

Nombres complexes : Solutions

Nombres complexes

1. Simplifier et réduire les expressions suivantes :

(a) $(2 + 3i) + (1 + 2i)$

$$= 3 + 5i$$

(b) $(2i + 3) + (-5i + 1) - (3 - 2i)$

$$= 1 - i$$

(c) $(4 + 3i)(3 + 4i)$

$$= 12 - 12 + 9i + 16i$$

$$= 25i$$

$$(d) (2 - 3i)^2$$

$$= 4 - 12i - 9$$

$$= -5 - 12i$$

$$(e) (\sqrt{3} - i)^3$$

$$= \cancel{3\sqrt{3}} - 9i + \cancel{3\sqrt{3}} i^2 - (i^3)$$

$$= -9i - i(i^2)$$

$$= -8i$$

$$(f) \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{3 + 2\sqrt{3}i - 1}{3 + 1}$$

$$= \frac{4 + 2\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$(g) \frac{4-i}{2-i} + \frac{4+i}{2+i}$$

$$= \frac{(4-i)(2+i) + (4+i)(2-i)}{4+1}$$

$$= \frac{8+2i+1+8-2i+1}{5}$$

$$= \frac{18}{5}$$

$$(h) \frac{z^2+z+1}{z^2-z+1} \text{ si } z=2-i$$

$$z^2 = (2-i)^2 = 4-1-4i = 3-4i$$

$$\frac{3-4i+2-i+1}{3-4i-2+i+1} = \frac{6-5i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i}$$

$$= \frac{12+15+8i}{4+9}$$

$$= \frac{27+8i}{13}$$

2. Calculer les racines carrées de z si

(a) $z = -i$

$$? \quad n+iy \quad \left\{ \begin{array}{l} (n+iy)^2 = -i \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n^2 - y^2 = 0 \\ 2ny = -1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 0 \\ y = -\frac{1}{2x} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \\ (2) \end{array} \right. \quad (*)$$

$$(*) \quad 4x^4 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$$

les racines de z sont $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$

(b) $z = -8 - 6i$

? $x+iy \quad \{ \quad (x+iy)^2 = -8-6i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{9}{x^2} = -8 \quad (*) \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases}$$

$(*) \quad x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

$$\Delta = 64 + 36 = 100$$

$$x_{1,2}^2 = \frac{-8 \pm 10}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -9 \end{matrix} \text{ A.R.}$$

$\Leftrightarrow x = \pm 1 \quad \text{et} \quad y = \mp 3$

les racines de z sont $\pm 1 \mp 3i$

$$(c) z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2xy = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{1}{16x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{1}{4x} \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \quad 16x^4 - \frac{\sqrt{3}}{2} 16x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 - 8\sqrt{3}x^2 - 1 = 0$$

$$\Delta = 192 + 64 = 256$$

$$x_{1,2}^2 = \frac{8\sqrt{3} \pm 16}{32} \begin{cases} \frac{\sqrt{3}+2}{4} \\ \frac{\sqrt{3}-2}{4} \end{cases} \quad \text{AR}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \mp \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}}$$

$$= \mp \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2} (\sqrt{3}-2)}{2 (3-4)}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2} (\sqrt{3}-2)}{2}$$

$$\text{Les racines de } z \text{ sont } \pm \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} (1 + (\sqrt{3}-2)i)$$

3. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$

(a) $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$\Delta = 4 - 8 = -4$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} \begin{cases} -1 + i \\ -1 - i \end{cases}$$

$$(b) ix^2 - (5i + 2)x + 5(i + 1) = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (5i + 2)^2 - 20i(i + 1) \\ &= 25i^2 + 4 + \cancel{20i} - 20i^2 - \cancel{20i} \\ &= -1\end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{5i + 2 \pm i}{2i} \begin{cases} \frac{6i + 2}{2i} = \frac{-6i^2 - 2i}{2} = 3 - i \\ \frac{4i + 2}{2i} = 2 - i \end{cases}$$

$$(c) (-3+i)x^2 + (5i-1)x = -2$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (5i-1)^2 - 4(-3+i) \\ &= 25i^2 + 1 - 10i + 12 - 4i \\ &= -18i\end{aligned}$$

les racines de $-18i$ sont $\pm(3-3i)$ (cf ann 2)

$$x_{1,2} = \frac{-(5i-1) \pm (3-3i)}{2(i-3)} \quad \begin{array}{l} \nearrow \frac{-8i+4}{2i-6} \\ \searrow \frac{-2i-2}{2i-6} \end{array}$$

$$x_1 = \frac{(2-4i)(i+3)}{-1-9} = i-1$$

$$x_2 = \frac{-(i+1)(i+3)}{-1-9} = \frac{1+2i}{5}$$

$$(d) x^2 - 2(i+1)x + (i-1) = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (i-1)^2 - 4(i-1) \\ &= i^2 - 2i + 1 - 4i + 4 \\ &= 5 - 6i\end{aligned}$$

