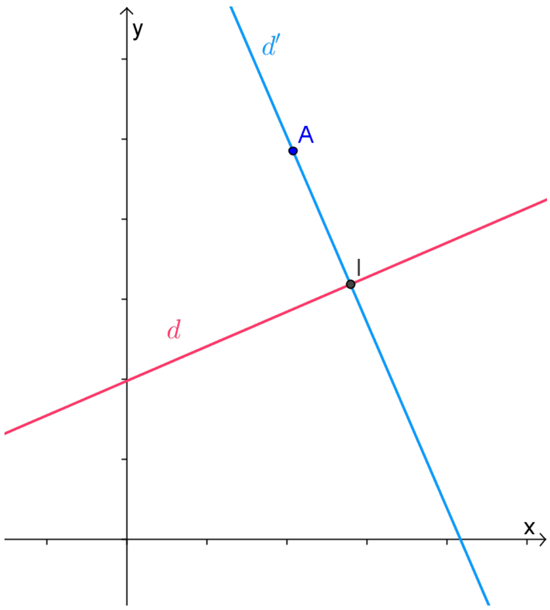


FIGURE 5 – Distance entre un point et une droite

Pour trouver la distance entre un point A et une droite d :

- on écrit l'équation de la droite d', perpendiculaire à d et passant par A (cf paragraphe 4) ;
- on cherche les coordonnées du point d'intersection I entre d et d' (cf paragraphe 2.7) ;
- on calcule la distance entre A et I à l'aide de la formule vue au paragraphe 5.1 :

$$d(A,d) = d(A,I)$$

6 En pratique...

Pour écrire l'équation d'une droite, on utilise, en pratique, **TOUJOURS** la relation :

$$y - y_A = m\,(x - x_A)$$

Il faut donc, pour appliquer cette relation, connaitre :

- un point $A(x_A, y_A)$
- la pente m de la droite

Pour déterminer la pente de la droite, plusieurs moyens sont possibles :

- on connait un deuxième point $B(x_B, y_B)$ et on utilise la relation

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- on connait l'équation d'une droite parallèle à la droite cherchée $d' \equiv y = m'x + p'$ et on utilise la relation

$$m = m'$$

- on connait l'équation d'une droite perpendiculaire à la droite cherchée $d'' \equiv y = m''x + p''$ et on utilise la relation

$$m = -\frac{1}{m''}$$

- on connait l'angle que fait la droite avec un des deux axes et on utilise la relation

$$m = \tan \alpha$$

  où α est l'angle que fait la droite avec l'axe Ox

7 Exemples

7.1 Premier exemple

Ecrire l'équation de la droite passant par $A(-3,1)$ et $B(1,5)$.
Comme on connait deux points on utilise la première technique dans le résume de la page précédente.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-1}{1-(-3)} = 1$$

L'équation de la droite est donnée par l'application de la formule générale :

$$y - y_A = m\,(x - x_A)$$

ou

$$\begin{aligned}
&y - 1 = 1\,(x - (-3)) \\
&y = x + 3 + 1 \\
&y = x + 4
\end{aligned}$$

7.2 Deuxième exemple

Ecrire l'équation de la droite passant par $A(-1,3)$ et $B(3,5)$.
Comme on connait deux points on utilise la première technique dans le résume de la page précédente.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{3-(-1)} = \frac{1}{2}$$

L'équation de la droite est donnée par l'application de la formule générale :

$$y - y_A = m\,(x - x_A)$$

ou

$$\begin{aligned}
&y - 3 = \frac{1}{2}\,(x - (-1)) \\
&y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 3 \\
&y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

7.3 Troisième exemple

Ecrire l'équation de la droite passant par $A(-3,1)$ et $B(1,1)$.
Comme on connait deux points on utilise la première technique dans le résume de la page précédente.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-1}{1-(-3)} = \frac{0}{4} = 0$$

