Coniques : Solutions

Parabole

1. Déterminer les caractéristiques des paraboles suivantes (sommet, axe de symétrie, coordonnées du foyer, équation de la directrice, orientation) :

   (a) $P_1 \equiv 4x - y^2 = 0$

   $y^2 = 2px$

   $y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad p = 2$

   sommet : $(0,0)$

   axe focal : $y = 0$ (dirigée vers les $x > 0$)

   $F : (1,0)$

   $d \equiv x = -1$

   (b) $P_2 \equiv x^2 + 8y = 0$

   $x^2 = -8y \quad \Rightarrow \quad p = 4$

   sommet $(0,0)$

   axe focal : $x = 0$ (dirigée vers les $y < 0$)

   $F : (0,-2)$

   $d \equiv y = 2$

(c) $P_3 \equiv -6x + y^2 - *6y = 3$

$y^2 - 6y + 9 = 6x + 3 + 9$

$(y-3)^2 = 6x + 12$

$(y-3)^2 = 6(x+2)$ $\qquad (y-y_s)^2 = 2p(x-x_s)$

$S : (-2, 3)$ $\qquad p = 3$

axe fo-cal : $y = 3$ (dirigée vers les $x > 0$)

$F : \left(-2 + \frac{3}{2}, 3\right) : \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

$d \equiv x = -2 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$

(d) $P_4 \equiv x^2 + 8x + 2y + 15 = 0$

$$x^2 + 8x + 16 = -2y - 15 + 16$$
$$(x+4)^2 = -2y + 1$$
$$(x+4)^2 = -2\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$S : \left(-4, \frac{1}{2}\right)$

$p = 1$

axe focal : $y = \frac{1}{2}$ (dirigé vers les $y < 0$)

$F\left(-4, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) : (-4, 0)$

$d \equiv y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \iff y = 1$

2. Trouver l'équation de la parabole de foyer $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ et de directrice $d \equiv y - \frac{4}{3} = 0$.

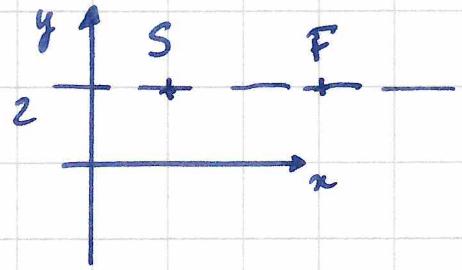
Le foyer est sur l'axe Oy $\Rightarrow$ $x^2 = 2py$ (car $x_s = 0$)

La parabole est dirigée vers les $y < 0$ (car $y_s < 0$)

$\frac{p}{2} = +\frac{4}{3} \Leftrightarrow p = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow x^2 = -\frac{16}{3} y$

3. Trouver l'équation de la parabole de sommet (3,2) et de foyer (5,2).



D'après le schéma, $AF \equiv y = 2$

$\Rightarrow P \equiv (y - y_s)^2 = 2p(x - x_s)$

Comme S à gauche de F, $p > 0$

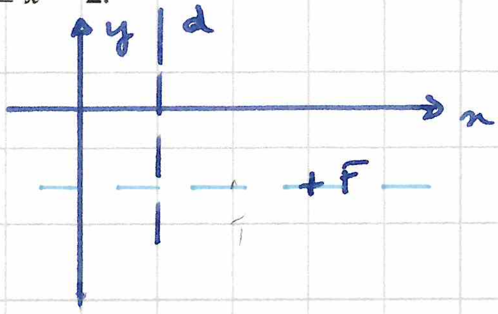
et $\frac{p}{2} = d(F,S) \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$

$P \equiv (y-2)^2 = 8(x-3)$

$\equiv y^2 - 4y - 8x + 4 + 24 = 0$

$\equiv y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

4. Ecrire l'équation de la parabole ayant pour foyer le point (6,-2) et de directrice la droite $d \equiv x = 2$.



D'après le schéma, $AF \equiv y = -2$

$\Rightarrow P \equiv (y - y_s)^2 = 2p(x - x_s)$

Comme F est à droite de d, $p > 0$ et

$p = d(F, d) = 4$ et $S : (4, -2)$

$\Rightarrow P \equiv (y+2)^2 = 8(x-4)$

$\equiv y^2 + 4y - 8x + 4 + 32 = 0$

$\equiv y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$

5. Ecrire l'équation de la parabole d'axe parallèle à Oy, ayant pour sommet (2,3) et passant par (4,5).

axe // à $Oy \Rightarrow \mathcal{P} \equiv (x - x_s)^2 = 2p(y - y_s)$

$\Leftrightarrow \mathcal{P} \equiv (x-2)^2 = 2p(y-3)$

$(4,5) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (4-2)^2 = 2p(5-3)$

$\Leftrightarrow 4 = 4p$

$\Leftrightarrow p = 1$

$\Rightarrow \mathcal{P} \equiv (x-2)^2 = 2(y-3)$

$\equiv x^2 - 4x + 4 - 2y + 6 = 0$

$\equiv x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

Ellipse

1. Déterminer les caractéristiques des ellipses suivantes (centre, coordonnées des sommets, équation de l'axe focale, coordonnées des foyers) :

   (a) $E_1 \equiv 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$C : (0,0)$ $\quad a = 5, \; b = 3, \; c = 4$

$AF \equiv x = 0$

$A : (0,5)$ $\quad A' (0,-5)$

$B : (3,0)$ $\quad B' (-3,0)$

$F : (0,4)$ $\quad F' (0,-4)$

   (b) $E_2 \equiv x^2 + 4y^2 = 64$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$C : (0,0)$ $\quad a = 8, \; b = 4, \; c = 4\sqrt{3}$

