

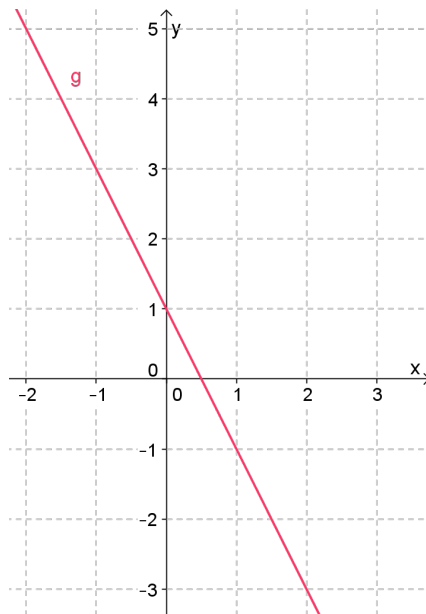
A LA FIN DE CE CHAPITRE, IL FAUT ÊTRE CAPABLE...

1. De reconnaître l'équation d'une droite et d'analyser graphiquement ses caractéristiques (pente et ordonnée à l'origine);
2. De différencier les formes implicite et explicite de l'équation d'une droite;
3. D'écrire l'équation d'une droite parallèle aux axes Ox et Oy ;
4. De traduire la condition d'appartenance d'un point à une droite;
5. De connaître le lien entre la pente d'une droite et l'angle entre celle-ci et l'axe Ox ;
6. D'écrire l'équation d'une droite :
 - (a) passant par deux points;
 - (b) parallèle à une droite donnée et passant par un point;
 - (c) perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point;
 - (d) faisant un angle donné avec l'axe Ox ;
7. De trouver les coordonnées du point d'intersection entre deux droites données;
8. De déterminer la distance entre deux points donnés;
9. De déterminer la distance entre un point et une droite donnés;
10. De résoudre des problèmes liés aux équations de droites.

16.1 Quelques souvenirs de 3^{ème}...

Dans chacun des cas, on justifiera par calcul les résultats.

1. Soit une droite d'équation $a \equiv y = \frac{2}{5}x + 10$. Les points $A(0, 10)$, $B(-60, -14)$ et $C\left(\frac{2}{5}, 10\right)$ appartiennent-ils à la droite a ?
2. Une droite a a pour équation $b \equiv y = 2x + 5$.
 - (a) Déterminer l'ordonnée du point de b dont l'abscisse est 12.
 - (b) Déterminer l'abscisse du point de b dont l'ordonnée est 9.
3. Soient les équations de droites suivantes. Parmi celles-ci, quelles sont celles qui sont parallèles à Ox , à Oy , qui contiennent l'origine des axes?
 - (a) $c \equiv x = -1$
 - (b) $d \equiv 2x - y = 0$
 - (c) $e \equiv y - 3 = 0$
 - (d) $f \equiv y = x + 4$
4. Quelle est, parmi les équations suivantes, l'équation de la droite de la figure suivante



- (a) $g \equiv y = 2x + 1$
- (b) $g \equiv y = x - 2$
- (c) $g \equiv y = -2x + 1$
- (d) $g \equiv y = -x + 2$

5. Déterminer la pente des droites suivantes :

- (a) $h \equiv y = 4x - 1$
- (b) $i \equiv y = 4 - x$
- (c) $j \equiv -3x + 2y - 5 = 0$

6. D'après la figure suivante, déterminer la pente des droites k , l et m .

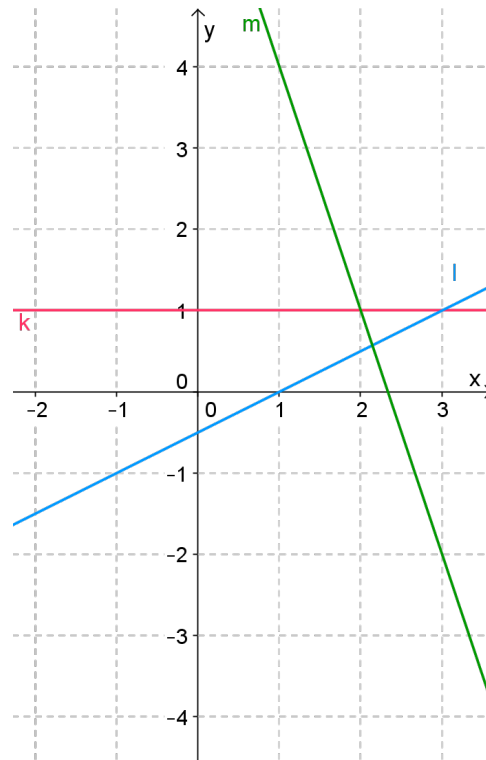


FIGURE 16.1 – Droites k , l et m

7. Trouver les coordonnées du point d'intersection des droites $n \equiv 4x + 3y = 5$ et $o \equiv 2x = 6 - 5y$ et vérifier graphiquement le résultat.

16.2 Lieux géométriques

Un lieu géométrique est un ensemble de points répondant à une (ou plusieurs) propriété(s) géométrique(s) donnée(s). La traduction de cette (ces) propriété(s) doit toujours se faire dans un repère cartésien¹.

Dans le cadre du cours de 4^{ème}, nous travaillerons dans le plan et le repère choisi sera systématiquement orthonormé². La traduction de la propriété aboutit à une relation entre x et y , les coordonnées des points du lieu.

Définition: *L'équation d'un lieu géométrique est une relation mathématique liant les coordonnées x et y de tous les points appartenant à ce lieu.*

Si un point appartient au lieu, ses points ont des coordonnées vérifiant l'équation du lieu.

1. pas nécessairement orthonormé

2. Puisque l'on travaillera ici avec des angles

16.3 Equations de droite

Parmi les lieux étudiés en 3^{ème} figurent les droites.

Définition: *Une droite est le lieu géométrique des points alignés du plan.*

La droite a été vue en 3^{ème} comme le graphe de la fonction du premier degré. Nous allons redécouvrir la droite mais, cette fois-ci, comme lieu géométrique.

16.3.1 Equation vectorielle de droite

Nous avons défini une droite comme un ensemble de points alignés du plan. On exprimera qu'un point quelconque P de la droite AB appartient à celle-ci si et seulement si il est aligné avec les points A et B . Géométriquement, l'alignement de A , B et P se traduit *vectoriellement*³ par :

$$\exists k \in \mathbb{R}_0 : \overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

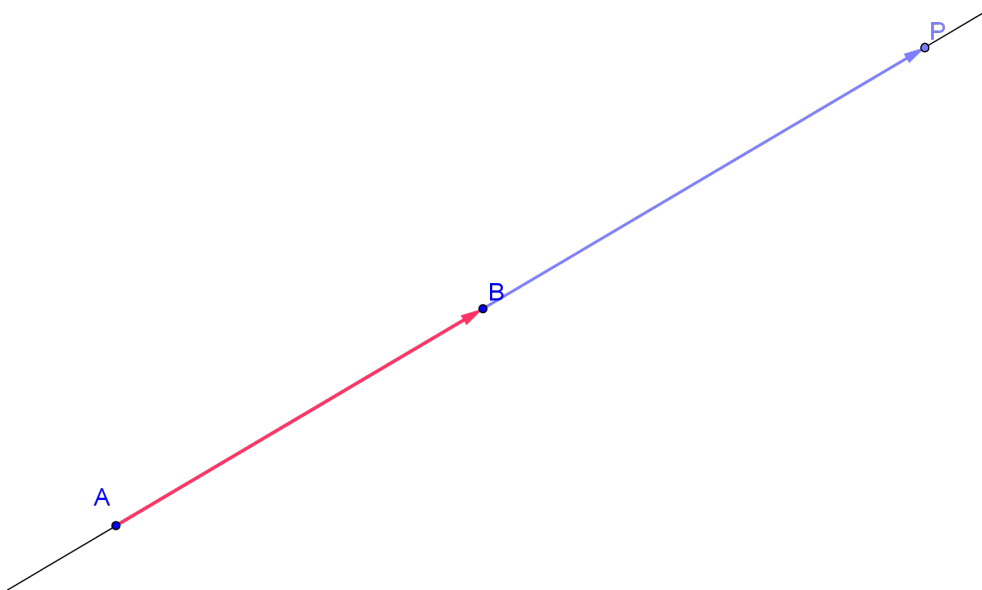


FIGURE 16.2 – Equation vectorielle de droite

L'équation

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB} \tag{16.3.1}$$

est appelée *équation vectorielle* de la droite AB .