L'équation de la droite est donnée par l'application de la formule générale :

$$y - y_A = m\,(x - x_A)$$

ou

$$\begin{aligned}&y - 1 = 0\,(x - (-3))\\&y = 1\end{aligned}$$

7.4 Quatrième exemple

Ecrire l'équation de la droite passant par $A(1,1)$ et $B(1,5)$.
Comme on connait deux points on utilise la première technique dans le résume de la page précédente.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-1}{1-1} = \frac{4}{0} = ?$$

On ne peut pas calculer m et donc on ne peut plus appliquer la formule générale :

$$y - y_A = m\,(x - x_A)$$

En regardant les coordonnées des points A et B, on constate qu'ils ont la même abscisse. L'équation de la droite est dès lors :

$$x = 1$$

7.5 Cinquième exemple

Ecrire l'équation de la droite passant par $A(2,5)$ et parallèle à la droite d'équation $d' \equiv y = 2x - 3$.
Comme les droites sont parallèles, leurs pentes sont égales. On a donc $m = 2$[8]. L'équation de la droite est donnée par l'application de la formule générale :

$$y - y_A = m\,(x - x_A)$$

ou

$$\begin{aligned}&y - 5 = 2\,(x - 2)\\&y = 2x - 4 + 5\\&y = 2x + 1\end{aligned}$$

7.6 Sixième exemple

Ecrire l'équation de la droite passant par $A(2,5)$ et parallèle à la droite d'équation $d' \equiv 3y - 2x + 1 = 0$.
Comme les droites sont parallèles, leurs pentes sont égales. Pour trouver m, il faut écrire l'équaton de d' sous forme explicite. On a successivement :

$$\begin{aligned}&3y - 2x + 1 = 0\\&\Leftrightarrow 3y = 2x - 1\\&\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

On a donc $m = \dfrac{2}{3}$. L'équation de la droite est donnée par l'application de la formule générale :

$$y - y_A = m\,(x - x_A)$$

8. la pente de d' est le coefficient de x dans l'équation explicite de la droite

ou

$$y-5=\frac{2}{3}(x-2)$$

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}+5$$

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$$

7.7 Septième exemple

Ecrire l'équation de la droite passant par $A(2,5)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $d' \equiv y=\frac{1}{2}x-3$.
Comme les droites sont perpendiculaires, leurs pentes sont inverses et opposées. On a donc :

$$m=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$$

[9] L'équation de la droite est donnée par l'application de la formule générale :

$$y-y_A=m\left(x-x_A\right)$$

ou

$$\begin{aligned} &y-5=-2(x-2)\\ &y=-2x+4+5\\ &y=-2x+9 \end{aligned}$$

7.8 Huitième exemple

Ecrire l'équation de la droite passant par $A(2,5)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $d' \equiv 3y-2x+1=0$.
Comme les droites sont parallèles, leurs pentes sont égales. Pour trouver m, il faut écrire l'équaton de d' sous forme explicite. On a successivement :

$$\begin{aligned} &3y-2x+1=0\\ &\Leftrightarrow 3y=2x-1\\ &\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

On a donc $m=-\frac{3}{2}$. L'équation de la droite est donnée par l'application de la formule générale :

$$y-y_A=m\left(x-x_A\right)$$

ou

$$y-5=-\frac{3}{2}(x-2)$$

$$y=-\frac{3}{2}x+3+5$$

$$y=-\frac{3}{2}x+8$$

9. la pente de d' est le coefficient de x dans l'équation explicite de la droite

8 Exercices

1. Etablir le graphe des droites suivantes **sans construire** de tableaux de valeurs. On précisera **clairement** l'ordonnée à l'origine et la pente sur chaque graphe.