Les racines de $5 - 6i$ sont $\pm(3+i)$

$$x_{1,2} = \frac{-(i+1) \pm (3+i)}{2} \quad \begin{matrix} 2 \\ \swarrow \end{matrix} \quad \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

$$(e) (2i+1)z + z^2 + 2i = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (2i+1)^2 - 8i \\ &= 4i^2 + 4i + 1 - 8i \\ &= -3 - 4i\end{aligned}$$

les racines de $-3-4i$ sont $\pm(1-2i)$

$$z_1 = \frac{-(2i+1) \pm (1-2i)}{2} \begin{cases} -2i \\ -1 \end{cases}$$

$$(f) 2x^2 - 7x + 5 = 5i$$

$$\Delta = 49 - 8(5 - 5i) \\ = 9 + 40i$$

(les racines de $9 + 40i$ sont $\pm(5 + 4i)$)

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm (5 + 4i)}{4} \begin{cases} 3 + i \\ \frac{1 - 2i}{2} \end{cases}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$

(a) $2z + i\bar{z} = 9$

$$\Leftrightarrow 2(x+iy) + i(x-iy) = 9$$

$$\Leftrightarrow (2x+y) + i(x+y) = 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 9 \\ x+y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3y = 9 \\ x = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$S: \{6-3i\}$$

$$(b) \begin{cases} 3z_1 + z_2 = 1 - 7i \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6z_1 + 2z_2 = 2 - 14i & (1) \\ i z_1 + 2z_2 = 11i & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Leftrightarrow (6 - i) z_1 = 2 - 25i$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow z_1 &= \frac{2 - 25i}{6 - i} \cdot \frac{6 + i}{6 + i} \\ &= \frac{12 + 25 + 2i - 150i}{37} \\ &= \frac{37 - 148i}{37} \\ &= 1 - 4i \end{aligned}$$

$$\text{Donc l'eq (1) originale: } z_2 = 1 - 7i - 3(1 - 4i) \\ = -2 + 5i$$

$$S: \{(1 - 4i, -2 + 5i)\}$$

5. On donne $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$

(a) Montrer que $P(z)$ admet une racine réelle que l'on déterminera;

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow a^3 + 9ia^2 + 12ai - 22a - 12i - 36 = 0$$

$$\begin{cases} a^3 - 22a - 36 = 0 & (*) \\ 9a^2 + 12a - 12 = 0 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ 3a^2 + 4a - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{6} \begin{matrix} \swarrow -2 \\ \searrow \frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$a = -2 \text{ dans } (*) : -8 + 44 - 36 = 0 \quad \text{OK}$$

$$a = \frac{2}{3} \text{ dans } (*) : \frac{8}{27} - \frac{44}{3} - 36 \neq 0 \Rightarrow a = -2$$

(b) Factoriser $P(z)$.

1	9i	12i - 22	-12i - 36
-2	-2	-18i + 4	36 + 12i
1	-2 + 9i	-6i - 18	0

$$P(z) = (z + 2) (z^2 + (9i - 2)z - 6i - 18)$$

↳ (*)

$$\begin{aligned} (*) \Delta &= (9i - 2)^2 + 24i + 72 \\ &= -81 + 4 - 36i + 24i + 72 \\ &= -5 - 12i \end{aligned}$$

Les racines de Δ sont $\pm(2 - 3i)$

$$z_{1,2} = \frac{2 - 9i \pm (2 - 3i)}{2} \begin{matrix} \swarrow 2 - 6i \\ \searrow -3i \end{matrix}$$

$$P(z) = (z + 2)(z + 3i)(z - 2 + 6i)$$

6. Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique et les placer dans le plan de Gauss.

(a) $z = 1 + i$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Q I}) \quad (\text{rouge})$$

(b) $z = \sqrt{3} - 3i$

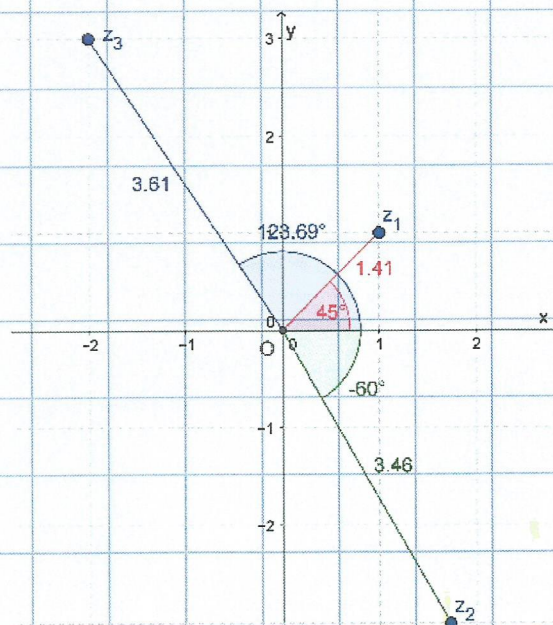
$$\rho = 2\sqrt{3}$$

$$\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \quad (\text{Q IV}) \quad (\text{vert})$$

