☐ = contraintes placées en 1ère

Analyse combinatoire : Solutions

Exercices de base

1. Pour chacune des situations suivantes, répondre aux questions suivantes :
   (a) Combien d'éléments a-t-on au total ?
   (b) Combien d'éléments choisit-on ?
   (c) Les éléments choisis peuvent-ils être choisis plusieurs fois ?
   (d) L'ordre dans lequel on choisit les éléments a-t-il de l'importance ?

   On ne demande pas de résoudre les problèmes de dénombrement.

   (a) i. Tu possèdes un cadenas avec 5 roulettes. Chaque roulette porte les numéros 0 à 9. Combien de codes secrets possibles propose-t-il ?
       ii. Si je sais que ton code ne comporte que des chiffres différents, combien de possibilités reste-t-il ?
   (b) Scrabble : on choisit 7 lettres et on obtient les lettres L, A, B, C, T, E et U. Pour trouver un mot, tu décides d'essayer toutes les possibilités.
       i. Combien existe-t-il de possibilités ?
       ii. Si maintenant on cherche un mot commençant par la lettre L ?
       iii. Si on cherche un mot commençant et finissant par une consonne ?
   (c) Coupe d'Europe de football : Il y a 27 équipes différentes. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres équipes une seule fois. Combien de matchs doit-on organiser ?
   (d) Cinq amis veulent s'asseoir à un bar devant lequel se trouvent cinq tabourets alignés. De combien de manières peuvent-ils s'installer ?
   (e) Sachant qu'en Belgique les numéros de GSM commencent par 04 suivis de 8 chiffres entre 0 et 9 :
       i. Combien peut-on former de numéros de téléphone ?
       ii. Combien peut-on former de numéros sans le chiffre 5 ?
       iii. Combien peut-on former de numéros se terminant par le chiffre 5 ?
   (f) Dans un concours de "Miss", les demi-finalistes sont les candidates A,B,C,D et E. Seules 3 d'entre elles iront en finale.
       i. Combien de "trios de finalistes" différents existe-t-il ?
       ii. Parmi les 5 candidates, une finaliste recevra le 1er prix (la médaille d'or), une autre le 2ème prix (la médaille d'argent) et une dernière le 3ème prix (la médaille de bronze). Combien y a-t-il de classements possibles ?

		Combien d'éléments ?	Combien d'él. choisis ?	Répétitions ?	Ordre ?
(a)	i	10	5	oui	oui
	ii	10	5	non	oui
(b)	i	7	7	non	oui
	ii	6	6	non	oui
	iii	7	7	non	oui
(c)		27	2	non	non
(d)		5	5	non	oui
(e)	i	10	8	oui	oui
	ii	9	8	oui	oui
	iii	10	7	oui	oui
(f)	i	5	3	non	non
	ii	5	3	non	oui

2. (a) Tu as 2 pantalons et 3 pulls dans ta garde-robe. De combien de manières peux-tu t'habiller ?

$2 \cdot 3 = 6$

choix de pantalon

choix de pull

(b) Si, en plus des 2 pantalons et 3 pulls, tu as 2 paires de chaussures, de combien de manières peux-tu t'habiller ?

$\underset{\text{pantalons}}{2} \cdot \underset{\text{pulls}}{3} \cdot \underset{\text{chaussures}}{2} = 12$

(c) Si maintenant tu achètes 4 shorts (en plus de tes 2 pantalons, tes 3 pulls et tes 2 paires de chaussures), de combien de tenues différentes disposes-tu ?

ou

$\underset{\text{pant.}}{2} \cdot \underset{\text{pulls}}{3} \cdot \underset{\text{chauss}}{2} + \underset{\text{short}}{4} \cdot \underset{\text{pulls}}{3} \cdot \underset{\text{chauss}}{2} = 36$

3. On doit former un comité de trois personnes comprenant un représentant de chacune des catégories direction, personnel et consommateurs. Il y a trois représentants possibles parmi le personnel, deux parmi les membres de la direction et quatre parmi les consommateurs. Combien de comités peut-on former ?

$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

4. La carte d'un restaurant propose 10 hors-d'oeuvre, 4 entrées, 11 plats de viande et 9 desserts. Abstraction faite de considérations culinaires, combien peut-on composer de menus contenant dans cet ordre un hors-d'oeuvre, une entrée, un plat de viande et un dessert ?