$AF \equiv y = 0$

$A : (8,0)$ $\quad A' : (-8,0)$

$B : (0,4)$ $\quad B' : (0,-4)$

$F : (4\sqrt{3},0)$ $\quad F' : (-4\sqrt{3},0)$

(c) $E_3 \equiv 49x^2 - 294x + 4y^2 - 16y + 261 = 0$

$$\iff 49(x^2 - 6x) + 4(y^2 - 4y) = -261$$

$$\iff 49(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 - 4y + 4) = -261 + 9 \cdot 49 + 4 \cdot 4$$

$$\iff 49(x-3)^2 + 4(y-2)^2 = 196$$

$$\iff \frac{49(x-3)^2}{196} + \frac{4(y-2)^2}{196} = 1$$

$$\iff \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{49} = 1$$

$C : (3, 2)$ $\quad a = 7$, $b = 2$, $c = 3\sqrt{5}$

$AF \equiv x = 3$

$A : (3, 9)$ $\quad A'(3, -5)$

$B : (5, 2)$ $\quad B'(1, 2)$

$F : (3, 2 + 3\sqrt{5})$ $\quad F'(3, 2 - 3\sqrt{5})$

(d) $E_4 \equiv 100x^2 + 100x + 256y^2 + 1536y = 4071$

$$100\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 256\left(y^2 + 6y + 9\right) = 4071 + 25 + 2304$$

$$100\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 256\left(y+3\right)^2 = 6400$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{64} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

$C: \left(-\frac{1}{2}, -3\right)$ $\quad a = 8,\ b = 5,\ c = \sqrt{39}$

$AF \equiv y = -3$

$A: \left(-\frac{1}{2} + 8, -3\right) : \left(\frac{15}{2}, -3\right)$ $\quad A': \left(-\frac{17}{2}, -3\right)$

$B\left(-\frac{1}{2}, -3+5\right) : \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ $\quad B': \left(-\frac{1}{2}, -8\right)$

$F\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{39}, -3\right)$ $\quad F'\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{39}, -3\right)$

2. Trouver l'équation de l'ellipse ayant pour centre l'origine, pour foyer le point (0,3) et de longueur de demi grand axe 5.

Le centre est $(0,0)$ et le foyer est sur l'axe Oy (axe focal)

$$\Rightarrow E \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

demi gd axe $= 5 \Rightarrow a = 5$

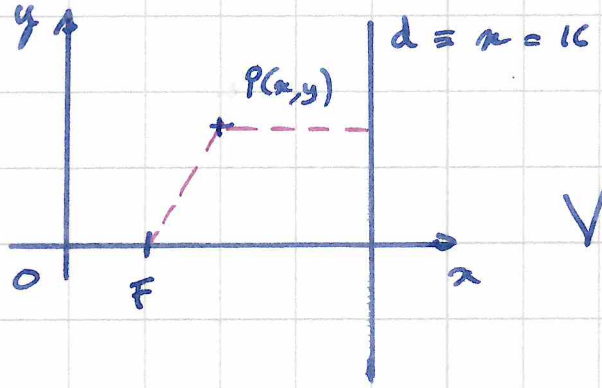
$F(0,3) \Rightarrow c = 3 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$= 25 - 9$

$= 16 \Rightarrow b = 4$

$$E \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

3. Un point se déplace de telle sorte que sa distance au point (4,0) est toujours égale à la moitié de sa distance à la droite $d \equiv x - 16 = 0$. Trouver l'équation et les caractéristiques du lieu obtenu.



$$d(P,F) = \frac{1}{2}\, d(P,d)$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \frac{1}{2}(16-x)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 + y^2 = \frac{1}{4}\left(256 - 32x + x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - \cancel{8x} + 16 + y^2 = 64 - \cancel{8x} + \frac{x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x^2}{4} + y^2 = 48$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x^2}{192} + \frac{y^2}{48} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1 \quad \rightarrow \text{ellipse}$$

$C : (0,0)$ $\qquad a = 8, \quad b = 4\sqrt{3}, \quad c = 4$

$AF \equiv y = 0$

$A : (8,0)$ $\qquad A'(-8,0)$

$B : (0, 4\sqrt{3})$ $\qquad B'(0, -4\sqrt{3})$

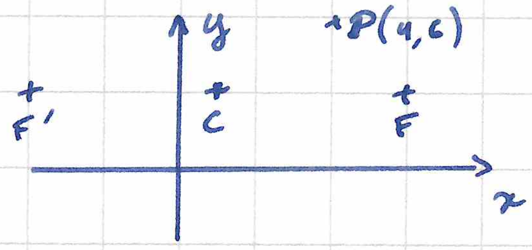
$F : (4,0)$ $\qquad F'(-4,0)$

4. Un point $P(x,y)$ se déplace de telle sorte que la somme de ses distances aux points (4,2) et (-2,2) est égale à 8. Trouver l'équation et les caractéristiques du lieu obtenu.

- C'est la définition d'une ellipse où les pts donnés sont les foyers.
- $2a = 8 \Rightarrow a = 4$
- Le centre est le milieu des foyers : $C(1,2)$
- L'axe focal a pour ég $y=2$ (car y = cste dans les coordonnées des foyers)
- $d(F,F') = 2c \Rightarrow c = 3 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 7$
  $\Leftrightarrow b = \sqrt{7}$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

5. Trouver l'équation de l'ellipse de centre (1,2), de foyer (6,2) et passant par le point (4,6).



$c = d(C,F) = 5$

axe focal : $y = 2$

$\Rightarrow \dfrac{(x - x_c)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$

De plus $d(P,F) + d(P,F') = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(4-6)^2 + (6-2)^2} + \sqrt{(4+4)^2 + (6-2)^2} = 2a$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 2a$

$\Leftrightarrow a = 3\sqrt{5}$ $\quad \Leftrightarrow b^2 = 45 - 25 = 20$

$\Leftrightarrow b = 2\sqrt{5}$

$E = \dfrac{(x-1)^2}{45} + \dfrac{(y-2)^2}{20} = 1$

6. Trouver l'équation de l'ellipse de foyers $(0, \pm 4)$ et passant par $\left(\frac{12}{5}, 3\right)$.

$C(0,0)$

F et $F' \in O_y \Rightarrow \mathcal{E} \equiv \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