(c) $z = 3i - 2$

$$\rho = \sqrt{13}$$

$$\theta = \arctan(-\frac{3}{2}) = 2,159 \quad (\text{Q II}) \quad (\text{bleu})$$



7. Calculer, en utilisant la formule de de Moivre, le module et l'argument de

(a) $z = (1+i)(\sqrt{3}-i)$

$$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}$$

(b) $z = -\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

$$z = z_1 \cdot \frac{z_2}{z_3}$$

$$z_1 = 1 \operatorname{cis} (+\pi)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$z_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \left(\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}$$

$$(c) z = \frac{(1-i)^3}{4(i+1)^4}$$

$$z = \frac{z_1^3}{z_2^4 z_3^4}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = 4 \operatorname{cis} 0$$

$$z_3 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z &= \frac{\sqrt{8}}{16} \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{4} - 0 - \frac{4\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{cis} -\frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$

$$(d) z^{20} \text{ si } z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

$$z_1: r_1 = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + 1}$$

$$z_2: r_2 = r_1$$

$$\theta_1: \text{such as } \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}$$

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow z^{20} = \operatorname{cis} \frac{20\pi}{4}$$

$$= -1$$

8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ et représenter les solutions dans le plan de Gauss.

(a) $z^2 = i - 1$

$$i - 1 \xrightarrow{\text{F.T.}} \rho = \sqrt{2}$$
$$\theta = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4} \quad (\varphi_{\pi})$$

$$\Rightarrow z^2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right)$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{8} + k\pi \right)$$
$$= \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{8} + k\pi \right)$$

$$(b) z^4 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

$$\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{F.T.}} \rho = 1$$

$$\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \quad (\text{Q}_{IV})$$

$$\Rightarrow z^4 = \text{cis} \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right)$$

$$\Leftrightarrow z = \text{cis} \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$(c) z^3 = -6\sqrt{3}(1+i)$$

$$-6\sqrt{3}(1+i) \xrightarrow{FT} \left\{ \begin{array}{l} \rho = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{6} \\ \theta = \text{arg}(1+i) = \frac{5\pi}{4} \quad (\theta_{II}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow z^3 = 6\sqrt{6} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$= \sqrt{6^3} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\sqrt{6^3}} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{6^3}} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{6} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

9. Exercices "exotiques"

(a) Soit $z = x + iy$ et $z' = \frac{z-i}{z+1}$. Trouver le lieu des points z tel que z' est réel.

$$z' = \frac{x+iy-i}{x+iy+1} \Leftrightarrow z' = \frac{x+i(y-1)}{(x+1)+iy} \cdot \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy}$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{[x(x+1) + y(y-1)] + i[(x+1)(y-1) - xy]}{(x+1)^2 + y^2}$$

z' est réel si sa partie imaginaire est nulle

$$\Leftrightarrow (x+1)(y-1) - xy = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{xy} - x + y - 1 - \cancel{xy} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x+1 \rightarrow \text{c'est une droite}$$

(b) Résoudre $z^6 + (1 - 2i)z^3 - 2i = 0$

• On pose $y = z^3 \Rightarrow y^2 + (1 - 2i)y - 2i = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (1 - 2i)^2 + 8i \\ &= 1 - 4i + 4i^2 + 8i \\ &= 1 + 4i + 4i^2 \\ &= (1 + 2i)^2\end{aligned}$$

on = $-3 + 4i$ et extraction
de racine carrée

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 + 2i \pm (1 + 2i)}{2} \begin{matrix} \nearrow 2i \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

• $z_1^3 = 2i = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$$\Leftrightarrow z_1 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

• $z_2^3 = -1 = \operatorname{cis}(\pi + 2k\pi)$

$$\Leftrightarrow z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

(c) Calculer le module et l'argument de $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ et $z_1 \cdot z_2$. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$

$$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Or } z_1 z_2 &= (1+i)(\sqrt{3}-i) \\ &= (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1) \end{aligned}$$