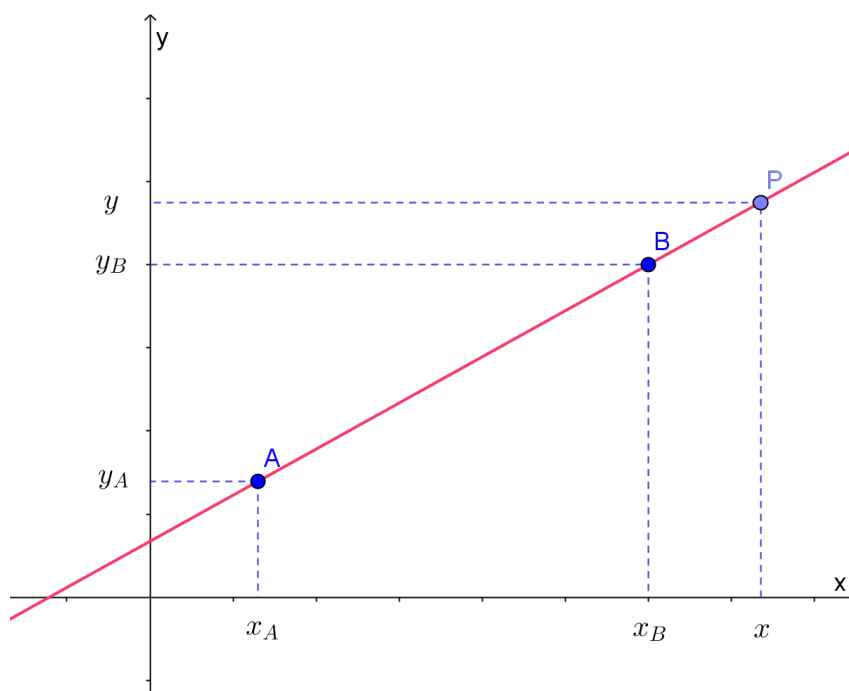
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le *vecteur directeur* de la droite AB .

3. Voir chapitre 14

16.3.2 Equations paramétriques de droite

Il est possible d'exprimer les vecteurs dans un repère orthonormé en terme de *composantes*.

Dans un repère Oxy , les points A , B et P ont respectivement pour coordonnées $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $P(x, y)$ (puisque le point P représente un point quelconque de la droite dont les coordonnées sont inconnues).



Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont respectivement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &: (x_B - x_A, y_B - y_A) \\ \overrightarrow{AP} &: (x - x_A, y - y_A)\end{aligned}$$

En substituant ces deux relations dans la relation (16.3.1), on obtient :

$$(x - x_A, y - y_A) = k.(x_B - x_A, y_B - y_A)$$

ou

$$(x - x_A, y - y_A) = (k(x_B - x_A), k(y_B - y_A))$$

En égalant les composantes des deux vecteurs, on obtient ou encore

$$\begin{cases} x = x_A + k(x_B - x_A) \\ y = y_A + k(y_B - y_A) \end{cases} \quad (16.3.2)$$

Les équations (16.3.2) sont les *équations paramétriques* de la droite AB . Elles permettent de déterminer les coordonnées de n'importe quel point de la droite en fixant une valeur au paramètre k ⁴.

4. Un paramètre est un nombre déterminé mais dont on ne connaît pas la valeur à priori.

16.3.3 Equation cartésienne de droite

L'équation cartésienne d'une droite représente ce que l'on appelle depuis la 3^{ème} l'équation de la droite AB .

Elle s'obtient en éliminant le paramètre k entre les deux équations (16.3.2). On obtient :

$$\begin{cases} k = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \\ k = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \end{cases}$$

ou, en égalant les deux valeurs de k :

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

ou encore

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) \quad (16.3.3)$$

Cette dernière relation est l'équation cartésienne de la droite AB

16.3.4 Signification graphique des paramètres d'une droite

Posons

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (16.3.4)$$

Définition: L'équation cartésienne d'une droite de pente m et passant par le point $A(x_A, y_A)$ est

$$y - y_A = m (x - x_A) \quad (16.3.5)$$

Nous verrons à la fin de ce chapitre que c'est la forme *la plus utilisée* des équations de droites.

En réorganisant les termes de cette équation, on obtient successivement :

$$y = m (x - x_A) + y_A$$

$$y = mx + y_A - mx_A$$

En posant

$$p = y_A - mx_A$$

on retrouve la forme de l'équation cartésienne d'une droite vue en 3^{ème} :

$$y = mx + p$$

Définition: L'équation cartésienne explicite d'une droite est :

$$y = mx + p$$

Dans cette relation m est la **pente** de la droite^a et p est l'**ordonnée à l'origine**.

a. appelée parfois coefficient angulaire ou coefficient de direction

L'ordonnée à l'origine représente l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe Oy (le point correspondant à $x = 0$).

La signification de la pente est plus complexe à cerner. La relation (16.3.4) montre que la pente représente le quotient d'un accroissement⁵ d'ordonnées par un accroissement d'abscisses. Si ce dernier accroissement vaut 1 ($x_B - x_A = 1$), la pente représente l'accroissement d'ordonnées correspondant ($m = y_B - y_A$). La pente représente donc l'accroissement d'ordonnées correspondant à un accroissement d'abscisses unitaire.

La figure suivante représente la signification géométrique des différents paramètres de la droite.

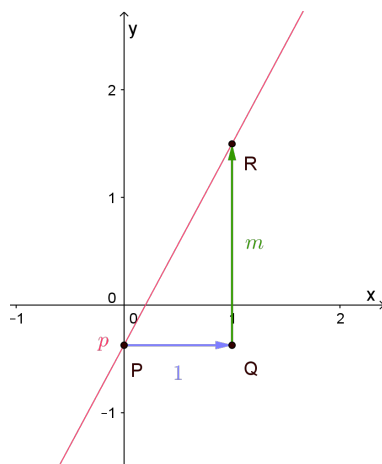


FIGURE 16.3 – Signification géométrique de la pente et de l'ordonnée à l'origine

16.3.5 Equations implicites de droites

Définition: L'équation cartésienne implicite d'une droite est :

$$ax + by + c = 0$$

Il est aisé de passer de la forme implicite à la forme explicite et de montrer que :

$$m = -\frac{a}{b}$$

$$p = -\frac{c}{b}$$

5. On entend par accroissement une différence entre deux valeurs. Cette différence peut être positive ou négative.

16.3.6 Droites particulières

Droite parallèle à l'axe Ox

Si la droite est parallèle à l'axe Ox , les points A et B ont la même ordonnée ($y_A = y_B$).