$10 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 9 = 3960$

5. Il existe 6 chemins possibles allant de A à B et 4 chemins allant de B à C. De combien de façons peut-on :

(a) aller de A à C en passant par B ?

$6 \cdot 4 = 24$

A → B B → C

(b) aller et revenir de A à C en passant par B ?

$6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$

A → B B → C C → B B → A

(c) aller et revenir de A à C en passant par B et en ne passant qu'une seule fois par le même chemin ?

$6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 360$

Permutations et arrangements

1. Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former avec les chiffres de 0 à 9 :

(a) si les répétitions sont autorisées ?

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ (1000 → 9999)

pas 0

(b) si les répétitions sont interdites ?

$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

pas 0 pas le 1er chiffre

(c) si les répétitions sont interdites et le dernier chiffre doit être 0 ?

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \boxed{1} = 504$

pas 0

0

2. Combien de nombres de 5 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 0 à 9 :

(a) si les nombres doivent être impairs ?

$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \boxed{5} = 13440$

pas 0 et le dernier

chiffre impair

(b) si les deux premiers chiffres de chaque nombre doivent être pairs ?

$\boxed{4} \cdot \boxed{4} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 5376$

pas 0 et pair

pair et pas le 1ère

3. 7 personnes prennent place sur un banc.

(a) De combien de manières différentes peuvent-elles se disposer ?

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$

la 1ère personne a 7 places possibles

(b) De combien de manières différentes peuvent-elles se disposer, si deux personnes déterminées doivent occuper les deux extrémités du banc ?

$2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \cdot 5! = 240$

place d'une des personnes choisies

4. Un représentant s'apprête à visiter cinq de ses clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visites :

   (a) s'il les fait toutes le même jour ?

   $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

   1er client

   (b) s'il en fait trois un jour et deux le lendemain ?

   $\underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}_{\text{jour 1}} \mid \cdot \underbrace{2 \cdot 1}_{\text{jour 2}} = 5! = 120$

5. On place au hasard les 12 tomes d'une encyclopédie sur un rayon d'une bibliothèque.

   (a) Combien de classements différents existe-t-il ?

   $12! = 479\,001\,600$

   ↳ permutations de 12 livres

   (b) Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre ?

   $11! = 39\,916\,800$

   ↳ les tomes 1 et 2 ne forment qu'un livre

   → 11 objets

   (c) Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

   $11! \; 2! = 79\,833\,600$

   cf (b)

   les tomes 1 et 2 peuvent être permutés

6. De combien de façons différentes peut-on aligner 10 billes

(a) si elles sont toutes de couleur différente ?

$10! = 3628800$

permutations de 10 billes

(b) s'il y a 5 billes rouges, 2 billes blanches et 3 billes bleues ?

$$\frac{10!}{5!\,2!\,3!} = 2520$$

les permutations de billes rouges (blanches / bleues) ne changent rien

7. (a) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MISSISSIPPI ?

$$\frac{11!}{4!\,4!\,2!} = 34650$$

→ cf 6

permutations des S

I

P

(b) Parmi ces anagrammes, combien commencent et se terminent par la lettre S ?

1e S

2e S

$$\frac{\boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot 9!}{\underbrace{4!\,4!\,2!}_{\text{cf (a)}}} = 3780$$

8. De combien de manières peut-on placer 3 romans, 2 livres de mathématiques et 1 de chimie sur une étagère si :

(a) aucune restriction n'est mise ;

$6! = 720$

↳ permutation de 6 livres

(b) les livres de mathématiques doivent être rangés ensemble et les romans aussi ;

$$\underbrace{3!}_{\text{permutation de 3 gps (math, roman, chim)}} \cdot \underbrace{3!}_{\text{perm. romans}} \cdot \underbrace{2!}_{\text{perm. math}} = 72$$

(c) seuls les romans doivent être rangés ensemble ?

$$\underbrace{4!}_{\text{4 gps (roman +...)}} \cdot \underbrace{3!}_{\text{permutation des romans}} = 144$$

9. De combien de manières peut-on colorier une carte représentant 3 pays avec des couleurs différentes choisies parmi 7 tons différents ?