Pour trouver $\cos \frac{\pi}{12}$, on égale les parties réelles

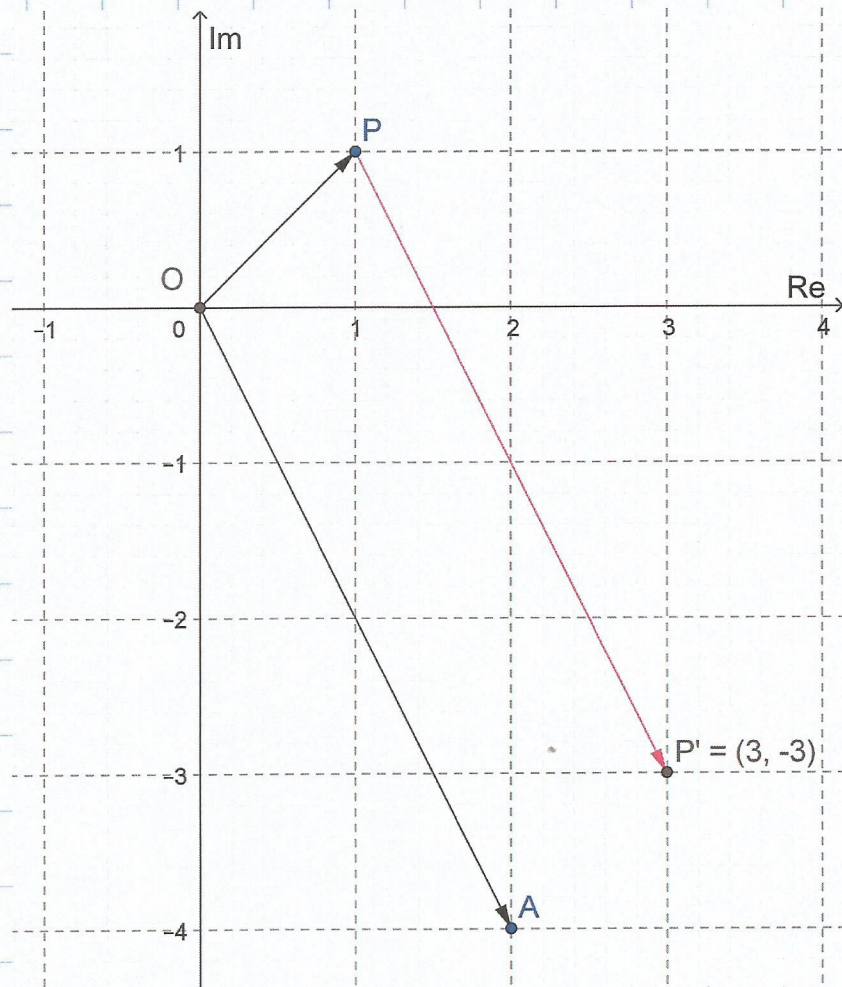
$$2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Transformation du plan complexe

1. Trouver l'image du point $P(z)$ par la transformation t et vérifier algébriquement le résultat si :

(a) $z = 1 + i$ et t est la translation de vecteur $(2, -4)$;



$$z = 1 + i$$

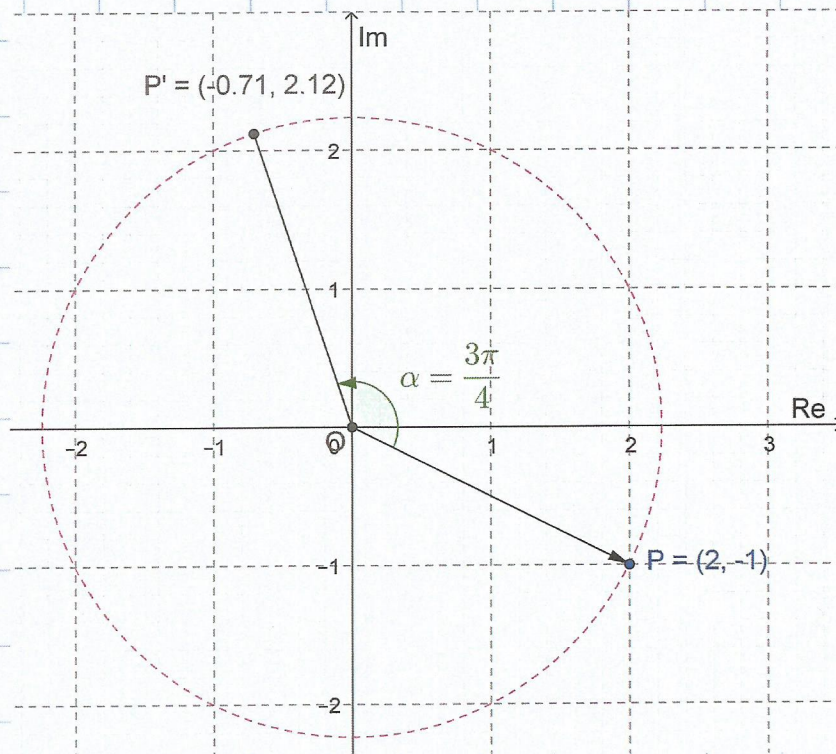
$$a = 2 - 4i$$

$$z' = z + a$$

$$= 1 + i + 2 - 4i$$

$$= 3 - 3i$$

(b) $z = 2 - i$ et t est la rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$;