$c = 4 \quad (= d(C,F))$

$$\sqrt{\left(\frac{12}{5} - 0\right)^2 + (3-4)^2} + \sqrt{\left(\frac{12}{5} - 0\right)^2 + (3+4)^2} = 2a$$

$\Leftrightarrow \frac{13}{5} + \frac{37}{5} = 2a \qquad \Leftrightarrow a = 5$

$\Leftrightarrow b = 3$

$$\mathcal{E} \equiv \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$$

Hyperbole

1. Déterminer les caractéristiques des ellipses suivantes (centre,coordonnées des sommets, équation de l'axe focale, coordonnées des foyers, équations des asymptotes) :

   (a) $H_1 \equiv 16x^2 - 25y^2 = 400$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$C : (0,0) \qquad a = 5 \quad , \quad b = 4 \quad , \quad c^2 = 25 + 16 = 41$

$\rightarrow c = \sqrt{41}$

$AF \equiv y = 0$

$A' : (-5, 0)$ et $A(5, 0)$

$F' = (-\sqrt{41}, 0)$ et $F(\sqrt{41}, 0)$

$$AO \equiv y = \pm \frac{4}{5} x$$

   (b) $H_2 \equiv 2y^2 - 4 = x^2$

$$2y^2 - x^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$a = \sqrt{2} \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = \sqrt{6}$

$AF \equiv x = 0$

$A' : (0, -\sqrt{2})$ et $A(0, \sqrt{2})$

$F' : (0, -\sqrt{6})$ et $F(0, \sqrt{6})$

$$AO \equiv y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

(c) $H_3 \equiv 4x^2 - 8x - y^2 - 4y - 16 = 0$

$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) = 16 + 4 - 4$

$4(x-1)^2 - (y+2)^2 = 16$

$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

$C : (1, -2)$

$a = 2 \quad , \quad b = 4 \quad , \quad c = 2\sqrt{5}$

$AF \equiv y = -2$

$A' : (-1, -2)$ et $A(3, -2)$

$F' : (1 - 2\sqrt{5}, -2)$ et $F(1 + 2\sqrt{5}, -2)$

$AO \equiv y + 2 = \pm 2(x - 1)$

(d) $H_4 \equiv 64x^2 + 64x = 100y^2 - 100y + \cancel{1609}$ -1591

$$64\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 100\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = -1591 + 16 - 25$$

$$64\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 100\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -1600$$

$$\frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{16} - \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{25} = 1$$

$$C : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$a = 4$, $b = 5$, $c = \sqrt{41}$

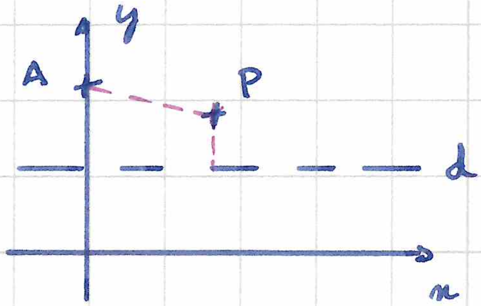
$AF \equiv x = -\frac{1}{2}$

$A' : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ et $A : \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$

$F' : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{41}\right)$ et $F : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{41}\right)$

$AO \equiv y - \frac{1}{2} = \pm \frac{4}{5}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

2. Un point se déplace de telle sorte que sa distance au point (0,4) soit les $\frac{4}{3}$ de sa distance à la droite $d \equiv 4y - 9 = 0$. Trouver l'équation et les caractéristiques du lieu.



$d(P,A) = \frac{4}{3}\, d(P,d)$

où $P : (x,y)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-4)^2} = \frac{4}{3}\left|y - \frac{9}{4}\right|$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 = \frac{16}{9}\left(y^2 + \frac{81}{16} - \frac{9}{2}y\right)$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{9}y^2 = 9 - 16$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{9}y^2 = -7 \Leftrightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

$C : (0,0)$

$AF \equiv x = 0$

$a = 3,\ b = \sqrt{7},\ c = 4$

$A'(0,-3)$ et $A(0,3)$

$F'(0,-4)$ et $F(0,4)$

$AO \equiv y = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}x$

3. Un point se déplace de telle sorte que le produit de ses distances algébriques aux droites $d \equiv 4x - 3y + 11 = 0$ et $d' \equiv 4x + 3y = -5$ est égale à $\frac{144}{25}$. Trouver l'équation et les caractéristiques du lieu.

$$\frac{|4x-3y+11|}{\cancel{5}} \cdot \frac{|4x+3y+5|}{\cancel{5}} = \frac{144}{\cancel{25}}$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 12\cancel{xy} + 20x - 12\cancel{xy} - 9y^2 - 15y \ldots$$

$$\ldots + 44x + 33y + 55 = 144$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 64x - 9y^2 + 18y = 89$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2 + 4x + 4) - 9(y^2 - 2y + 1) = 89 + 64 - 9$$

$$\Leftrightarrow 16(x+2)^2 - 9(y-1)^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

$C(-2, 1)$

$a = 3$, $b = 4$ $\Rightarrow c = 5$

$AF \equiv y = 1$

$A' : (-5, 1)$ et $A(1, 1)$

$F' : (-7, 1)$ et $F(3, 1)$

$AO \equiv y - 1 = \pm \frac{4}{3}(x+2)$

4. Trouver l'équation de l'hyperbole ayant pour centre l'origine, pour un des sommets (6,0) et pour équation d'une des asymptotes $AO \equiv 4x - 3y = 0$.