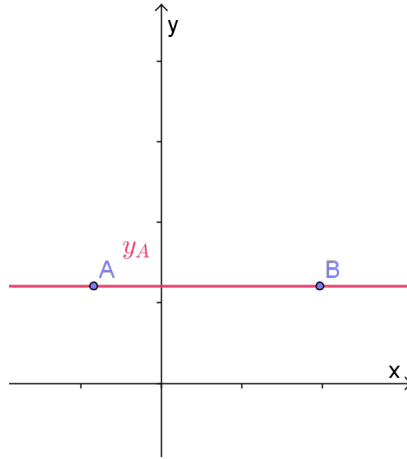


FIGURE 16.4 – Droite parallèle à l'axe Ox

Comme spécifié au paragraphe 16.2, tous les points de la droite auront comme caractéristique que leur ordonnée vaudra toujours y_A ou y_B .
L'équation d'une droite parallèle à l'axe Ox est donc :

$$y = y_A$$

Remarque : La pente d'une droite parallèle à l'axe Ox vaut

$$m = \frac{y_A - y_A}{x_B - x_A} = 0$$

En substituant cette valeur dans la relation (16.3.5), on obtient immédiatement la même équation.

Droite parallèle à l'axe Oy

De même, si la droite est parallèle à l'axe Oy , les points A et B ont la même abscisse ($x_A = x_B$).

Tous les points de la droite auront comme caractéristique que leur abscisse vaudra toujours x_A ou x_B .

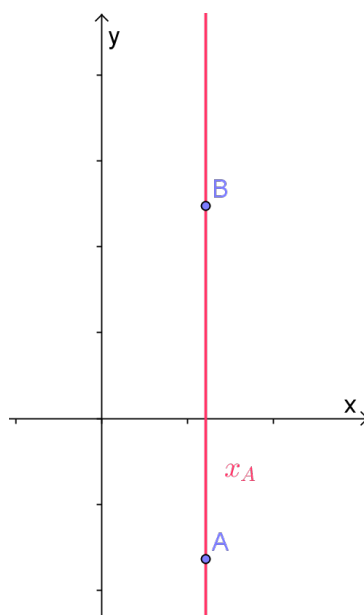
L'équation d'une droite parallèle à l'axe Oy est donc :

$$x = x_A$$

Remarque : La pente d'une droite parallèle à l'axe Oy vaut

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_A}$$

ce qui est impossible à calculer. L'équation d'une droite parallèle à l'axe Oy est donc impossible à obtenir à l'aide de la forme (16.3.5).

FIGURE 16.5 – Droite parallèle à l'axe Oy **Droite passant par l'origine des axes**

Si la droite passe par l'origine, l'ordonnée à l'origine sera nulle et l'équation de la droite sera

$$y = mx$$

16.3.7 Condition d'appartenance d'un point à une droite

Comme nous l'avons vu au paragraphe 16.2, l'équation d'un lieu géométrique est une relation mathématique liant les coordonnées x et y de tous les points appartenant à ce lieu.

Dès lors, si un point $Q(x_Q, y_Q)$ appartient à la droite $d \equiv y = mx + p$, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite et dès lors :

$$y_Q = mx_Q + p$$

16.3.8 Angles entre une droite et l'axe Ox

Reprenons la définition de la pente de la droite donnée au paragraphe 16.3.4. Si l'on appelle respectivement Δy et Δx les accroissements d'ordonnées et d'abscisses, on a :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

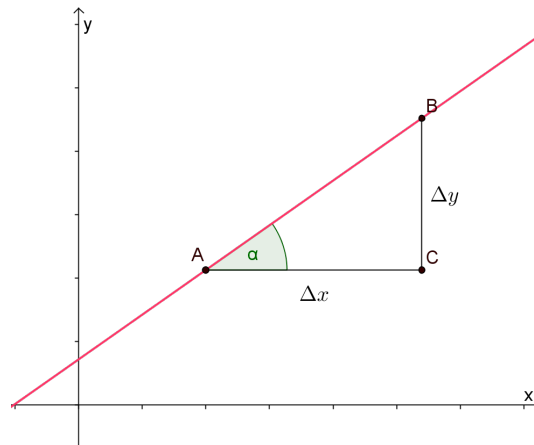


FIGURE 16.6 – Angle d'une droite par rapport à l'axe Ox

Dans le triangle ABC rectangle en A , on a $\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Définition: La pente d'une droite est la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe Ox .

Remarque: Cette définition permet d'expliquer le nom de *coefficient angulaire* d'une droite

16.3.9 Intersection de droites

Considérons deux droites d et d' d'équations respectives $d \equiv y = mx + p$ et $d' \equiv y = m'x + p'$ ⁶.

Le point d'intersection $I(x_I, y_I)$ de ces deux droites est, par définition, le point appartenant *simultanément* à la droite d et à la droite d' . On a donc simultanément :

$$\begin{cases} y_I = mx_I + p \\ y_I = m'x_I + p' \end{cases}$$

Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites, il suffit de résoudre⁷ le système d'équations⁸ :

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

6. La différenciation des droites se fait uniquement via leur pente et leur ordonnée à l'origine.

7. Les différentes méthodes de résolution de systèmes d'équations ont été vues en 3^{ème} et seront rappelées au cours oral.

8. Ensemble d'équations devant être vérifiées *simultanément*.

16.4 Parallélisme de droites

Si deux droites sont parallèles, l'angle qu'elles font avec l'axe Ox est identique. Elles auront donc le même coefficient angulaire.

Définition: Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

$$d \equiv y = mx + p \quad // \quad d' \equiv y = m'x + p'$$

$$\Downarrow$$

$$m = m'$$

16.5 Perpendicularité de droites

Si deux droites sont perpendiculaires, l'angle entre leur vecteur directeur vaut $\frac{\pi}{2}$.
 Considérons la droite d , passant par $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et la droite d' , passant par $A'(x'_A, y'_A)$ et $B'(x'_B, y'_B)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{A'B'}$.

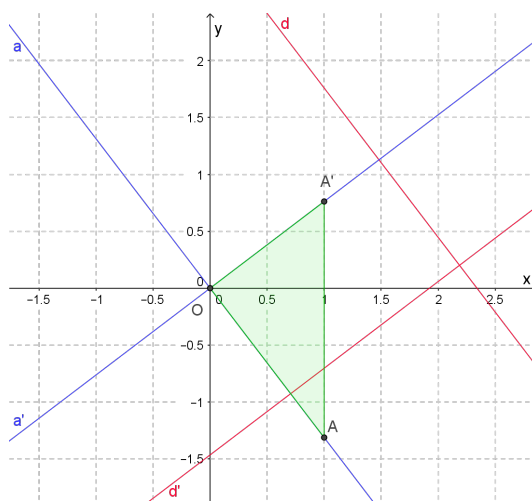


FIGURE 16.7 – Droites perpendiculaires

Comme d et d' sont perpendiculaires, il en est de même pour les droites a et a' qui leur sont parallèles. Si les droites d et d' ont pour équations :

$$\begin{cases} d \equiv y = mx + p \\ d' \equiv y = m'x + p' \end{cases}$$

les droites a et a' ont pour équations :

$$\begin{cases} a \equiv y = mx \\ a' \equiv y = m'x \end{cases}$$

Considérons deux points d'abscisse 1 sur a et a' . D'après les équations des droites, ces points ont pour coordonnées $A(1, m)$ et $A'(1, m')$.