$$z = 2 - i$$

$$z' = z \cdot e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

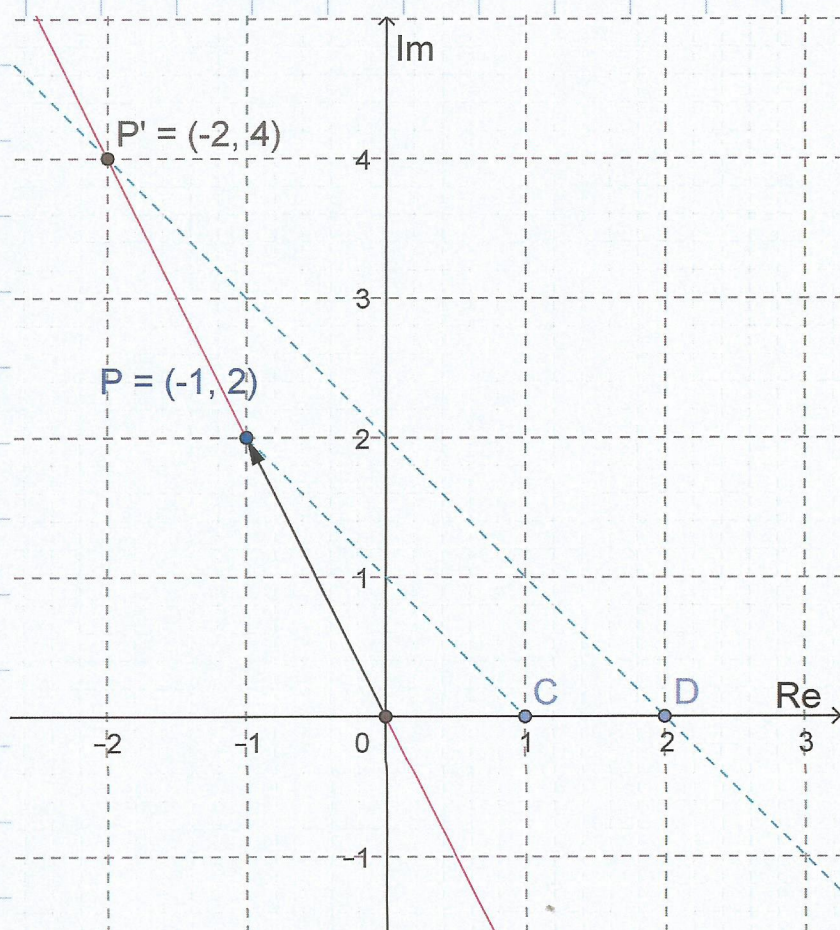
$$= (2 - i) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$z = -0,71 + 2,12 i$$

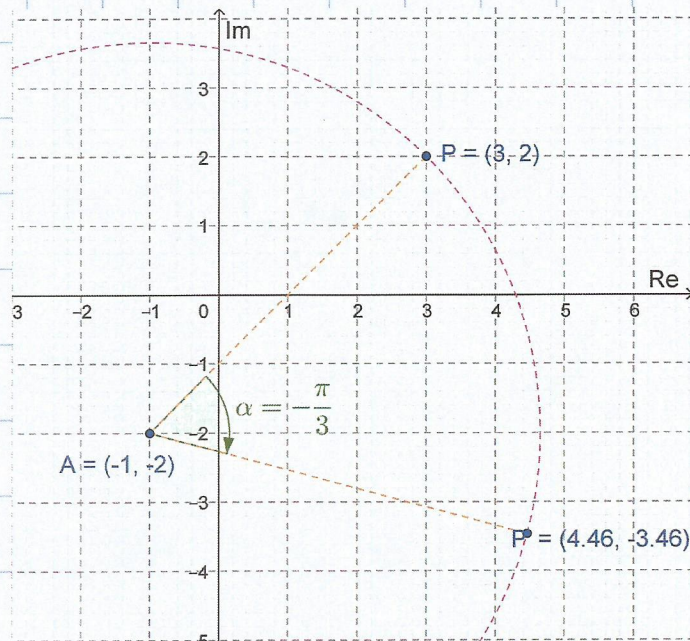
(c) $z = 2i - 1$ et t est l'homothétie de centre O et de rapport 2;



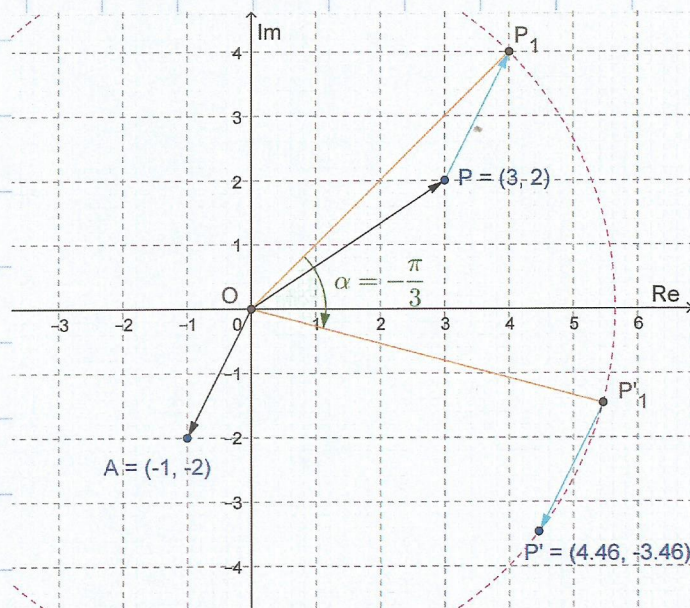
$$z = 2i - 1$$

$$\begin{aligned} z' &= 2z \\ &= 4i - 2 \end{aligned}$$

(d) $z = 3 + 2i$ et t est la rotation de centre $A(-1, -2)$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$;