   (a) $d \equiv y = 2x + 1$

   (b) $d \equiv y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3}$

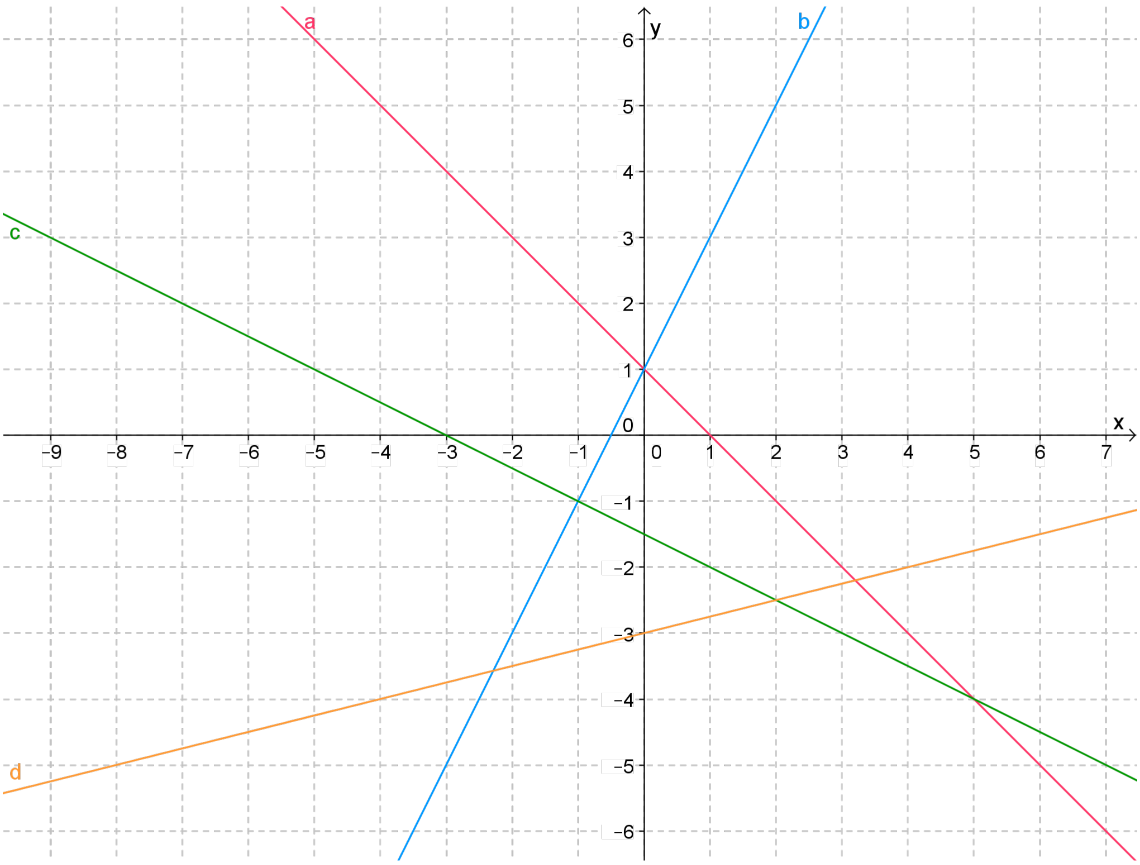
   (c) $d \equiv x - 2y + 1 = 0$

   (d) $d \equiv 3x + 2y = 2$

   (e) $d \equiv x - 4 = 0$

   (f) $d \equiv 2 - 3y = 0$

2. Pour chacune des droites suivantes, écrire son équation implicite et explicite en se basant **uniquement** sur la **mesure** de la pente et de l'ordonnée à l'origine.



3. Vérifier si les points suivants appartiennent aux droites

$$\begin{aligned} &d \equiv y = x - 3 \\ &d' \equiv x + 2y = 2 \\ &d'' \equiv x = -3y + 5 \end{aligned}$$

   (a) $A(2, -1)$

   (b) $B(0, 3)$

   (c) $C\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

   (d) $D\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

4. Ecrire l'équation des droites suivantes. Dans chaque cas représenter la droite et préciser **clairement** l'ordonnée à l'origine et la pente sur chaque graphe.

