Nombres complexes : Solutions

Nombres complexes

1. Simplifier et réduire les expressions suivantes :

   (a) $(2+3i)+(1+2i)$

   $= 3+5i$

   (b) $(2i+3)+(-5i+1)-(3-2i)$

   $= 1 - i$

   (c) $(4+3i)(3+4i)$

   $= 12 - 12 + 9i + 16i$

   $= 25i$

(d) $(2-3i)^2$

$= 4 - 12i - 9$

$= -5 - 12i$

(e) $(\sqrt{3}-i)^3$

$= \cancel{3\sqrt{3}} - 9i + \cancel{3\sqrt{3}}\, i^2 - (i^3)$

$= -9i - i\,(i^2)$

$= -8i$

(f) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{3+2\sqrt{3}i-1}{3+1}$

$= \dfrac{4+2\sqrt{3}i}{4}$

$= \dfrac{2+\sqrt{3}i}{2}$

(g) $\dfrac{4-i}{2-i}+\dfrac{4+i}{2+i}$

$$= \frac{(4-i)(2+i)+(4+i)(2-i)}{4+1}$$

$$= \frac{8+2i+1+8-2i+1}{5}$$

$$= \frac{18}{5}$$

(h) $\dfrac{z^2+z+1}{z^2-z+1}$ si $z=2-i$

$$z^2 = (2-i)^2 = 4-1-4i = 3-4i$$

$$\frac{3-4i+2-i+1}{3-4i-2+i+1} = \frac{6-5i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i}$$

$$= \frac{12+15+8i}{4+9}$$

$$= \frac{27+8i}{13}$$

2. Calculer les racines carrées de z si

(a) $z = -i$

? $x+iy$ / $(x+iy)^2 = -i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y = -\frac{1}{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \quad (*) \\ (2) \end{cases}$$

$(*)$ $4x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$

Les racines de z sont $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

(b) $z = -8 - 6i$

? $x+iy$ $\{$ $(x+iy)^2 = -8-6i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{9}{x^2} = -8 \quad (*) \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases}$$

$(*)$ $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

$\Delta = 64 + 36 = 100$

$$x_{1,2}^2 = \frac{-8 \pm 10}{2} \left< \begin{array}{l} 1 \\ -9 \quad \text{A.R.} \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$ $x = \pm 1$ et $y = \mp 3$

Les racines de z sont $\pm 1 \mp 3i$

(c) $z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2xy = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{1}{16x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; (*) \\ y = -\frac{1}{4x} \end{cases}$$

$(*)$ $16x^4 - \frac{\sqrt{3}}{2} 16x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 16x^4 - 8\sqrt{3}\, x^2 - 1 = 0$

$\Delta = 192 + 64 = 256$

$x_{1,2}^2 = \frac{8\sqrt{3} \pm 16}{32}$ $\left\langle \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}+2}{4} \\ \frac{\sqrt{3}-2}{4} \quad \text{AR} \end{array} \right.$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$

$\Rightarrow y_{1,2} = \mp \frac{1}{2\cancel{4}\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\cancel{2}}}$

$= \mp \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\,(\sqrt{3}-2)}{2(3-4)}$

$= \pm \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\,(\sqrt{3}-2)}{2}$

Les racines de z sont $\pm \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}\left(1+(\sqrt{3}-2)i\right)$

3. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$

(a) $x^2 + 2x + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} \left\langle \begin{matrix} -1+i \\ -1-i \end{matrix} \right.$$

(b) $ix^2 - (5i+2)x + 5(i+1) = 0$

$\Delta = (5i+2)^2 - 20i(i+1)$

$= 25i^2 + 4 + \cancel{20i} - 20i^2 - \cancel{20i}$

$= -1$

$x_{1,2} = \dfrac{5i+2 \pm i}{2i}$

$\dfrac{6i+2}{2i} = \dfrac{-6i^2 - 2i}{2} = 3 - i$

$\dfrac{4i+2}{2i} = 2 - i$

(c) $(-3+i)x^2 + (5i-1)x = -2$

$$\Delta = (5i-1)^2 - 8(-3+i)$$
$$= 25i^2 + 1 - 10i + 24 - 8i$$
$$= -18i$$

Les racines de $-18i$ sont $\pm(3-3i)$ (cf exo 2)