$A : (6,0) \Rightarrow AF \equiv y = 0$ et $a = 6$

$AO \equiv y = \frac{4}{3} x \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

Or $a = 6 \Rightarrow \frac{b}{6} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow b = 8$

$H \equiv \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

Position relative de droites et de coniques

1. Trouver la pente de la tangente à l'hyperbole $H \equiv 9x^2 - 4y^2 = 36$ (1) au point $\left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

$t \equiv y - f(a) = \underbrace{f'(a)}_{\text{pente}} (x - a)$

$f'(a) = y'(3)$

Si on dérive (1) : $18x - 8yy' = 0$

$\Leftrightarrow y' = \frac{18x}{8y}$

$\Leftrightarrow y' = \frac{9x}{4y}$

$y'(3) = \frac{9 \cdot \cancel{3}}{{}^{2}\cancel{4} \cdot \frac{\cancel{3}\sqrt{5}}{\cancel{2}}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$

2. Ecrire les équations des tangentes à l'ellipse $E \equiv x^2 + 4y^2 = 100$ parallèles à la droite $d \equiv 3x + 8y = 7$. Déterminer les coordonnées des points de tangence.

$$d \equiv y = -\frac{3}{8}x + \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow t \equiv y = -\frac{3}{8}x + p$$

Les pts d'$\cap$ de t et E sont la solution du système

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{8}x + p & (1) \\ x^2 + 4y^2 = 100 & (2) \end{cases}$$

En injectant (1) dans (2), on a :

$$x^2 + 4\left(-\frac{3}{8}x + p\right)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4\left(\frac{9}{64}x^2 - \frac{3}{4}xp + p^2\right) - 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 - 3xp + 4p^2 - 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16}x^2 - 3px + (4p^2 - 100) = 0 \quad (*)$$

t tgte à $E \Rightarrow \Delta = 0$

$$\Leftrightarrow 9p^2 - 4\,\frac{25}{16}(4p^2 - 100) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9p^2 - 25p^2 + 625 = 0$$

$$\Leftrightarrow -16p^2 = -625 \quad \Leftrightarrow p = \pm\frac{25}{4}$$

$$t_1 \equiv y = -\frac{3}{8}x + \frac{25}{4}$$

$$t_2 \equiv y = -\frac{3}{8}x - \frac{25}{4}$$

L'éq (*) donne les abscisses des pts d'$\cap$ de E et t. Comme $\Delta = 0$, on a

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{3p}{\frac{25}{8}} = \frac{24}{25}p = \pm \frac{24}{25} \cdot \frac{25}{4} = \pm 6$$

En remplaçant dans (2), on a :

$$36 + 4y^2 = 100 \iff 4y^2 = 64 \iff y^2 = 16 \iff y = \pm 4$$

Les pts de tgce sont donc : $(-6, -4)$ et $(6, 4)$

3. Trouver les équations des tangentes à l'ellipse $E \equiv 5x^2 + y^2 = 5$ passant par le point (-2,-1).

Le pt n'appartient pas à E car $5(-2)^2 + (-1)^2 \neq 5$

Donc $t \equiv y + 1 = m(x+2)$ ou $t \equiv y = mx + 2m - 1$

Les coordonnées des pts d'intersection de t et E sont données par :

$$\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ y = mx + 2m - 1 & (2) \end{cases}$$

En remplaçant (2) ds (1) :

$$5x^2 + (mx + 2m - 1)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + m^2x^2 + 4m^2 + 1 + 4m^2x - 2mx - 4m = 5$$

$$\Leftrightarrow (5 + m^2)x^2 + (4m^2 - 2m)x + (4m^2 - 4m - 4) = 0$$

Tgce $\Rightarrow \Delta = 0$

$$\Leftrightarrow (4m^2 - 2m)^2 - 4(m^2+5)(4m^2 - 4m - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{16m^4} + 4m^2 - \cancel{16}m^3 - 4(\cancel{4m^4} - \cancel{4m^3} + 16m^2 \ldots$$

$$\ldots - 20m - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow -60m^2 + 80m + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3m^2 + 4m + 4 = 0$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

$$m_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{-6} \left\langle \begin{matrix} -\frac{2}{3} \\ 2 \end{matrix} \right.$$

$$t_1 \equiv y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

$$t_2 \equiv y = 2x + 3$$

4. Trouver l'équation de la tangente et de la normale à la conique $\mathcal{C} \equiv 2x^2 + 3y^2 - 30 = 0$ au point (-3,2).

Le pt $A(-3,2) \in \mathcal{C}$ car $2(-3)^2 + 3(2)^2 - 30 = 0$

$t \equiv y - y_A = f'(x_A)(x - x_A)$

avec $f'(x_A) = y'(-3)$

Or $4x + 6yy' = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{2x}{3y}$

$\Rightarrow y'(-3) = -\dfrac{2.(-3)}{3(2)} = 1$

$\Rightarrow t \equiv y - 2 = x + 3$

$t \equiv y = x + 5$

$n \equiv y - 2 = -1(x+3)$ car $m_n = -\dfrac{1}{m_t}$

$n \equiv y = -x - 1$

5. Trouver les points de l'hyperbole $H \equiv x^2 - 2y^2 - 8 = 0$ où la tangente est perpendiculaire à la droite $d \equiv 4x + 5y - 2 = 0$.

$$d \equiv y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5} \Rightarrow m_d = -\frac{4}{5} \Rightarrow m_t = \frac{5}{4}$$

$$t \equiv y = \frac{5}{4}x + p.$$

Comme dans l'exercice 2, on a successivement

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - 8 = 0 & (1) \\ y = \frac{5}{4}x + p & (2) \end{cases}$$

En injectant (2) dans (1):

$$x^2 - 2\left(\frac{5}{4}x + p\right)^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\left(\frac{25}{16}x^2 + \frac{5}{2}xp + p^2\right) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{25}{8}x^2 - 5xp - 2p^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow +\frac{17}{8}x^2 + 5xp + (2p^2 + 8) = 0 \quad (*)$$

$$\text{Tgce} \Rightarrow \Delta = 0$$

$$\Leftrightarrow 25p^2 - \cancel{4} \cdot \frac{17}{\cancel{8}} \cancel{2}(p^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8p^2 - 68 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 = \frac{17}{2} \Leftrightarrow p = \pm\frac{\sqrt{34}}{2}$$