   (a) a passant par $A(1,2)$ et $B(-2,5)$;
   (b) b passant par $A(1,2)$ et $B(-2,-3)$;
   (c) c passant par $A(1,2)$ et $B(-3,2)$;
   (d) d passant par $A(1,2)$ et $B(1,-3)$;
   (e) e passant par $A(1,2)$ et de pente -2 ;
   (f) f passant par $A(-2,5)$ et parallèle à la droite $d' \equiv y = -2x+3$
   (g) g passant par $A(2,-1)$ et parallèle à la droite $d' \equiv x-2y+1=0$
   (h) h passant par $A(1,3)$ et perpendiculaire à la droite $d' \equiv y = 2x+3$
   (i) i passant par $A(2,-4)$ et perpendiculaire à la droite $d' \equiv x-2y+1=0$
   (j) j passant par $A(4,-5)$ et parallèle à la droite passant par $B(-1,-1)$ et $C(3,2)$

5. Trouver les coordonnées des points d'intersection des droites suivantes (varier les techniques de résolution des systèmes). Vérifier graphiquement les résultats obtenus.

   (a) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 3x-4y+2=0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+2y-5=0 \\ \dfrac{4x}{3}-y=7 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} \dfrac{1}{5}x-\dfrac{1}{4}y=\dfrac{1}{4} \\ x+5y+\dfrac{5}{4}=0 \end{cases}$

6. Ecrire l'équation de la médiatrice du segment défini par $A(7,4)$ et $B(-1,-2)$

7. Calculer la distance de

   (a) $A(1,1)$ à $B(5,3)$
   (b) $A(-1,-5)$ à $B(2,-3)$

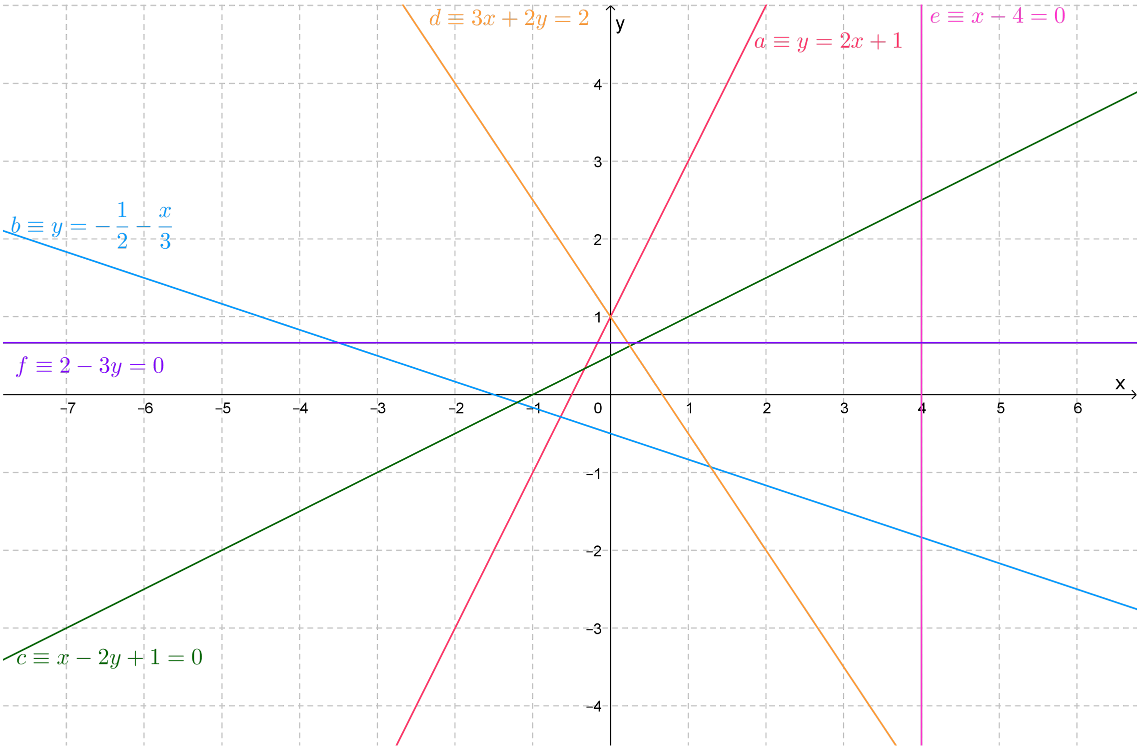
8. Calculer la distance du point $A(-2,-3)$ à la droite $d \equiv 8x+15y-24=0$

