

SIGNE D'UNE EXPRESSION MATHÉMATIQUE

Ce document rappelle les notions vues dans le cours de 4^{ème} concernant le signe d'une expression mathématique ainsi que la résolution d'une inéquation quelconque.

Signe d'une expression mathématique

Voici la marche à suivre pour étudier le signe d'une expression mathématique :

1. On transforme l'expression en un quotient de produit de facteurs dont le degré est, *au plus*, égal à 2 ;
2. On recherche les zéros des différents facteurs de ce quotient ;
3. On crée le tableau de signes.

Un tableau de signe comprend :

- sur la première ligne, le(s) zéro(s) ordonné(s) des différents facteurs de l'expression à étudier ;
- sur la (les) ligne(s) suivante(s) les signes pris par ces facteurs pour les différentes valeurs envisagées de la variable.

Pour cela, on utilise les règles suivantes :

- (a) Le signe d'une fonction du *premier degré* est le signe contraire du coefficient de x avant le zéro de la fonction et le signe du coefficient de x après.
- (b) Le signe d'une fonction du *second degré* sera toujours le signe du coefficient de x^2 (a) de ce trinôme sauf éventuellement entre les racines de ce trinôme (si elles existent)

Remarquons que, si un des facteurs du quotient est une expression du premier degré élevée à une puissance impaire, l'étude de son signe revient à celui d'une expression du premier degré. En facteur de puissance paire est, quant à lui, toujours positif.

Exemple :

Soit à étudier le signe de l'expression

$$E(x) = \frac{(x+1)^3(x^2-4)}{2x^3-7x^2+2x+3}$$

Reprenons la démarche développée ci-dessus :

1. La factorisation du dénominateur par la méthode des diviseurs binômes permet d'écrire l'expression sous la forme

$$E(x) = \frac{(x+1)^3(x^2-4)}{(x-1)(2x^2-5x-3)}$$

Nous avons limité notre expression à des facteurs de degré au plus égal à 2 (le facteur de degré 3 se traite ici, en réalité, comme un facteur de degré 1)

2. Les zéros des numérateurs et dénominateurs de cette expression sont :

– Numérateur :

– $x = -1$

– $x = \pm 2$

– Dénominateur :

– $x = 1$

– $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 3$

3. On crée le tableau de signes.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2	3
$(x+1)^3$	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0
$x - 1$	-	-	-	-	0	+
$2x^2 - 5x - 3$	+	+	+	0	-	-
$E(x)$	+	0	-	0	+	-

Inéquation

Voici la marche à suivre pour étudier le signe d'une expression mathématique :

1. On égal un des membres de l'inéquation à zéro (par soustraction membre à membre d'un des deux membres de l'inéquation)
2. On réduit l'expression ainsi obtenue (réduction au même dénominateur et factorisation du numérateur obtenu). Remarquons qu'il est inutile de développer le dénominateur commun puisque celui-ci est déjà factorisé.
3. On transforme l'expression en un quotient de produit de facteurs dont le degré est, *au plus*, égal à 2 ;
4. On recherche les zéros des différents facteurs de ce quotient ;
5. On crée le tableau de signes comme décrit dans la section précédente ;
6. On indique dans le tableau de signe les "zones" concernées par l'inéquation (sur base de la forme obtenue au point 3)
7. On indique clairement la solution de l'inéquation à l'aide des conventions relatives à l'écriture d'intervalles de valeurs.

Un intervalle est un ensemble de nombres réels représentés par deux nombres : le plus petit et le plus grand des nombres de l'intervalle. Ces deux nombres sont entourés de crochets orientés vers l'intérieur ou l'extérieur selon que le nombre appartient ou non à l'intervalle.

Exemples:

- l'intervalle $[1, 3]$ comprend tous les nombres réels entre 1 et 3, 1 et 3 faisant partie de l'intervalle ;
- l'intervalle $[-2, 8[$ comprend tous les nombres réels entre -2 et 8, -2 faisant partie de l'intervalle, 8 n'en faisant pas partie ;
- l'intervalle $] -\pi, \pi[$ comprend tous les nombres réels entre $-\pi$ et π , $-\pi$ et π ne faisant pas partie de l'intervalle.
- L'ensemble des nombres réels strictement positifs peu s'écrire $\mathbb{R}_0^+$ ou $]0, +\infty$

Exemple :

Soit à résoudre l'inéquation :

$$\frac{7}{x+2} + \frac{2}{1-x} \geq 6$$

Reprenons la démarche développée ci-dessus :

1. On égal un des membres de l'inéquation à zéro (par soustraction membre à membre d'un des deux membres de l'inéquation)

$$\frac{7}{x+2} + \frac{2}{1-x} - 6 \geq 0$$

2. On réduit l'expression ainsi obtenue (réduction au même dénominateur et factorisation du numérateur obtenu). Remarquons qu'il est inutile de développer le dénominateur commun puisque celui-ci est déjà factorisé.

$$\frac{6x^2 + x - 1}{(x+2)(1-x)} \geq 0$$

3. On transforme l'expression en un quotient de produit de facteurs dont le degré est, **au plus**, égal à 2. La réduction au même dénominateur a déjà apporté de tels facteurs.
4. On recherche les zéros des différents facteurs de ce quotient ;
5. Numérateur :
 - $x = -\frac{1}{2}$
 - $x = \frac{1}{3}$
6. Dénominateur :
 - $x = 1$
 - $x = -2$
7. On crée le tableau de signes comme décrit dans la section précédente ;

x	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1
$6x^2 + x - 1$	+	+	0	-
$x + 2$	-	0	+	+
$1 - x$	+	+	+	+
$ln(x)$	-	$\nexists$	+	0
	X	O	O	X

8. On indique dans le tableau de signe les "zones" concernées par l'inéquation (sur base de la forme obtenue au point 3) (voir le tableau de signe).
9. On indique clairement la solution de l'inéquation à l'aide des conventions relatives à l'écriture d'intervalles de valeurs.

$$S : \left] -2, \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1 \right[$$