De plus, le triangle OAA' est rectangle en O .
Par le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} |AA'|^2 &= |OA|^2 + |OA'|^2 \\ \Leftrightarrow (1-1)^2 + (m-m')^2 &= 1+m^2 + 1+m'^2 \\ \Leftrightarrow m^2 - 2mm' + m'^2 &= 2 + m^2 + m'^2 \\ \Leftrightarrow mm' &= -1 \end{aligned}$$

Définition: Deux droites sont perpendiculaires si et seulement le produit de leur pente vaut -1 c'est-à-dire si leurs pentes sont inverses et opposées.

$$\begin{aligned} d \equiv y = mx + p \perp d' \equiv y = m'x + p' \\ \Updownarrow \\ m' = -\frac{1}{m} \end{aligned}$$

16.6 Distances

16.6.1 Distance entre deux points

Si l'on considère un vecteur dont l'origine est A et l'extrémité est B , la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donnée par le théorème Pythagore

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

16.6.2 Distance entre un point et une droite

La distance entre un point P et une droite d est la plus courte distance entre le point P et la droite d c'est-à-dire la distance entre le point P et le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur d , comme le montre le graphe suivant.

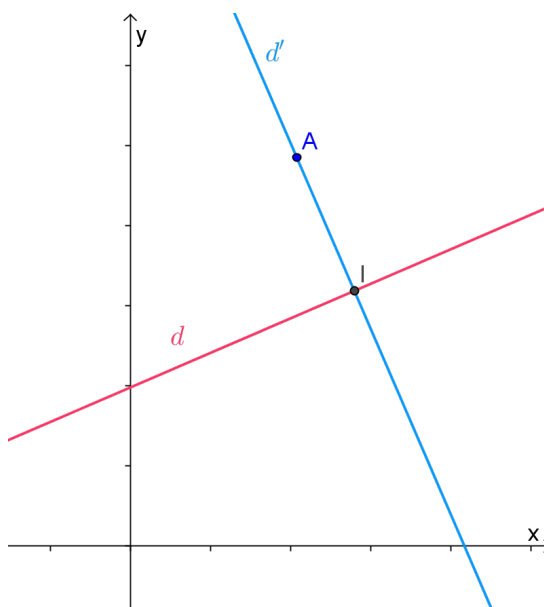


FIGURE 16.8 – Distance entre un point et une droite

Pour trouver la distance entre un point P et une droite d :

- on écrit l'équation de la droite d' , perpendiculaire à d et passant par P (cf paragraphe 16.5);
- on cherche les coordonnées du point d'intersection I entre d et d' (cf paragraphe 16.3.9);
- on calcule la distance entre P et I à l'aide de la formule vue au paragraphe 16.6.1 :

$$d(P, d) = d(P, I)$$

16.7 En pratique...

Pour écrire l'équation d'une droite, on utilise, en pratique, la relation :

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

Il faut donc, pour appliquer cette relation, connaître :

- un point $A(x_A, y_A)$
- la pente m de la droite

Pour déterminer la pente de la droite, plusieurs moyens sont possibles :

- on connaît un deuxième point $B(x_B, y_B)$ et on utilise la relation

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- on connaît l'équation d'une droite parallèle à la droite cherchée $d' \equiv y = m'x + p'$ et on utilise la relation

$$m = m'$$

- on connaît l'équation d'une droite perpendiculaire à la droite cherchée $d'' \equiv y = m''x + p''$ et on utilise la relation

$$m = -\frac{1}{m''}$$

- on connaît l'angle que fait la droite avec un des deux axes et on utilise la relation

$$m = \tan \alpha$$

où α est l'angle que fait la droite avec l'axe Ox

16.8 Exercices

1. Etablir le graphe des droites suivantes **sans construire** de tableaux de valeurs. On précisera **clairement** l'ordonnée à l'origine et la pente sur chaque graphe.

(a) $d \equiv y = 2x + 1$

(d) $d \equiv 3x + 2y = 2$

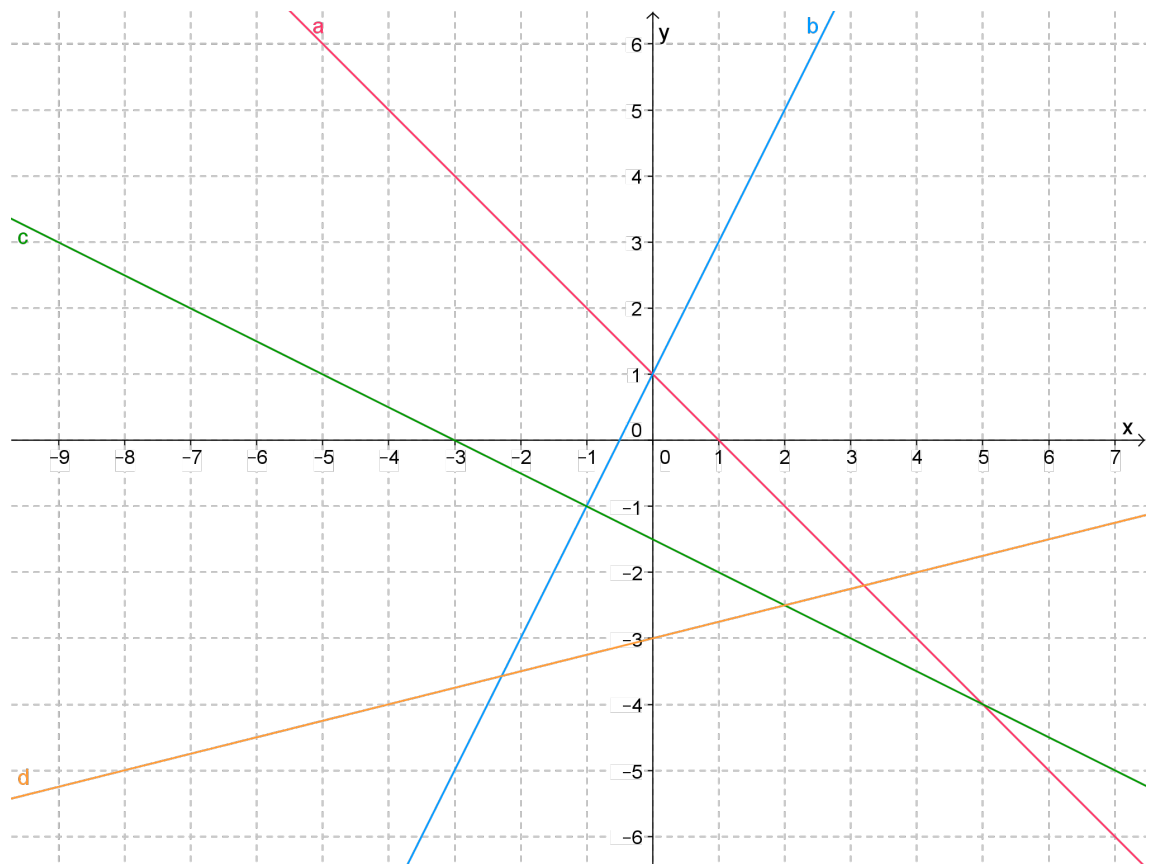
(b) $d \equiv y = -\frac{1}{2} - \frac{x}{3}$

(e) $d \equiv x - 4 = 0$

(c) $d \equiv x - 2y + 1 = 0$

(f) $d \equiv 2 - 3y = 0$

2. Pour chacune des droites suivantes, écrire son équation implicite et explicite en se basant **uniquement** sur la **mesure** de la pente et de l'ordonnée à l'origine.