9. On donne les points $A(1,-2)$ et $B(2,4)$

   (a) Ecrire l'équation de la droite AB
   (b) Trouver les coordonnées du point C, intersection de AB et de l'axe des ordonnées.
   (c) Ecrire l'équation de la parallèle à Ox passant par C. Soit d cette droite.
   (d) Ecrire l'équation de la perpendiculaire à d passant par B. Soit d' cette droite.
   (e) Trouver les coordonnées de D, intersection de d et d'.
   (f) Ecrire l'équation de la droite d'', perpendiculaire à AB et passant par D
   (g) Calculer les coordonnées du point E, intersection de d'' et de Ox.
   (h) Ecrire l'équation de la parallèle à AB passant par E.
   (i) Calculer la distance de E à B.

9 Solutions

1.



2.

$$
\begin{aligned}
&a \equiv y = 1 - x \\
&b \equiv y = 2x + 1 \\
&c \equiv y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\
&d \equiv y = -3 + \frac{1}{4}x
\end{aligned}
$$

3. (a) $A \in d, A \notin d', A \notin d''$
   (b) $B \notin d, B \notin d', B \notin d''$
   (c) $C \in d, C \notin d', C \in d''$
   (d) $D \in d, D \in d', D \notin d''$

4.

$$
\begin{aligned}
&a \equiv y = -x + 3 \\
&b \equiv 5x - 3y + 1 = 0 \\
&c \equiv y = 2 \\
&d \equiv x = 1 \\
&e \equiv y = -2x + 4 \\
&f \equiv y = -2x + 1 \\
&g \equiv 2y - x + 4 = 0 \\
&h \equiv x + 2y - 7 = 0 \\
&i \equiv y = -2x \\
&j \equiv 4y - 3x + 32 = 0
\end{aligned}
$$

5. (a) $I:(2,2)$
   (b) $I:(6,1)$
   (c) $I:\left(\frac{3}{4},-\frac{2}{5}\right)$
6. $d \equiv 3y+4x-15=0$
7. (a) $d(A,B)=2\sqrt{5}$
   (b) $d(A,B)=\sqrt{13}$
8. $d(A,d)=5$
9. (a) $AB \equiv y=6x-8$
   (b) $C:(0,-8)$
   (c) $d \equiv y=-8$
   (d) $d' \equiv x=2$
   (e) $D:(2,-8)$
   (f) $d'' \equiv 6y+x+46=0$
   (g) $E:(-46,0)$
   (h) $y=6x+276$
   (i) $d(E,B)=4\sqrt{145}$

En pratique

Pour écrire l'équation d'une droite, on utilise, en pratique, **TOUJOURS** la relation :

$$y - y_A = m\,(x - x_A)$$

Il faut donc, pour appliquer cette relation, connaitre :

- un point $A(x_A, y_A)$
- la pente m de la droite

Pour déterminer la pente de la droite, plusieurs moyens sont possibles :

- on connait un deuxième point $B(x_B, y_B)$ et on utilise la relation
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
- on connait l'équation d'une droite parallèle à la droite cherchée $d' \equiv y = m'x + p'$ et on utilise la relation
$$m = m'$$
- on connait l'équation d'une droite perpendiculaire à la droite cherchée $d'' \equiv y = m''x + p''$ et on utilise la relation
$$m = -\frac{1}{m''}$$
- on connait l'angle que fait la droite avec un des deux axes et on utilise la relation
$$m = \tan\alpha$$

  où α est l'angle que fait la droite avec l'axe Ox