$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \qquad (= A_7^3)$

10. Cinq prix doivent être décernés à des étudiants choisis dans une classe de 30 personnes. Combien de résultats peut-on avoir si :

(a) le cumul des prix est admis ;

$$\underbrace{30}_{1^{er}\text{ prix}} \cdot \underbrace{30}_{2^{ème}\text{ prix}} \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 = 30^5 = 24300000 \qquad (= B_{30}^5)$$

....

(b) le cumul des prix n'est pas possible ?

$30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 17100720 \qquad (= A_{30}^5)$

11. (a) Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de mots de 5 lettres ? (Les mots n'ont pas nécessairement de signification !)

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^5 = 11881376$ $\left(= B_{26}^{5}\right)$

1ère lettre 2ème lettre ...

(b) Même question mais en se limitant aux mots formés de 5 lettres différentes ?

$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7893600$ $\left(= A_{26}^{5}\right)$

12. (a) Cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de huit places. Combien y a-t-il de possibilités ?

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ $\left(= A_{8}^{5}\right)$

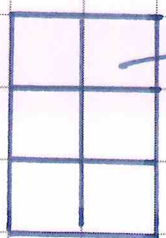
1ère pers 2ème pers. ...

(b) Même question, mais avec huit personnes.

$8! = 40320$

permutation de 8 personnes

13. Dans l'alphabet Braille, chaque lettre ou signe est représenté par 6 points disposés en un tableau de 3 lignes et 2 colonnes, certains étant en relief. Combien de signes distincts peut-on composer ?



→ soit un point soit rien

$2^6 = 64$ $\left(= B_{6}^{6}\right)$

14. (a) Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de 8 étages. Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec 5 occupants. De combien de manières ces 5 occupants peuvent-ils choisir les étages auxquels ils vont se rendre ?

* voir verso

(b) Même question dans le cas où à chaque étage un occupant au plus quitte l'ascenseur.

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ $\left(= A_8^5\right)$

15. On considère le mot FRAGMENTS. Combien de mots peut-on former :

(a) en prenant toutes les lettres (sans répétition) ?

$9! = 362880$ $\left(= P_9\right)$

(b) en prenant 8 lettres (sans répétition) ?

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 9! = 362880$

$\left(= A_9^8 = P_9\right)$

(c) en prenant 2 lettres (sans répétition) ?

$9 \cdot 8 = 72$ $\left(= A_9^2\right)$

Combinaisons

1. Dans une assemblée composée de 25 dames et 15 messieurs, il est décidé de nommer un comité de 5 personnes.

(a) Combien de comités peut-on envisager ?

$\frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5!} = 658008$ $\left(= C_{40}^5\right)$

si l'on permute les 5 personnes, le comité reste le même.

(b) Combien de ces comités comprennent exactement 3 dames ?

femmes → $\dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} \cdot \dfrac{15 \cdot 14}{2!} = 241500$ ← hommes $\left(= C_{25}^{3}\, C_{15}^{2}\right)$

permutation des 3 dames

permutation des 2 hommes

(c) Combien de ces comités comprennent au moins 3 dames ?

$\underbrace{C_{25}^{3} \cdot C_{15}^{2}}_{\text{3 dames et 2 hommes}} + \underbrace{C_{25}^{4}\, C_{15}^{1}}_{\text{4 dames et 1 homme}} + \underbrace{C_{25}^{5}}_{\text{5 dames}} = 484380 \leftarrow \neq (b)$

ou ou

2. 12 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il de poignées de mains ?

$\dfrac{12 \cdot 11}{2!} = 66$ $\left(= C_{12}^{2}\right)$

si A sert la main de B ou B celle de A, c'est la même poignée

3. On tire 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Combien y a-t-il de mains :

(a) au total ?

$\dfrac{36 \cdot 35 \cdot 34}{3!} = 7140$ $\left(= C_{36}^{3}\right)$

↳ l'ordre des cartes ne change pas la main

(b) formées de trois as ?

$\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$ $\left(= C_{4}^{3}\right)$

↳ l'ordre des as ne change pas la main

(c) formées d'un roi et de deux as ?

$\underbrace{C_4^1}_{\text{as}}\ \underbrace{C_4^2}_{\text{roi}} = 24$ ou $\underbrace{\frac{4}{1!}}_{\text{as}} \cdot \underbrace{\frac{4.3}{2!}}_{\text{roi}}$

(d) ne contenant aucun as ?

$C_{32}^3 = 4960$

(e) contenant au moins un as ?