Les solution de $(*)$ si $\Delta = 0$ sont

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5p}{\frac{17}{4}} = -\frac{20}{17}p = \mp\frac{20\sqrt{34}}{34} = \mp\frac{10\sqrt{34}}{17}$$

En remplaçant dans (2):

$$y = \mp\frac{5}{4}\frac{10\sqrt{34}}{17} \pm \frac{\sqrt{34}}{2} = \mp\frac{25\sqrt{34}}{34} \pm \frac{\sqrt{34}}{2} = \mp\frac{8\sqrt{34}}{34} = \mp\frac{4\sqrt{34}}{17}$$

$A: \left(\frac{10\sqrt{34}}{17}, \frac{4\sqrt{34}}{17}\right)$ et $B\left(-\frac{10\sqrt{34}}{17}, -\frac{4\sqrt{34}}{17}\right)$

6. La parabole $P \equiv y^2 = 4ax$ ($a \in \mathbb{R}$) passe par le point (-8,4). Trouver l'équation de la tangente à cette parabole parallèle à la droite $d \equiv 3x + 2y - 6 = 0$.

$\bullet\ y^2 = 4ax \ni (-8,4) \iff 16 = 4a(-8)$

$\iff a = -\frac{1}{2}$

$\bullet\ d \equiv y = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow t \equiv y = -\frac{3}{2}x + p$

Comme ds l'exercice 2, on a :

$$\begin{cases} y^2 = -2x & (1) \\ y = -\frac{3}{2}x + p & (2) \end{cases}$$

En injectant (2) ds (1) :

$$\left(-\frac{3}{2}x + p\right)^2 = -2x$$

$$\iff \frac{9}{4}x^2 - 3xp + p^2 + 2x = 0$$

$$\iff \frac{9}{4}x^2 + (2-3p)x + p^2 = 0$$

Tgte $\Rightarrow \Delta = 0$

$$\iff (2-3p)^2 - 9p^2 = 0$$

$$\iff 4 - 12p + 9p^2 - 9p^2 = 0$$

$$\iff 4 - 12p = 0 \iff p = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow t \equiv y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$$

Exercices récapitulatifs sur les coniques.

1. Déterminer la nature et les caractéristiques des coniques suivantes, en justifiant complètement la caractéristique des coniques :

   (a) $\mathcal{C} \equiv 9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0.$

C'est une hyperbole (les termes au carré sont de signes contraires)

$9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 - 4y + 4) = 199 + 9 - 64$

$9(x-1)^2 - 16(y-2)^2 = 144$

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$a^2 = 16$, $b^2 = 9$

$\Rightarrow c^2 = 25$

$C : (1, 2)$

$AF \equiv y = 2$

$AO \equiv y - 2 = \pm \frac{3}{4}(x-1)$

$A(5, 2)$ $\quad$ $A'(-4, 2)$

$F(6, 2)$ $\quad$ $F'(-5, 2)$

(b) $C \equiv 4y^2 + 10x - 8y + 5 = 0$;

C'est une parabole (un seul terme au carré)

$4(y^2 - 2y + 1) = -10x - 5 + 4$

$4(y-1)^2 = -10x - 1$

$4(y-1)^2 = -10\left(x + \frac{1}{10}\right)$

$(y-1)^2 = -\frac{5}{2}\left(x + \frac{1}{10}\right)$

$S : \left(-\frac{1}{10}, 1\right)$ dirigée vers les $y < 0$

$AF \equiv y = 1$

$2p = \frac{5}{2} \Rightarrow p = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow F : \left(-\frac{1}{10} - \frac{5}{8}, 1\right) = \left(\frac{-29}{40}, 1\right)$

$d \equiv x = -\frac{1}{10} + \frac{5}{8} \Leftrightarrow x = \frac{21}{40}$

(c) $C \equiv 9x^2 + 4y^2 - 6x + 12y - 26 = 0$;

C'est une ellipse (termes au carré de m̂ signe)

$$9x^2 - 6x + 4y^2 + 12y = 26$$

$$9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 4\left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) = 26 + 1 + 9$$

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 36$$

$$\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(y + \frac{3}{2}\right)^2}{9} = 1$$

$C : \left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ $\quad a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $c^2 = 5$

$AF \equiv x = \frac{1}{3}$

$A : \left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2} + 3\right) = \left(\frac{1}{3}, +\frac{3}{2}\right)$ et $A'\left(\frac{1}{3}, -\frac{9}{2}\right)$

$B : \left(\frac{1}{3} + 2, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ et $B'\left(-\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}\right)$

$F : \left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2} + \sqrt{5}\right)$ et $F' : \left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2} - \sqrt{5}\right)$

(d) $C \equiv 9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y + 89 = 0$;

C'est une hyperbole

$9x^2 - 18x - 16y^2 + 64y = -89$

$9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 - 4y + 4) = -89 + 9 - 64$

$9(x-1)^2 - 16(y-2)^2 = -144$

$$-\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$C(1,2)$ $\quad a^2 = 9$ $\quad b^2 = 16$ $\quad c^2 = 25$

$AF \equiv x = 1$

$A(1, 2+3) : (1,5)$ et $A'(1,-1)$

$F(1,7)$ et $F'(1,-3)$

$AO \equiv y - 2 = \pm \frac{3}{4}(x-1)$

(e) $C \equiv 4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$;

C'est une ellipse

$4x^2 - 48x + 9y^2 + 72y = -144$

$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = -144 + 144 + 144$

$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144$

$$\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

$C(6,-4)$ $a^2 = 36$, $b^2 = 16$, $c^2 = 20$

$AF \equiv y = -4$

$A : (12, -4)$ et $A'(0,-4)$

$B : (6, 0)$ et $B'(6,-8)$

$F : (6+2\sqrt{5}, -4)$ et $F'(6-2\sqrt{5}, -4)$

(f) $C \equiv y^2 + 8y - 6x + 4 = 0.$

C'est une parabole.