Détail de la rotation :



$$z = 3 + 2i$$

$$a = -1 - 2i$$

$$z' = (z - a) \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + a$$

$$= (3 + 2i + 1 + 2i) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + (-1 - 2i)$$

$$= (4 + 4i) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - 1 - 2i$$

$$= (2 + 2\sqrt{3}) + i(2 - 2\sqrt{3}) - 1 - 2i$$

$$= (1 + 2\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}i$$

$$\approx 4,46 - 3,46i$$

(e) $z = 1 + i$
 $b = -1 + 2i$

$$z' = k(z - b) + b$$

$$= \frac{1}{2}(1 + i + 1 - 2i) - 1 + 2i$$

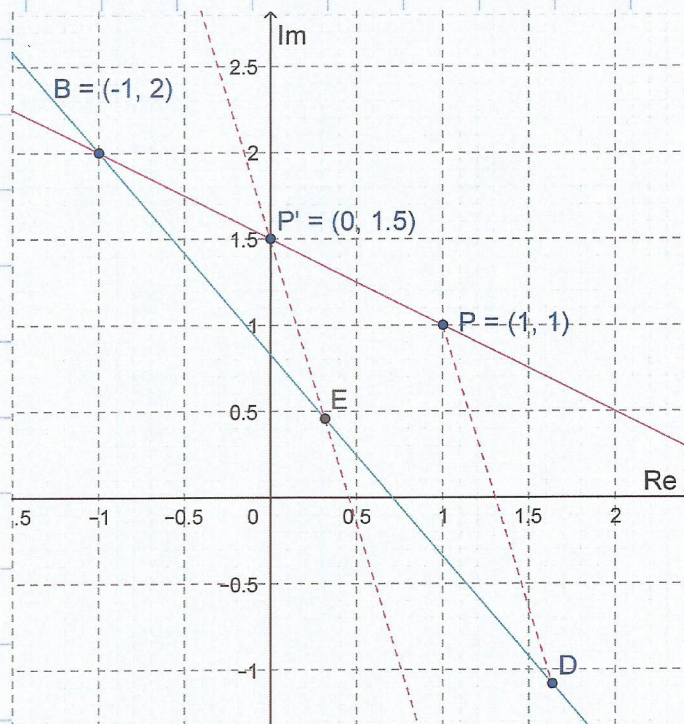
$$= \frac{1}{2}(2 - i) - 1 + 2i$$

$$= 1 - \frac{i}{2} - 1 + 2i$$

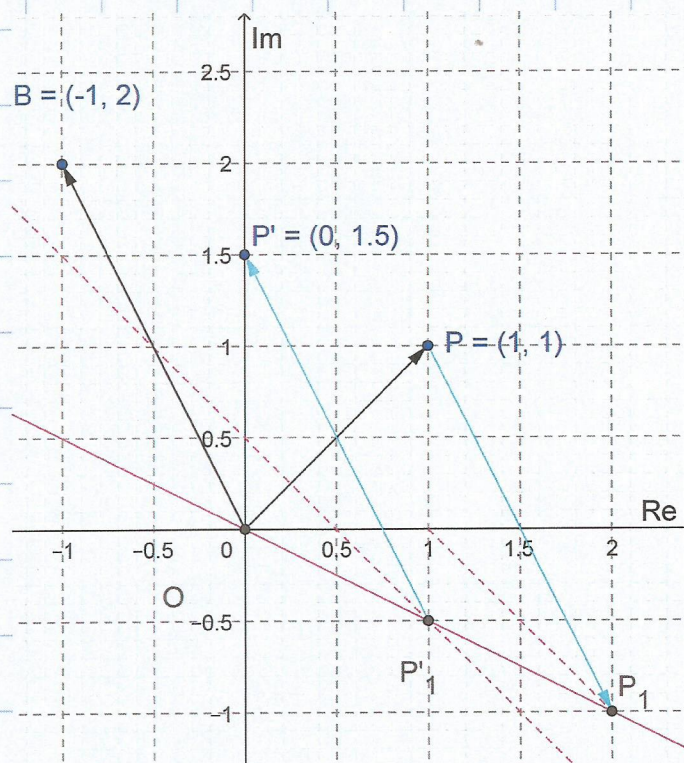
$$= \frac{3}{2}i$$

$$= 1,5i$$

(e) $z = 1 + i$ et t est l'homothétie de centre $B(-1, 2)$ et de rapport $\frac{1}{2}$;