3. Vérifier si les points suivants appartiennent aux droites

$$\begin{aligned}d &\equiv y = x - 3 \\d' &\equiv x + 2y = 2 \\d'' &\equiv x = -3y + 5\end{aligned}$$

- (a) $A(2, -1)$ (c) $C\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$
 (b) $B(0, 3)$ (d) $D\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

4. Ecrire l'équation des droites suivantes. Dans chaque cas représenter la droite et préciser **clairement** l'ordonnée à l'origine et la pente sur chaque graphe.

- (a) a passant par $A(1, 2)$ et $B(-2, 5)$;
 (b) b passant par $A(1, 2)$ et $B(-2, -3)$;
 (c) c passant par $A(1, 2)$ et $B(-3, 2)$;
 (d) d passant par $A(1, 2)$ et $B(1, -3)$;
 (e) e passant par $A(1, 2)$ et de pente -2 ;
 (f) f passant par $A(-2, 5)$ et parallèle à la droite $d' \equiv y = -2x + 3$
 (g) g passant par $A(2, -1)$ et parallèle à la droite $d' \equiv x - 2y + 1 = 0$
 (h) h passant par $A(1, 3)$ et perpendiculaire à la droite $d' \equiv y = 2x + 3$
 (i) i passant par $A(2, -4)$ et perpendiculaire à la droite $d' \equiv x - 2y + 1 = 0$
 (j) j passant par $A(3, 3)$ et faisant un angle de 30° avec l'axe Ox
 (k) k passant par $A(-2, 6)$ et faisant un angle de 30° avec l'axe Oy
 (l) l passant par $A(4, -5)$ et parallèle à la droite passant par $B(-1, -1)$ et $C(3, 2)$

5. Trouver les coordonnées des points d'intersection des droites suivantes (varier les techniques de résolution des systèmes). Vérifier graphiquement les résultats obtenus.

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad &\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 3x - 4y + 2 = 0 \end{cases} & \text{(c)} \quad &\begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{4} \\ x + 5y + \frac{5}{4} = 0 \end{cases} \\ \text{(b)} \quad &\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y - 5 = 0 \\ \frac{4x}{3} - y = 7 \end{cases}\end{aligned}$$

6. Trouver la valeur de k tel que la droite $d \equiv 2x - ky + 6 = 0$ soit perpendiculaire à la droite passant par les points $A(2, 3)$ et $B(-2, 1)$.

7. Ecrire l'équation de la médiatrice du segment défini par $A(7, 4)$ et $B(-1, -2)$

8. Soient les trois sommets d'un triangle ABC : $A(-5, 6)$, $B(-1, -4)$ et $C(3, 2)$

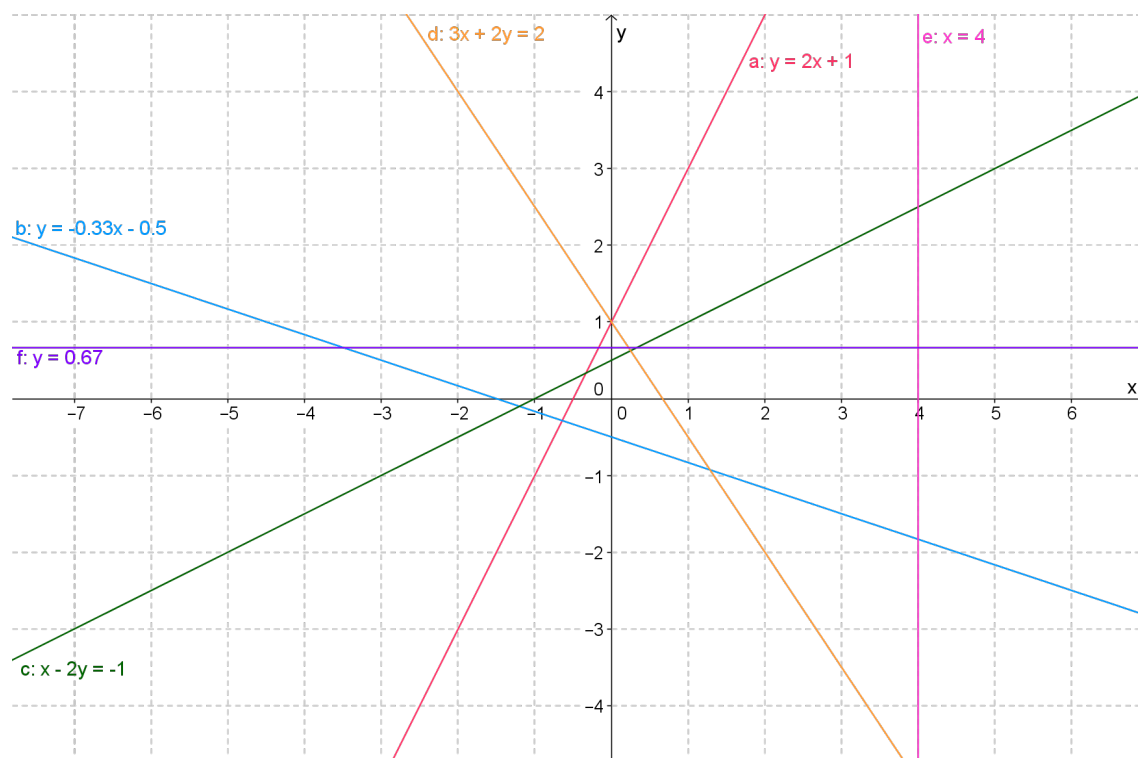
- (a) Ecrire les équations des médianes
 (b) Ecrire les coordonnées du centre de gravité du triangle
 (c) Ecrire l'équation des hauteurs
 (d) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre
 (e) Ecrire l'équation des médiatrices du triangle
 (f) Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle

9. Dans un triangle, on appelle droite d'Euler la droite passant par le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit au triangle.
 - (a) Déterminer le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit au triangle défini par les sommets $A(1, 1)$, $B(-2, 3)$ et $C(1, -2)$
 - (b) Vérifier que ces trois points sont alignés et écrire l'équation de la droite d'Euler correspondante.
10. Soit l'équation $(k + 1)x + ky = k - 1$. Cette équation est celle d'un faisceau de droite⁹.
 - (a) Déterminer k pour que cette droite soit parallèle à Ox .
 - (b) Déterminer k pour que cette droite passe par 0.
 - (c) Déterminer k pour que cette droite passe par $(4, -3)$.
11. Calculer la distance de
 - (a) $A(1, 1)$ à $B(5, 3)$
 - (b) $A(-1, -5)$ à $B(2, -3)$
12. Calculer la distance du point $A(-2, -3)$ à la droite $d \equiv 8x + 15y - 24 = 0$
13. On considère un point $P(-2, 1)$ et une droite $d \equiv 4x - 2y + 1 = 0$. On mène par P la parallèle d_1 et la perpendiculaire d_2 à d . Déterminer la longueur des côtés du triangle délimité par les droites d_1 , d_2 et l'axe Ox .
14. On donne les points $A(2, 3)$, $B(-3, 1)$ et $C(0, -2)$
 - (a) Démontrer que le triangle ABC est isocèle.
 - (b) Démontrer que les médianes issues de B et de C ont même longueur.
15. On donne les points $A(1, -2)$ et $B(2, 4)$
 - (a) Ecrire l'équation de la droite AB
 - (b) Trouver les coordonnées du point C , intersection de AB et de l'axe des ordonnées.
 - (c) Ecrire l'équation de la parallèle à Ox passant par C . Soit d cette droite.
 - (d) Ecrire l'équation de la perpendiculaire à d passant par B . Soit d' cette droite.
 - (e) Trouver les coordonnées de D , intersection de d et d' .
 - (f) Ecrire l'équation de la droite d'' , perpendiculaire à AB et passant par D
 - (g) Calculer les coordonnées du point E , intersection de d'' et de Ox .
 - (h) Ecrire l'équation de la parallèle à AB passant par E .
 - (i) Calculer la distance de E à B .
16. On donne les équations $d_1 \equiv 3x - 2y - 5 = 0$ et $d_2 \equiv 2x + 3y + 7 = 0$ de deux des côtés d'un rectangle dont un des sommets est $A(-2, 1)$. Déterminer l'aire de ce rectangle.
17. On fait passer par le point $M(4, 3)$ une droite qui forme avec les axes de coordonnées un triangle d'aire 24 (u.a.). Déterminer les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec les axes.