$y^2 + 8y + 16 = 6x - 4 + 16$

$(y+4)^2 = 6(x+2)$

$S : (-2, -4)$ $\quad\quad p = 3$

$AF \equiv y = -4$ $\quad\quad$ dirigé vers les $y > 0$

$F : \left(-2 + \frac{3}{2}, -4\right) = \left(-\frac{1}{2}, -4\right)$

$d \equiv x = -2 - \frac{3}{2} \iff x = -\frac{7}{2}$

2. On donne les coniques $\mathcal{C} \equiv y^2 + 4x = 0$ et $\mathcal{C}' \equiv 2x^2 = 2\sqrt{3}y$.

(a) Déterminer les coordonnées des foyers de ces coniques.

$C \equiv y^2 = -4x$ $\quad$ $p = 2$ et axe focal $\equiv Ox$

$F(-1, 0)$

$C' \equiv x^2 = \sqrt{3}\, y$ $\quad$ $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et axe focal $\equiv Oy$

$F'\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

(b) Calculer les coordonnées de leurs points d'intersections et écrire les équations des tangentes en ces points à chacune de ces coniques.

$$C \cap C' : \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{4} \\ x^2 = \sqrt{3}\, y \end{cases} \iff \begin{cases} \text{[illegible]} \\ \dfrac{y^4}{16} = \sqrt{3}\, y \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \quad y^4 - 16\sqrt{3}\, y = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \quad (x = 0) \\ y^3 = 16\sqrt{3} \quad (**) \end{cases}$$

$$(**) \quad y^3 = 16\sqrt{3} \iff y = \sqrt[3]{16\sqrt{3}} = \sqrt[6]{768} = 2\sqrt[6]{12}$$

3. Soit la conique d'équation $\mathcal{C} \equiv 5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$.

   (a) Ecrire les équations des tangentes et normales[1] à cette conique en ses points d'abscisse 2.

1. La normale en un point d'une conique est la perpendiculaire à la tangente à la conique en ce point.

(b) Ecrire les équations des tangentes à la conique formant un angle de 60ř avec l'axe Ox. Quelles sont les coordonnées des points de tangence ?

4. La tangente et la normale[1] en un point d'une ellipse sont les bissectrices des angles formés par les droites qui joignent ce point aux foyers. Démontrer.

Soit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Soit $M(\alpha, \beta) \to t : \frac{x\alpha}{a^2} + \frac{y\beta}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{y\beta}{b^2} = 1 - \frac{x\alpha}{a^2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{b^2}{\beta} - x \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{b^2}{a^2}$

$n \equiv y - \beta = \frac{\beta \cdot a^2}{\alpha b^2} (x - \alpha)$

- Cherchons les coordonnées de N, intersection de n et Ox $(y = 0)$

$\Leftrightarrow -\cancel{\beta} \cdot \frac{\alpha b^2}{\cancel{\beta} a^2} = x - \alpha \Leftrightarrow x = \alpha - \frac{\alpha b^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{a^2}(a^2 - b^2)$

$= \frac{\alpha}{a^2} c^2$

- On a : $F'(-c, 0)$

$F(c, 0)$

$N\left(\frac{\alpha}{a^2} c^2, 0\right)$

$M(\alpha, \beta)$ et $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$

1. La normale en un point d'une conique est la perpendiculaire à la tangente à la conique en ce point

• $\Rightarrow \overrightarrow{MF'} : (-c-\alpha, -\beta) \Rightarrow \|\overrightarrow{MF'}\| = \sqrt{(c+\alpha)^2+\beta^2}$

$\overrightarrow{MN} : \left(-\alpha + \dfrac{\alpha c^2}{a^2}, -\beta\right)$

$= \left(-\alpha\left(1 - \dfrac{c^2}{a^2}\right), -\beta\right) = \left(-\dfrac{\alpha}{a^2}(a^2-c^2), -\beta\right)$

$= \left(-\dfrac{\alpha b^2}{a^2}, -\beta\right) \Rightarrow \|\overrightarrow{MN}\| = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 b^4 + \beta^2 a^4}}{a^2}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\alpha \frac{b^2}{a^2}(c+\alpha) + \beta^2}{\sqrt{(c+\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 b^4+\beta^2 a^4}}{a^2}}$$

• $\Rightarrow \overrightarrow{MF} : (c-\alpha, -\beta) \Rightarrow \|\overrightarrow{MF}\| = \sqrt{(c-\alpha)^2+\beta^2}$

$\overrightarrow{MN} : \left(-\dfrac{\alpha b^2}{a^2}, -\beta\right) \Rightarrow \|\overrightarrow{MN}\| = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 b^4+\beta^2 a^4}}{a^2}$

$$\Rightarrow \cos\alpha' = \frac{-\alpha \frac{b^2}{a^2}(c-\alpha) + \beta^2}{\sqrt{(c-\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 b^4+\beta^2 a^4}}{a^4}}$$