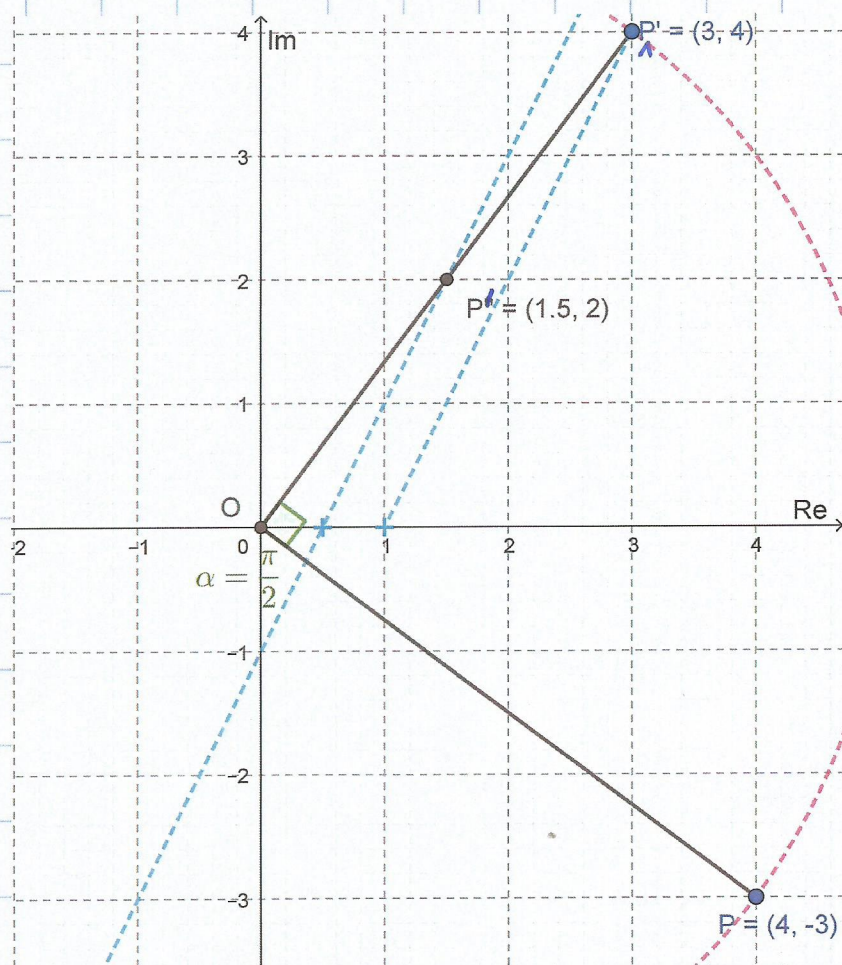


Détail de l'homothétie :



(*) Voir page précédente

(f) $z = 4 - 3i$ et t est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ suivi de l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$;



$$z = 4 - 3i$$

$$t = h_{O, \frac{1}{2}} \circ r_{O, \frac{\pi}{2}}$$

$$r_{O, \frac{\pi}{2}} : z'_1 = z \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$$

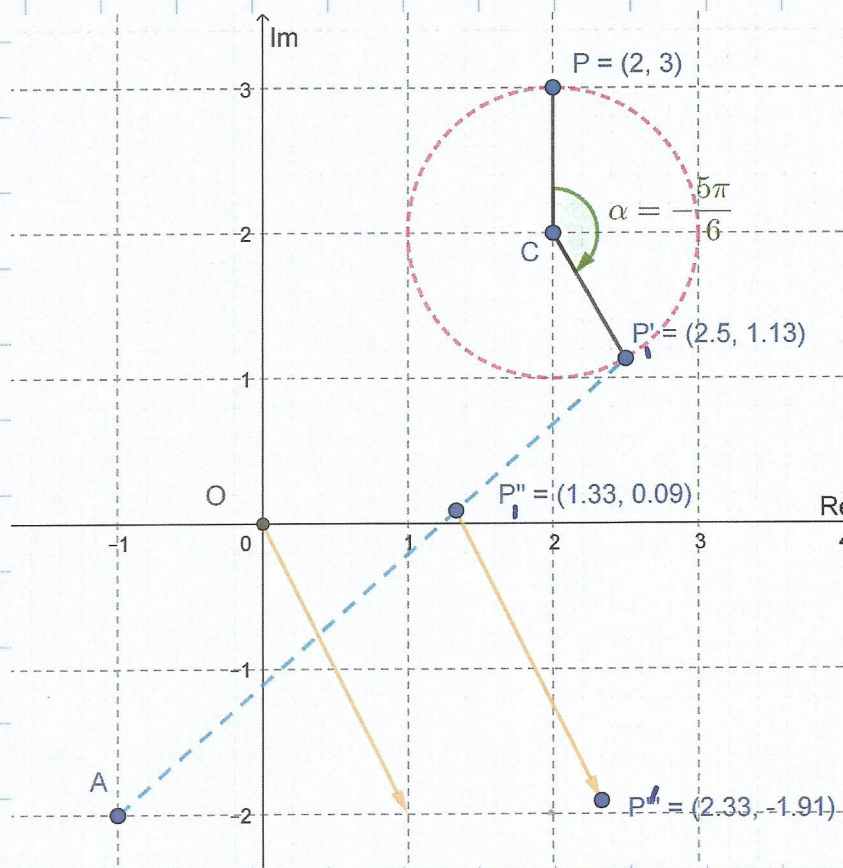
$$h_{O, \frac{1}{2}} : z' = k z'_1 = k z \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow z' = \frac{1}{2} \cdot (4 - 3i) (i)$$