9. Ce faisceau sera illustré graphiquement en classe

16.9 Solutions

1.



2.

$$\begin{aligned} a &\equiv y = 1 - x \\ b &\equiv y = 2x + 1 \\ c &\equiv y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ d &\equiv y = -3 + \frac{1}{4}x \end{aligned}$$

3. (a) $A \in d, A \notin d', A \notin d''$ (b) $B \notin d, B \notin d', B \notin d''$ (c) $C \in d, C \notin d', C \in d''$ (d) $D \in d, D \in d', D \notin d''$

4.

$$\begin{aligned} a &\equiv y = -x + 3 \\ b &\equiv 5x - 3y + 1 = 0 \\ c &\equiv y = 2 \\ d &\equiv x = 1 \\ e &\equiv y = -2x + 4 \\ f &\equiv y = -2x + 1 \\ g &\equiv 2y - x + 4 = 0 \\ h &\equiv x + 2y - 7 = 0 \\ i &\equiv y = -2x \\ j &\equiv 3y - \sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} = 0 \\ k &\equiv y = \sqrt{3}x + 6 + 2\sqrt{3} \\ l &\equiv 4y - 3x + 32 = 0 \end{aligned}$$

5. (a) $I : (2, 2)$
 (b) $I : (6, 1)$
 (c) $I : \left(\frac{3}{4}, -\frac{2}{5}\right)$
6. $k = -1$
7. $d \equiv 3y + 4x - 15$
8. Les équations et coordonnées demandées sont reprises sur les figures ci-dessous.

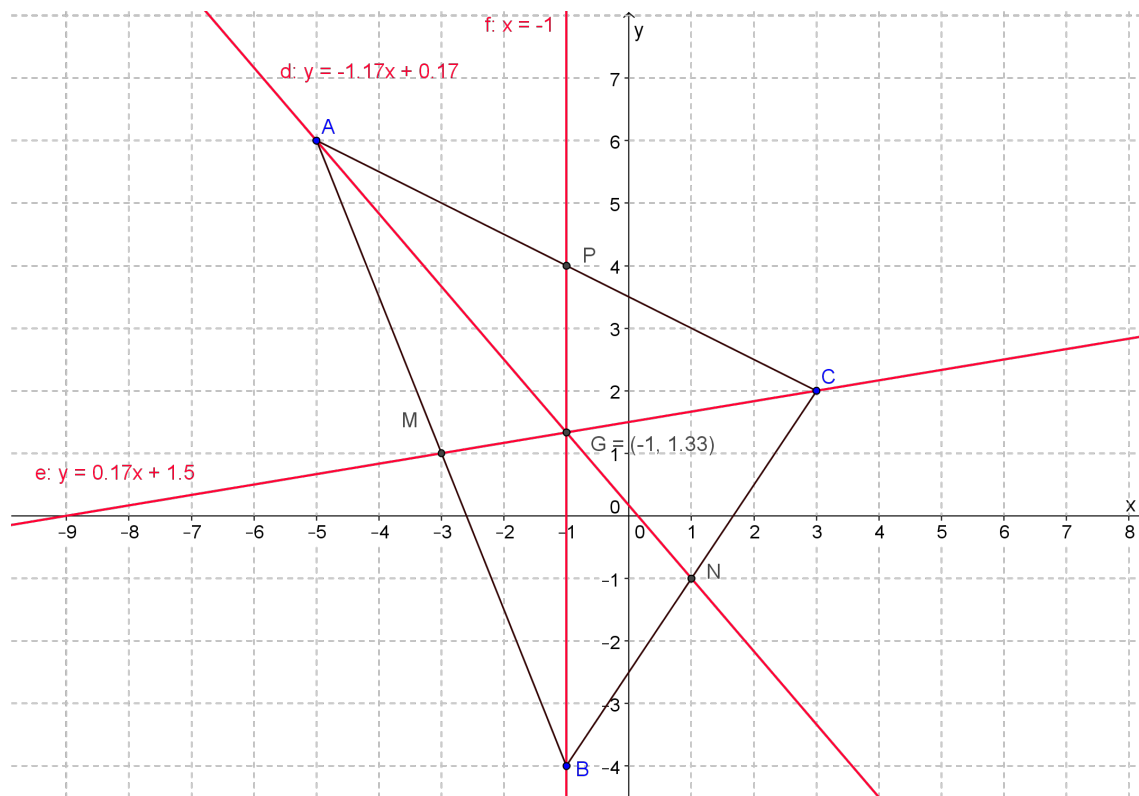


FIGURE 16.9 – Médianes et centre de gravité

Equations des médianes :

- médiane $AN \equiv 7x + 6y = 1$
- médiane $BP \equiv x = -1$
- médiane $CM \equiv x - 6y = -9$

$$G : \left(-1, \frac{4}{3}\right)$$

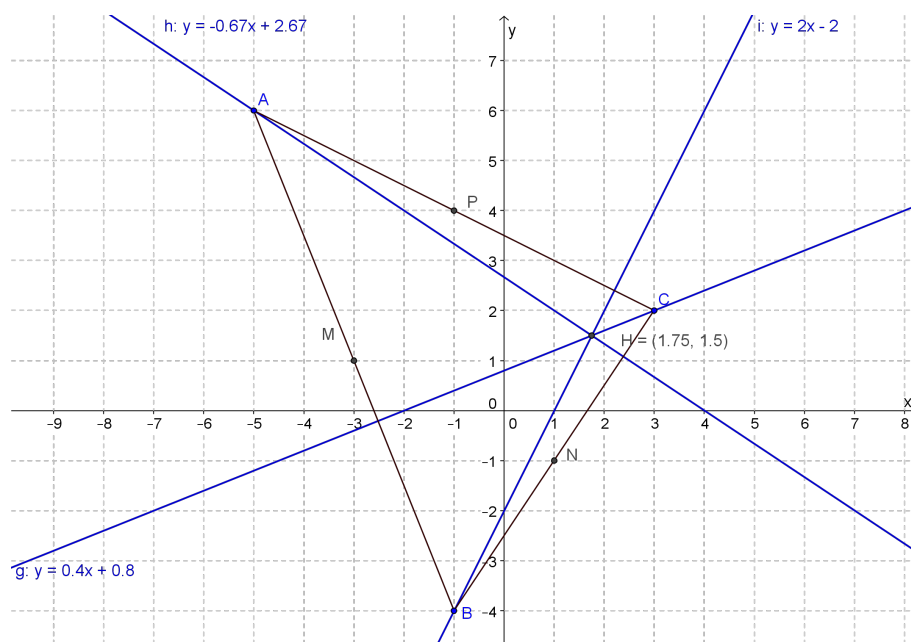


FIGURE 16.10 – Hauteurs et orthocentre

Equations des hauteurs :