• $\cos\alpha = \cos\alpha'$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha \frac{b^2}{a^2}(c+\alpha) + \beta^2}{\sqrt{(c+\alpha)^2+\beta^2}} = \frac{-\alpha \frac{b^2}{a^2}(c-\alpha) + \beta^2}{\sqrt{(c-\alpha)^2+\beta^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha b^2 c + \overbrace{\alpha^2 b^2 + a^2\beta^2}^{a^2b^2}}{\sqrt{(\underbrace{c^2+\alpha^2+\beta^2}_{A}) + 2c\alpha}} = \frac{-\alpha b^2 c + \overbrace{\alpha^2 b^2 + a^2\beta^2}^{a^2b^2}}{\sqrt{(\underbrace{\alpha^2+\beta^2+c^2}_{A}) - 2c\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha \cancel{b^2} c + a^2 \cancel{b^2})\sqrt{A - 2c\alpha} = (-\alpha \cancel{b^2} c + a^2 \cancel{b^2})\sqrt{A + 2\alpha c}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha c + a^2)^2 (A - 2c\alpha) = (-\alpha c + a^2)^2 (A + 2c\alpha)$$

$$\Leftrightarrow (\overbrace{\alpha^2 c^2 + a^4}^{B} + 2\alpha c a^2)(A - 2c\alpha) = \ldots$$

$$\ldots (\underbrace{\alpha^2 c^2 + a^4}_{B} - 2\alpha c a^2)(A + 2c\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{AB} - \cancel{2}\cancel{c}\cancel{\alpha} B + \cancel{2} A \cancel{\alpha}\cancel{c} a^2 - \cancel{4c^2\alpha^2 a^2} = \ldots$$

$$\ldots \cancel{BA} + \cancel{2}\cancel{c}\cancel{\alpha} B - \cancel{2} A \cancel{\alpha}\cancel{c} a^2 - \cancel{4c^2\alpha^2 a^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2} A a^2 = \cancel{2} B$$

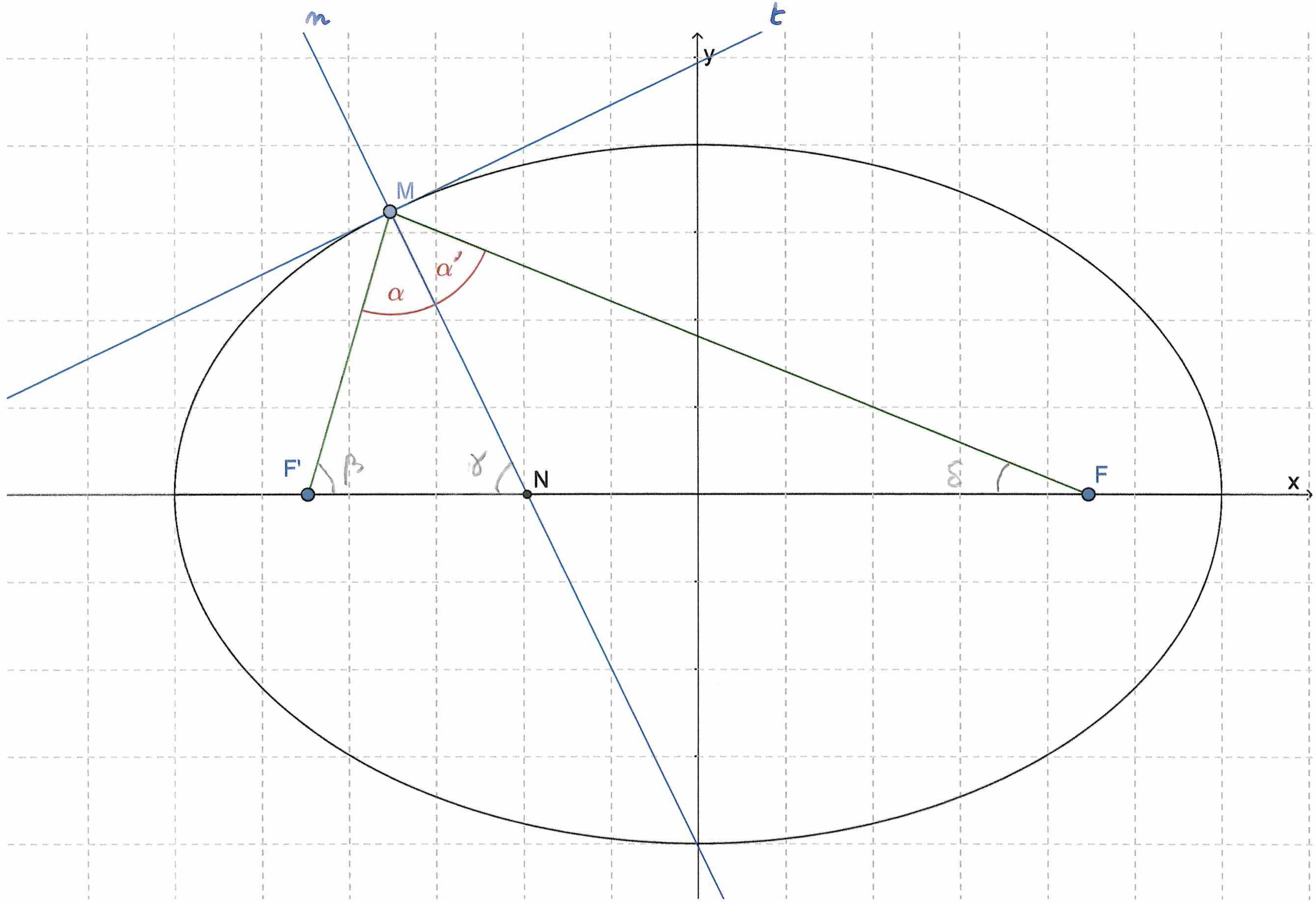
$$\Leftrightarrow a^2(c^2 + \alpha^2 + \beta^2) = a^4 + \alpha^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 + \alpha^2 a^2 + a^2\beta^2 - a^4 - \alpha^2 c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2(a^2 - c^2) + \beta^2 a^2 + a^2(c^2 - a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$$

ok car $(\alpha, \beta) \in E$.



n
t
y
M
α
α'
F'
β
γ
N
ε
F
x

5. Si une droite coupe une hyperbole en M et M', alors elle coupe les asymptotes en P et P' et les segments $[MM']$ et $[PP']$ ont même milieu. Démontrer.