$$x_{1,2} = \frac{-(5i-1) \pm (3-3i)}{2(i-3)} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-8i+4}{2i-6} \\[2ex] \dfrac{-2i-2}{2i-6} \end{array} \right.$$

$$x_1 = \frac{(2-4i)(i+3)}{-1-9} = i-1$$

$$x_2 = \frac{-(i+1)(i+3)}{-1-9} = \frac{1+2i}{5}$$

(d) $x^2 - 2(i+1) + (i-1)x = 0$

$\Delta = (i-1)^2 + 8(i+1)$

$= i^2 - 2i + 1 + 8i + 8$

$= 8 + 6i$

Les racines de $8+6i$ sont $\pm(3+i)$

$x_{1,2} = \dfrac{-i+1 \pm (3+i)}{2}$ $\left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \dfrac{-2-2i}{2} = -1-i \end{array} \right.$

(e) $(2i+1)z + z^2 + 2i = 0$

$$\Delta = (2i+1)^2 - 8i$$
$$= 4i^2 + 4i + 1 - 8i$$
$$= -3 - 4i$$

Les racines de $-3-4i$ sont $\pm(1-2i)$

$$z_1 = \frac{-(2i+1) \pm (1-2i)}{2}$$

$-2i$

-1

(f) $2x^2 - 7x + 5 = 5i$

$\Delta = 49 - 8(5-5i)$

$= 9 + 40i$

Les racines de $9+40i$ sont $\pm(5+4i)$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm (5+4i)}{4} \begin{cases} 3+i \\ \dfrac{1-2i}{2} \end{cases}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$

(a) $2z + i\bar{z} = 9$

$\Leftrightarrow 2(x+iy) + i(x-iy) = 9$

$\Leftrightarrow (2x+y) + i(x+2y) = 9$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 9 \\ x+2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = 9 \\ x = -2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 6 \end{cases}$

$S : \{ 6 - 3i \}$

(b) $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 1 - 7i \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6z_1 + 2z_2 = 2 - 14i & (1) \\ iz_1 + 2z_2 = 11i & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Leftrightarrow (6 - i)\, z_1 = 2 - 25i$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{2 - 25i}{6 - i} \cdot \frac{6 + i}{6 + i}$$

$$= \frac{12 + 25 + 2i - 150i}{37}$$

$$= \frac{37 - 148i}{37}$$

$$= 1 - 4i$$

Dans l'eq (1) originale : $z_2 = 1 - 7i - 3(1 - 4i)$

$$= -2 + 5i$$

$$S : \{(1 - 4i, -2 + 5i)\}$$

5. On donne $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$

(a) Montrer que $P(z)$ admet une racine réelle que l'on déterminera ;

$P(a) = 0 \iff a^3 + 9ia^2 + 12ai - 22a - 12i - 36 = 0$

$\begin{cases} a^3 - 22a - 36 = 0 \\ 9a^2 + 12a - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1) \\ 3a^2 + 4a - 4 = 0 \end{cases}$

↳ $\Delta = 16 + 48 = 64$

$a_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 8}{6} \left\langle \begin{array}{l} -2 \\ \frac{2}{3} \end{array} \right.$

$a = -2$ dans (1) : $-8 + 44 - 36 = 0$ ok

$a = \frac{2}{3}$ dans (1) : $\frac{8}{27} - \frac{44}{3} - 36 \neq 0$ $\Rightarrow a = -2$

(b) Factoriser $P(z)$.

	1	$9i$	$12i - 22$	$-12i - 36$
-2		-2	$-18i + 4$	$36 + 12i$
	1	$-2 + 9i$	$-6i - 18$	0

$P(z) = (z + 2)\left(z^2 + (9i - 2)z - 6i - 18\right)$
↳ (*)

(*) $\Delta = (9i - 2)^2 + 24i + 72$
$= -81 + 4 - 36i + 24i + 72$
$= -5 - 12i$

Les racines de Δ sont $\pm(2 - 3i)$

$z_{1,2} = \dfrac{2 - 9i \pm (2 - 3i)}{2} \left\langle \begin{array}{l} 2 - 6i \\ -3i \end{array} \right.$

$P(z) = (z + 2)(z + 3i)(z - 2 + 6i)$