- hauteur relative à $A \equiv 2x + 3y = 8$
- hauteur relative à $B \equiv -2x + y = -2$
- hauteur relative à $C \equiv -2x + 5y = 4$

$$H : \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2} \right)$$

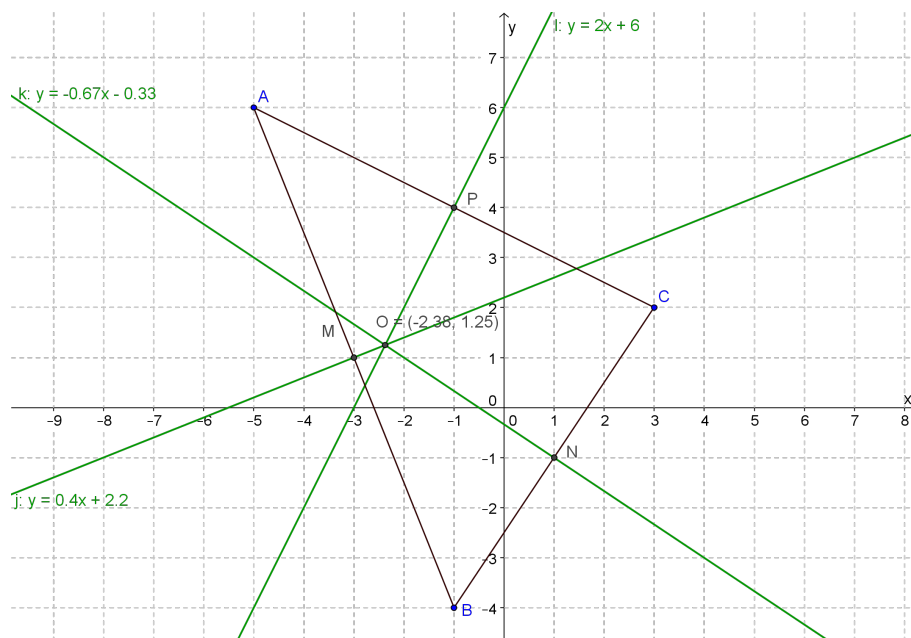


FIGURE 16.11 – Médiatrices et centre du cercle circonscrit

Equations des médiatrices :

- médiatrice de $[AB] \equiv -2x + 5y = 11$
- médiatrice de $[BC] \equiv 2x + 3y = -1$
- médiatrice de $[AC] \equiv -2x + y = 6$

$$O : \left(-\frac{19}{8}, \frac{5}{4} \right)$$

9. Les équations et coordonnées demandées sont reprises sur les figures ci-dessous.

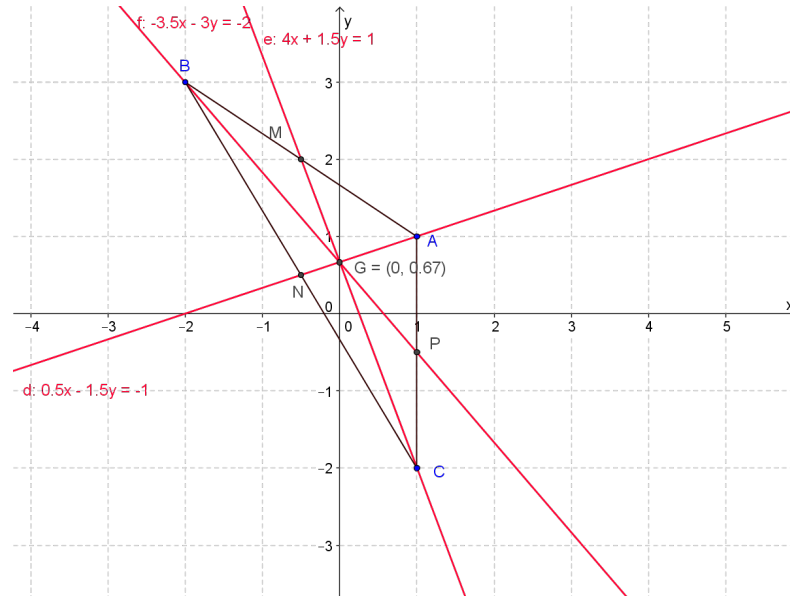


FIGURE 16.12 – Médianes et centre de gravité

Equations des médianes :

- médiane $AN \equiv -x + 3y = 2$
- médiane $BP \equiv -7x - 6y = -4$
- médiane $CM \equiv 8x + 3y = 2$

$$G : \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

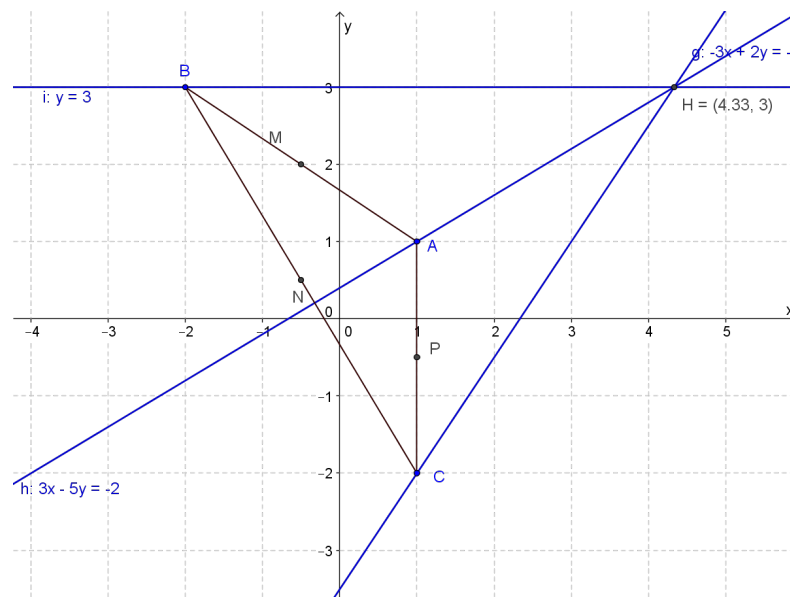


FIGURE 16.13 – Hauteurs et orthocentre

Equations des hauteurs :