$H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad$ $AO \equiv y = \pm \frac{b}{a} x$

$d \equiv y = mx + p$

- $d \cap H$ $\begin{cases} y = mx + p & (1) \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 & (2) \end{cases}$

(1) dans (2) $\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2(mx+p)^2 = a^2b^2$

$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mpx - a^2p^2 - a^2b^2 = 0$

$\Delta = 4a^4m^2p^2 + 4(b^2 - a^2m^2)(a^2p^2 + a^2b^2)$

$= \dots$

$x_{1,2} = \frac{2a^2mp \pm \sqrt{\Delta}}{2(b^2 - a^2m^2)}$ $\quad \left(y_{1,2} = \frac{2a^2m^2p \pm m\sqrt{\Delta}}{2(b^2 - a^2m^2)} + p \right)$

- coord de M :

$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4a^2mp}{4(b^2 - a^2m^2)} = \frac{a^2mp}{(b^2 - a^2m^2)}$

$y_m = m x_m + p = \frac{m^2a^2p}{b^2} + p$

• $d \cap AO_1$: $\begin{cases} y = mx + p & (3) \\ y = \pm \frac{b}{a} x & (4) \end{cases}$

$$(3)\&(4) \iff mx + p = \pm \frac{b}{a} x$$

$$\iff \left(m \mp \frac{b}{a}\right) x = -p$$

$$\iff x = \frac{-p}{m \mp \frac{b}{a}}$$

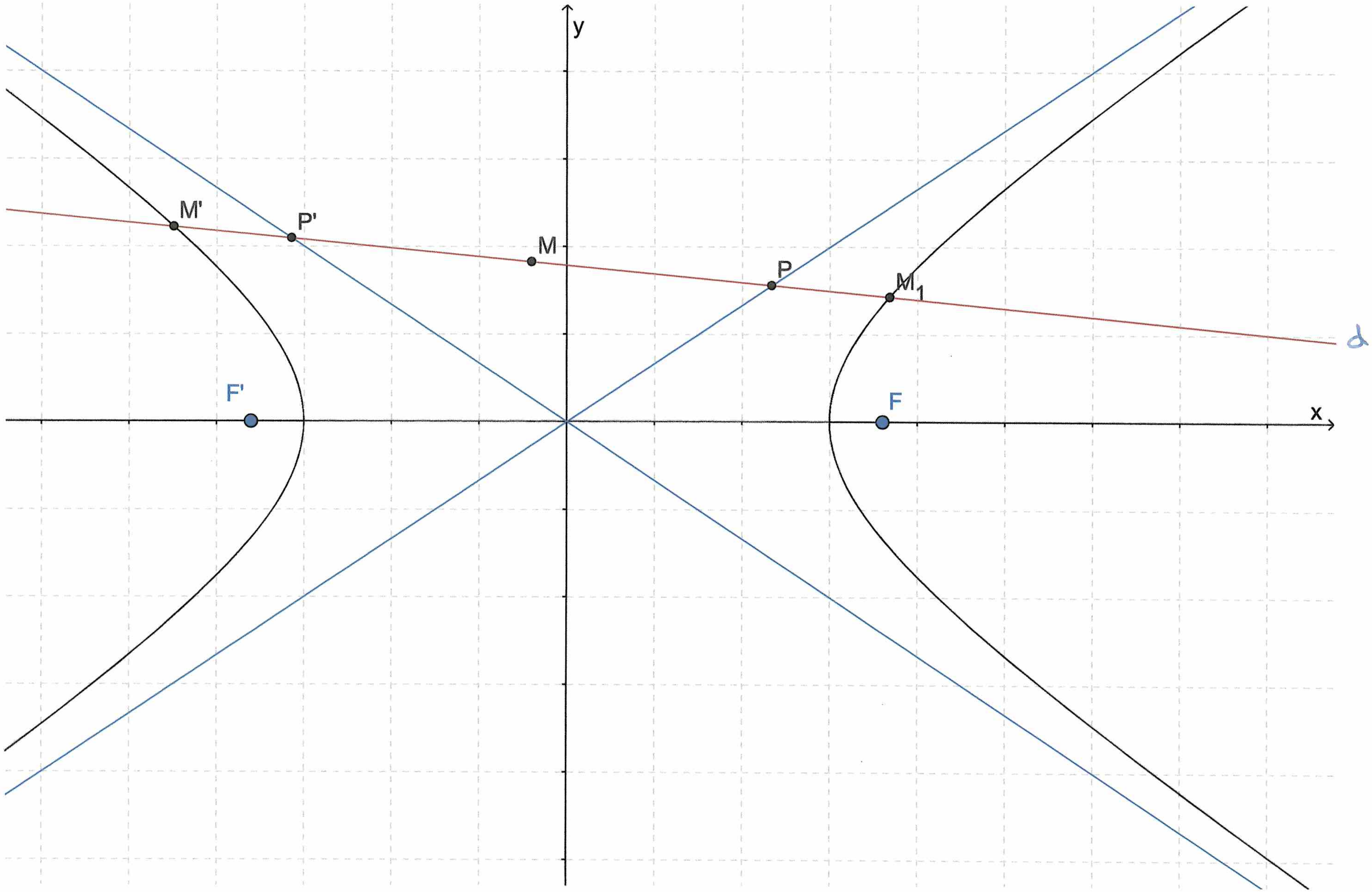
• Vérif Π :

$$x_\Pi = \frac{1}{2}\left(\frac{-p}{m - \frac{b}{a}} + \frac{-p}{m + \frac{b}{a}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-pm - \cancel{\frac{pb}{a}} - pm + \cancel{\frac{pb}{a}}}{m^2 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{-a^2 pm}{a^2 m^2 - b^2}$$

$$= \frac{a^2 pm}{b^2 - a^2 m^2}$$



y
x
M'
P'
M
P
M1
d
F'
F