$\underbrace{C_4^1}_{1\text{ as}}\ \underbrace{C_{32}^2}_{2\text{ autres}} + \underbrace{C_4^2}_{2\text{ as}}\ \underbrace{C_{32}^1}_{1\text{ autre}} + \underbrace{C_4^3}_{3\text{ as}} = 2180$

ou (plus simple) : $\underbrace{C_{36}^3}_{\text{total}} - \underbrace{C_{32}^3}_{\text{aucun as}} = 2180$

(f) contenant exactement un as ?

$C_4^1\ C_{32}^2 = 1984$

4. Douze joueurs d'échecs participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun des autres joueurs. Combien y a-t-il de parties jouées dans ce tournoi ?

$\frac{12.11}{2!} = 66$ (cf exo 2)

5. Une femme a 13 amies. Elle désire en inviter 7 à un souper.

(a) Combien de choix a-t-elle ?

$$\frac{13.12.11.10.9.8.7}{7!} = 1716 \qquad \left(= C_{13}^{7}\right)$$

(b) Combien de choix a-t-elle si deux de ses amies se boudent et ne peuvent venir ensemble ?

$$C_{13}^{7} - C_{11}^{5} = 1254$$

total   nbre de réunion où les deux sont là (cf exo 3(e))

6. Un questionnaire comprend 8 questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Combien peut-on donner de réponses différentes avec 4 oui et 4 non ?

permut. desordre

$$\frac{8!}{4!\,4!} = 70$$

permutations des oui   permutations des non

7. Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'un examen écrit.

(a) Combien de choix peut-il faire ?

$$\frac{10.9.8.7.6.5.4.3}{8!} = 45 \qquad \left(= C_{10}^{8}\right)$$

l'ordre dans lequel il répond aux questions ne change rien

(b) Même question en supposant qu'il doive obligatoirement résoudre les trois premiers problèmes ?

$$C_{3}^{3} \cdot C_{7}^{5} = 21$$

3 premiers problèmes   il doit en résoudre encore 5 parmi les 7 restants

(c) Même question en supposant qu'il doive obligatoirement résoudre exactement quatre des cinq premiers problèmes ?

$\underbrace{C_5^4}_{\text{premiers problèmes}} \cdot C_5^4 = 24$

Exercices mélangés

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. Déterminer le nombre de tirages différents si l'on tire 3 boules :

   (a) simultanément ;

   $\frac{12.11.10}{3!} = 220 \qquad (= C_{12}^3)$

   simultané = ordre n'a pas d'importance

   (b) successivement et sans remettre dans l'urne celles qui ont déjà été tirées ;

   $12.11.10 = 1320 \qquad (= A_{12}^3)$

   successif = ordre a de l'importance

   (c) successivement et après chaque tirage on remet la boule dans l'urne.

   $12.12.12 = 12^3 = 1728 \qquad (= B_{12}^3)$

   remise + ordre

2. (a) Dans une société de 25 personnes, on doit en désigner 4 qui formeront le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ?

   $\frac{25.24.23.22}{4!} = 12650 \qquad (= C_{25}^4)$

   l'ordre des membres ne change pas le comité

(b) Dans une société de 25 personnes, on doit désigner un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire ; ces 4 personnes constituent le comité. Combien de comités différents peut-on ainsi former ?

$25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$ $\quad (= A_{25}^{4})$

poste précis = ordre important
(A président ≠ A trésorier)

3. On a un lot de 6 pièces dont 3 sont bonnes et 3 défectueuses.

(a) Combien d'échantillons de 3 pièces peut-on former ?

$\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$ $\quad (= C_6^3)$

↳ l'ordre des pièces n'importe pas

(b) Combien, parmi ces échantillons, contiennent 3 pièces bonnes ?

1 $\quad (= C_3^3)$

il n'y a qu'un échantillon contenant les bonnes pièces

(c) Combien contiennent au moins une pièce bonne ?