- hauteur relative à $A \equiv 3x - 5y = -2$
- hauteur relative à $B \equiv y = 3$
- hauteur relative à $C \equiv 3x - 2y = 7$

$$H : \left(\frac{13}{3}, 3\right)$$

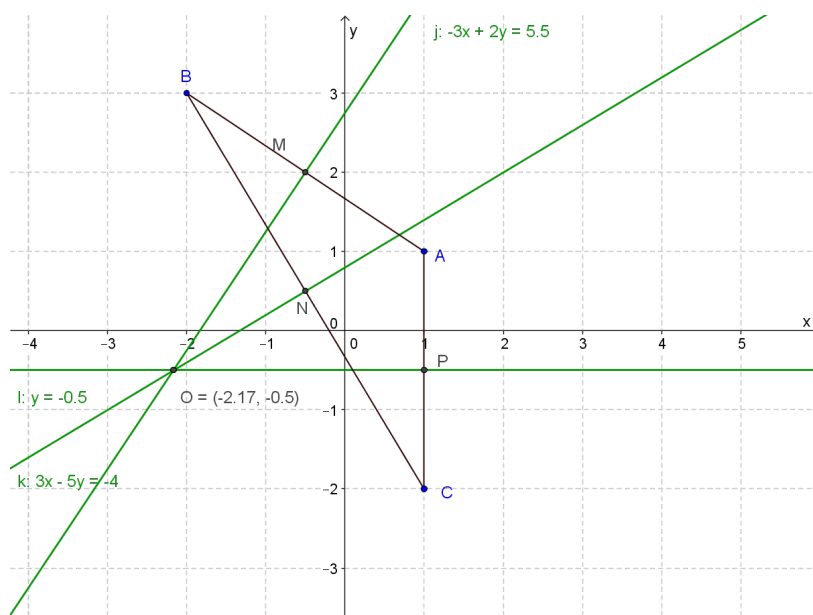


FIGURE 16.14 – Médiatrices et centre du cercle circonscrit

Equations des médiatrices :

- médiatrice de $[AB] \equiv -6x + 4y = 11$
- médiatrice de $[BC] \equiv 3x - 5y = -4$
- médiatrice de $[AC] \equiv y = -\frac{1}{2}$

$$O : \left(-\frac{13}{6}, -\frac{1}{2} \right)$$

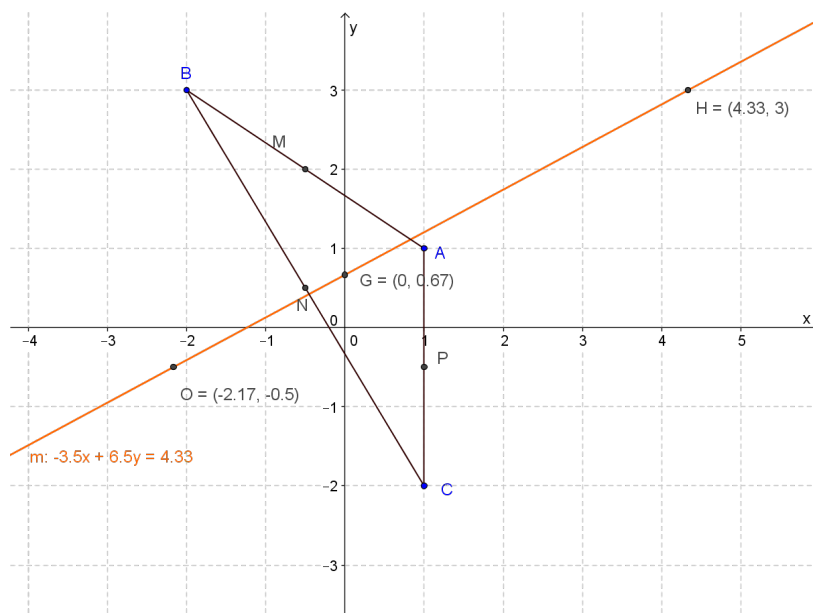
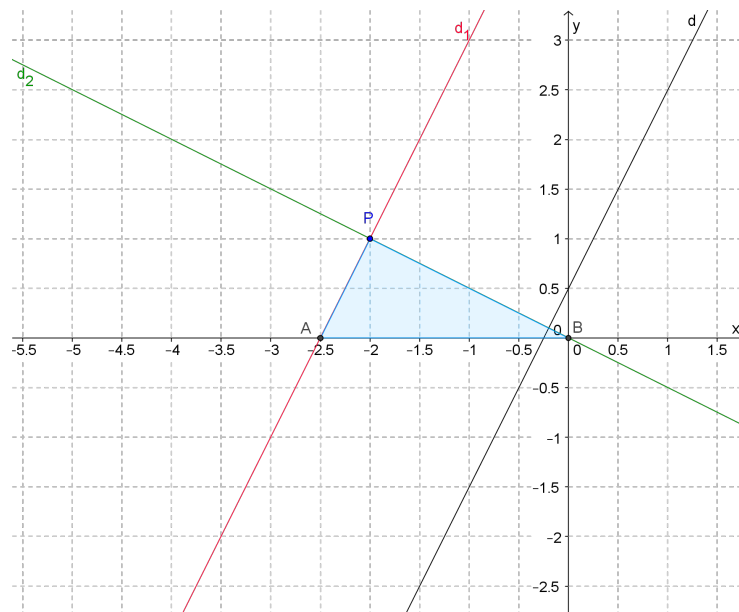


FIGURE 16.15 – Droite d'Euler

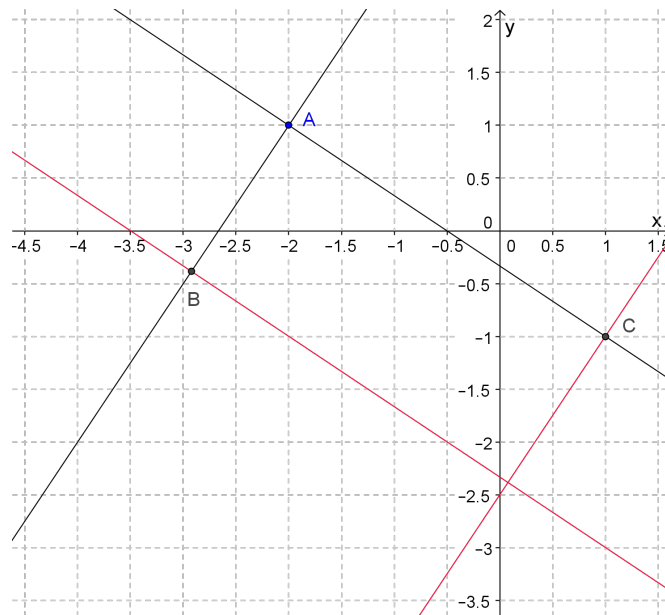
Droite d'Euler : $m \equiv 21x + 39y = 26$

10. (a) $k = -1$
 (b) $k = 1$
 (c) $k = -1$

11. (a) $d(A, B) = 2\sqrt{5}$
 (b) $d(A, B) = \sqrt{13}$
12. $d(A, d) = 5$
13. $d(A, P) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $d(B, P) = \sqrt{5}$ et $d(A, B) = \frac{5}{2}$



14. (a) i. $d(A, B) = \sqrt{29}$
 ii. $d(A, C) = \sqrt{29}$
 iii. $d(B, C) = 3\sqrt{2}$
- (b) • B' milieu de $[AC] : \left(1, \frac{1}{2}\right)$ et $d(B, B') = \frac{\sqrt{65}}{2}$
 • C' milieu de $[AB] : \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ et $d(C, C') = \frac{\sqrt{65}}{2}$
15. (a) $AB \equiv y = 6x - 8$
 (b) $C : (0, -8)$
 (c) $d \equiv y = -8$
 (d) $d' \equiv x = 2$
 (e) $D : (2, -8)$
 (f) $d'' \equiv 6y + x + 46 = 0$
 (g) $E : (-46, 0)$
 (h) $y = 6x + 276$
 (i) $d(E, B) = 4\sqrt{145}$

16. $\mathcal{A} = 6$ 17. $x_B = 8$ et $y_A = 6$ 