$$= \left(2 - \frac{3}{2}i\right) i$$

$$= 2i + \frac{3}{2}$$

(g) $z = 2 + 3i$ et t est la rotation de centre $C(2, 2)$ et d'angle $-\frac{5\pi}{6}$ suivi de l'homothétie de centre $A(-1, -2)$ et de rapport $\frac{2}{3}$ suivi de la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;



$$z = 2 + 3i$$

$$a = -1 - 2i$$

$$c = 2 + 2i$$

$$u = 1 - 2i$$

$$t = r_{C, -\frac{5\pi}{6}} \circ h_{A, \frac{2}{3}}$$

$$r_{C, -\frac{5\pi}{6}} : z'_1 = (z - c) \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + c$$

$$h_{A, \frac{2}{3}} : z''_1 = k(z'_1 - a) + a$$

$$= k \left[(z - c) \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + c - a \right] + a$$

$$t_{\vec{u}} : z' = z''_1 + u$$

$$= k \left[(z - c) \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + c - a \right] + a + u$$

$$z' = \frac{2}{3} \left[(2+3i-2-2i) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) + 2+2i+1+2i \right] \dots$$

$$\dots + (-1-2i) + 1-2i$$

$$= \frac{2}{3} \left(i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) + 3+4i \right) - 4i$$

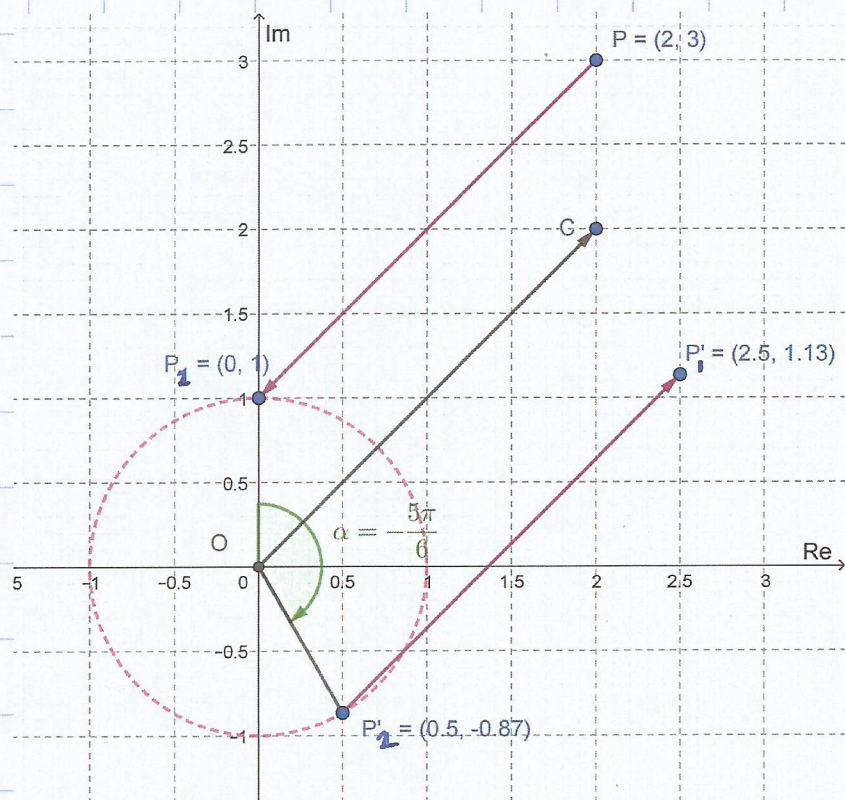
$$= \frac{2}{3} \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\right) i + \underbrace{3+\frac{1}{2}}_{\frac{7}{2}} \right] - 4i$$

$$= \frac{7}{3} + \left(\frac{8}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - 4 \right) i$$

$$= \frac{7}{3} + \left(-\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) i$$

$$\approx 2,33 - 1,91i$$

Détail de la rotation :



Détail de l'homothétie :

