6. Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique et les placer dans le plan de Gauss.

(a) $z = 1 + i$

$\rho = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (QI) (rouge)

(b) $z = \sqrt{3} - 3i$

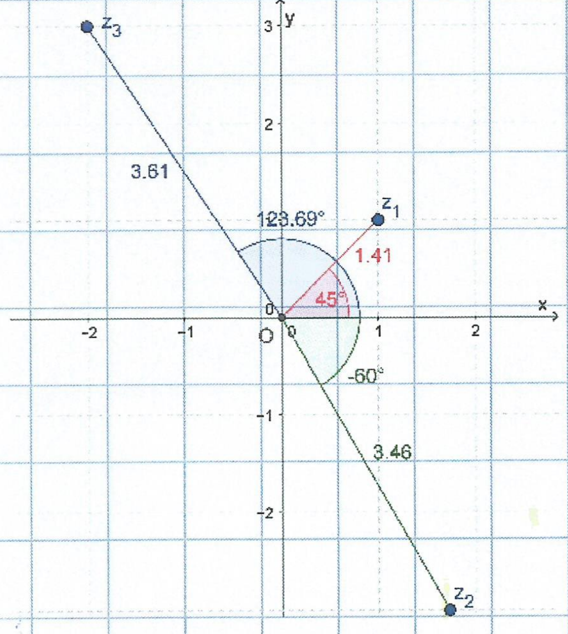
$\rho = 2\sqrt{3}$

$\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ (QIV) (vert)

(c) $z = 3i - 2$

$\rho = \sqrt{3}$

$\theta = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) = 2{,}159$ (QII) (bleu)



7. Calculer, en utilisant la formule de de Moivre, le module et l'argument de

(a) $z = (1+i)(\sqrt{3}-i)$

$z_1 = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $z_2 = 2 \text{ cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$z = z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{12}$

(b) $z = -\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

$z = z_1 \cdot \frac{z_2}{z_3}$ $\qquad$ $z_1 = 1 \text{ cis } (+\pi)$

$z_2 = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4}$

$z_3 = 2 \text{ cis } \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cis}\left(\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cis } \frac{11\pi}{12}$

(c) $z = \dfrac{(1-i)^3}{4(i+1)^4}$

$$z = \frac{z_1^3}{z_2\, z_3^4}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = 4\ \text{cis}\ 0$$

$$z_3 = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{8}}{16}\ \text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4} - 0 - \frac{4\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ \text{cis}\ -\frac{7\pi}{4}$$

(d) z^{20} si $z = \dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

$z_1 :\ \rho_1 = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2+1}$

$z_2 :\ \rho_2 = \rho_1$

$\theta_1 = \arctan \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{8}$

$\theta_2 = -\dfrac{\pi}{8}$

$$\Rightarrow z = \text{cis}\ \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow z^{20} = \text{cis}\ \frac{20\pi}{4}$$

$$= -1$$

8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ et représenter les solutions dans le plan de Gauss.

(a) $z^2 = i - 1$

$i - 1 \xrightarrow{F.T.} \rho = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan -1 = \frac{3\pi}{4} \quad (Q_{II})$

$\Rightarrow z^2 = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right)$

$= \sqrt[4]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right)$

(b) $z^4 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$

$$\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{F.T.} \rho = 1$$

$$\theta = \arctan -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3} \quad (Q_{IV})$$

$$\Rightarrow z^4 = cis\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow z = cis\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)$$

(c) $z^3 = -6\sqrt{3}(1+i)$

$$-6\sqrt{3}\,(1+i) \xrightarrow{FT} \begin{cases} \rho = 6\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{6} \\ \theta = \arctan 1 = \dfrac{5\pi}{4} \quad (Q_{III}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad z^3 = 6\sqrt{6}\ \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$= \sqrt{6^3}\ \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \sqrt[3]{\sqrt{6^3}}\ \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{6^3}}\ \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{6}\ \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

9. ***Exercices "exotiques"***

(a) Soit $z = x + iy$ et $z' = \frac{z-i}{z+1}$. Trouver le lieu des points z tel que z' est réel.

$$z' = \frac{x+iy-i}{x+iy+1} \iff z' = \frac{x+i(y-1)}{(x+1)+iy} \cdot \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy}$$

$$\iff z' = \frac{\left[x(x+1)+y(y-1)\right]+i\left[(x+1)(y-1)-xy\right]}{(x+1)^2+y^2}$$

z' est réel si sa partie imaginaire est nulle

$$\iff (x+1)(y-1)-xy=0$$

$$\iff \cancel{xy}-x+y-1-\cancel{xy}=0$$

$$\iff y = x+1 \rightarrow \text{c'est une droite}$$

(b) Résoudre $z^6 + (1-2i)z^3 - 2i = 0$

- On pose $y = z^3 \Longrightarrow y^2 + (1-2i)y - 2i = 0$

$$\Delta = (1-2i)^2 + 8i$$
$$= 1 - 4i + 4i^2 + 8i$$
$$= 1 + 4i + 4i^2$$
$$= (1+2i)^2$$

ou $= -3+4i$ et extraction de racine carrée

$$\Longrightarrow y_{1,2} = \frac{-1+2i \pm (1+2i)}{2} \quad \begin{cases} 2i \\ -1 \end{cases}$$

- $z_1^3 = 2i = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$$\Longleftrightarrow z_1 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

- $z_2^3 = -1 = \operatorname{cis}(\pi + 2k\pi)$

$$\Longleftrightarrow z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

(c) Calculer le module et l'argument de $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ et $z_1.z_2$. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$

$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

$z_2 = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$z_1 . z_2 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Or $z_1 z_2 = (1+i)(\sqrt{3} - i)$

$= (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

Pour trouver $\cos \frac{\pi}{12}$, on égale les parties réelles

$2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} + 1 \iff \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\iff \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$