$C_6^3 - C_3^3 = 19$

total — échantillon contenant les 3 mauvaises

4. Une association comprenant 20 membres, 12 hommes et 8 femmes, désire former un comité de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes. Trouver de combien de manières l'on peut former ce comité dans chacun des cas suivants :

(a) chaque membre de l'association accepte de faire partie de ce comité ;

comité → ordre n'a pas d'importance $(\to C)$

$\underbrace{C_{12}^3 C_8^2}_{3H,\,2F} + \underbrace{C_{12}^2 C_8^3}_{2H,\,3F} = 9856$

(b) deux des hommes refusent d'en faire partie ;

$$\underbrace{C_{10}^{3}\, C_{8}^{2}}_{3H,\,2F} + \underbrace{C_{10}^{2}\, C_{8}^{3}}_{2H,\,3F} = 5880$$

2 H en moins

(c) M. Pahud et Mme Sandoz refusent de siéger ensemble.

$$\underbrace{\left[C_{12}^{3}\, C_{8}^{2} + C_{12}^{2}\, C_{8}^{3}\right]}_{\text{total (cf (a))}} - \underbrace{\left[\underbrace{C_{11}^{2}}_{\text{m. pe compté}}\, \underbrace{C_{7}^{1}}_{\text{mme se compté}} + C_{11}^{1}\, C_{7}^{2}\right]}_{\text{cas-là où les 2 sont présents}} = 9240$$

5. (a) Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former avec les 6 chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9 ?

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ $\qquad (= B_6^3)$

(b) Parmi ceux-ci, combien sont inférieurs à 400 ?

$\boxed{2} \cdot 6 \cdot 6 = 72$

nbres inf à 400 → commencent par 2 ou 3

(c) Parmi ceux-ci, combien sont pairs ?

$6 \cdot 6 \cdot \boxed{2} = 72$

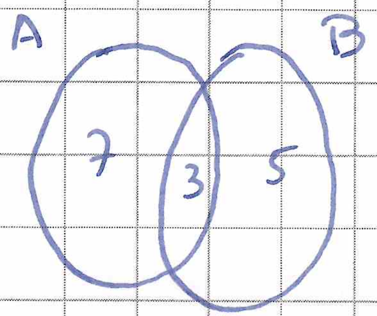
nbres pairs → se terminent par 2 ou 6

(d) Parmi ceux-ci, combien sont multiples de 5 ?

$6 \cdot 6 \cdot \boxed{1} = 36$

se termine par 5

6. Dans un groupe de 20 personnes, 10 lisent au moins la revue A, 8 lisent au moins la revue B et 3 lisent les 2 revues. Combien d'échantillons différents peut-on choisir si l'échantillon doit être formé :



5

→ il n'y a que 15 lecteurs !

(a) de cinq personnes lisant au moins une revue ?

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5!} = 3003 \qquad (= C_{15}^{5})$$

(b) de trois personnes lisant la revue A, et de deux personnes lisant la revue B, chacune d'entre elles ne lisant qu'une seule revue ?

$$\underbrace{C_7^3}_{A} \cdot \underbrace{C_5^2}_{B} = 350$$

(c) de cinq personnes, dont trois au moins lisent la revue A ?

$$C_{\cancel{10}\,7}^{3}\, C_{\cancel{10}\,5}^{2} + C_{\cancel{10}\,7}^{4}\, C_{\cancel{10}\,5}^{1} + C_{\cancel{10}\,7}^{5} = \cancel{2352}\ 546$$

lecteurs de A

autres (B ou rien)

7. Combien peut-on former d'anagrammes des mots "*ATROCE*" et "*COMMENCEMENT*" ?

ATROCE $\rightarrow$ $6! = 720$ (permutation de 6 lettres)

COMMENCEMENT $\rightarrow$ $\dfrac{12!}{\underbrace{2!}_{\text{"C"}}\,\underbrace{3!}_{\text{"E"}}\,\underbrace{3!}_{\text{"M"}}\,\underbrace{2!}_{\text{"N"}}} = 3326400$

perm

8. Combien peut-on former de mots de

(a) 5 lettres ?

$26^5 = 11881376$ $\left(= B_{26}^{5} \right)$

(b) 5 lettres distinctes ?

$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7893600$ $\left(= A_{26}^{5} \right)$

(c) 5 lettres commençant par z ?

$\underset{z}{\boxed{1}} \cdot 26^4 = 456976$

(d) 5 lettres distinctes se terminant par r et c ?

$A_{24}^{3} \cdot \underset{rc \text{ ou } cr}{\boxed{2}} = 24288$

(e) 5 lettres distinctes se terminant par r ou c ?

$A_{25}^{4} \cdot \underbrace{\boxed{2}}_{r/c} = 607200$

(f) 5 lettres distinctes où les lettres a, b et c sont groupées dans l'ordre alphabétique ?

$23 \cdot 22 \cdot \boxed{3} = 1518$

abc_ _ ou _abc_ ou _ _abc

(g) 5 lettres distinctes où les lettres a, b et c sont groupées dans un ordre quelconque ?

$\underbrace{23 \cdot 22 \cdot \boxed{3}}_{cf\ (f)} \cdot \underbrace{3!}_{\text{permutation des lettres abc dans le groupe}} = 9108$

Triangle de Pascal et binôme de Newton

1. Si 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 est une ligne du triangle de Pascal, déterminer les nombres de la ligne suivante.

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

2. Développer

(a) $(x+y)^5$ $= x^5 + C_5^1 x^4(+y) + C_5^2 x^3(+y)^2 + \dots$

$\dots + C_5^3 x^2(+y)^3 + C_5^4 x(+y)^4 + (+y)^5$

$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

(b) $(2a-3b)^4$ $= (2a)^4 + C_4^1 (2a)^3(-3b) + C_4^2 (2a)^2(-3b)^2 \dots$

$+ C_4^3 (2a)(-3b)^3 + (-3b)^4$

$= 16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$

(c) $\left(x+\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)^6$ $= x^6 + C_6^1 x^5\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right) + C_6^2 x^4\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2$

$+ C_6^3 x^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^6$

$= x^6 + 3\sqrt{2}x^4 + \frac{15}{2}x^2 + 5\sqrt{2} + \dots$

$\dots \frac{15}{4x^2} + \frac{3\sqrt{2}}{4x^4} + \frac{1}{8x^6}$

(d) $\left(\frac{a}{2}-\sqrt{a}\right)^4 = \frac{a^4}{16} - \frac{a^3\sqrt{a}}{2} + \frac{3}{2}a^3 - 2a^2\sqrt{a} + a^2$

3. Déterminer le $i^{\text{ème}}$ terme du développement de

(a) $\left(5x - \frac{y}{2}\right)^8$ si i=6

T.G. : $C_8^k \, (5x)^{8-k} \left(-\frac{y}{2}\right)^k$

6^e terme $\rightarrow k=5 \longrightarrow C_8^5 \,(5x)^3 \left(-\frac{y}{2}\right)^5$

$= -\frac{875}{4} x^3 y^5$

(b) $\left(\frac{1}{2a} + a\sqrt{2}\right)^{12}$ si i=5

T.G. : $C_{12}^k \left(\frac{1}{2a}\right)^{12-k} (\sqrt{2}\,a)^k$

5^e terme $\rightarrow k=4 \rightarrow C_{12}^4 \left(\frac{1}{2a}\right)^8 (\sqrt{2}\,a)^4$

$= \frac{495}{64a^4}$

4. Déterminer :

(a) Le terme en x^6 du développement de $(3x^2-2)^{10}$

T.G. : $C_{10}^k \,(3x^2)^{10-k} (-2)^k$

$= C_{10}^k \, 3^{10-k} \, x^{2(10-k)} (-2)^k$

$20 - 2k = 6 \iff k = 7$

$\Rightarrow C_{10}^7 \, 3^3 \, x^6 \, (-2)^7 = -414720\, x^6$

(b) Le terme en x^3 du développement de $\left(4x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{15}$

T.G. : $C_{15}^k \,(4x^2)^{15-k} \left(-\frac{1}{2x}\right)^k = C_{15}^k \, 4^{15-k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k x^{30-2k} x^{-k}$

$30 - 3k = 3 \iff k = 9$

$\Rightarrow C_{15}^9 \, 4^6 \left(-\frac{1}{2}\right)^9 x^3 = -40040\, x^3$

5. Calculer le terme en x^5 dans le développement de $\left(2x+\frac{4}{x^2}\right)^{17}$.

T.G. : $C_{17}^{k}\,(2x)^{17-k}\left(\frac{4}{x^2}\right)^{k}$

$= C_{17}^{k}\; 2^{17-k}\; x^{17-k}\; 4^{k}\; x^{-2k}$

$17-3k=5 \iff k=4$

$\Rightarrow C_{17}^{4}\; 2^{13}\; x^{5}\; 4^{4} = 4991221760\; x^{5}$