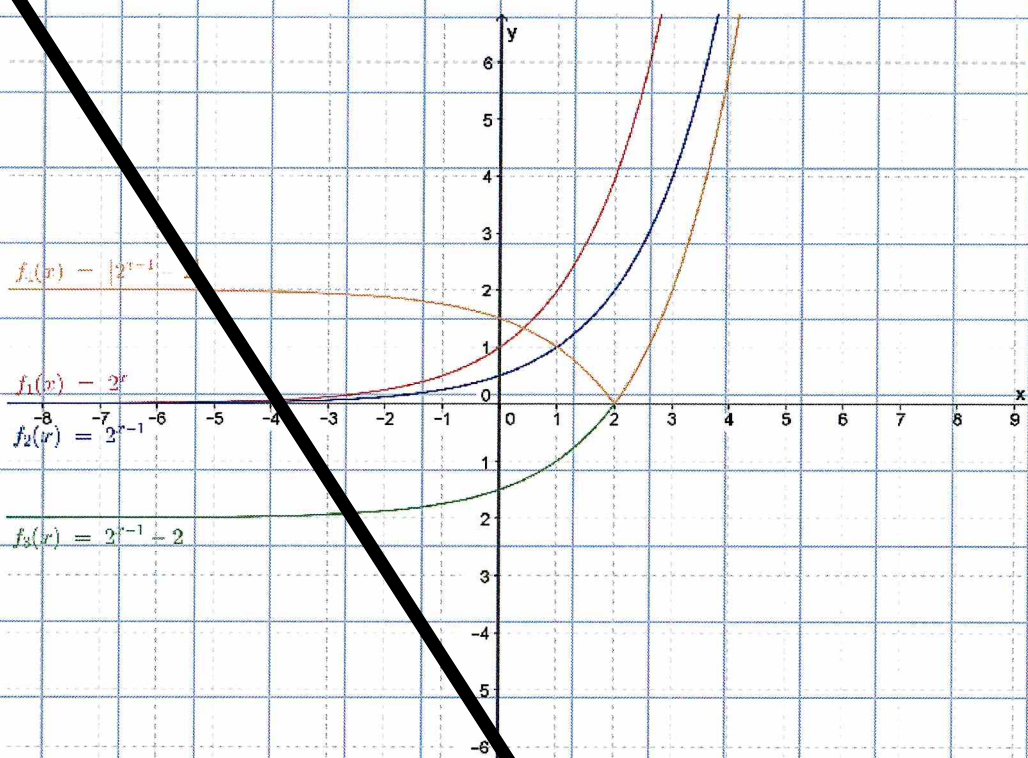


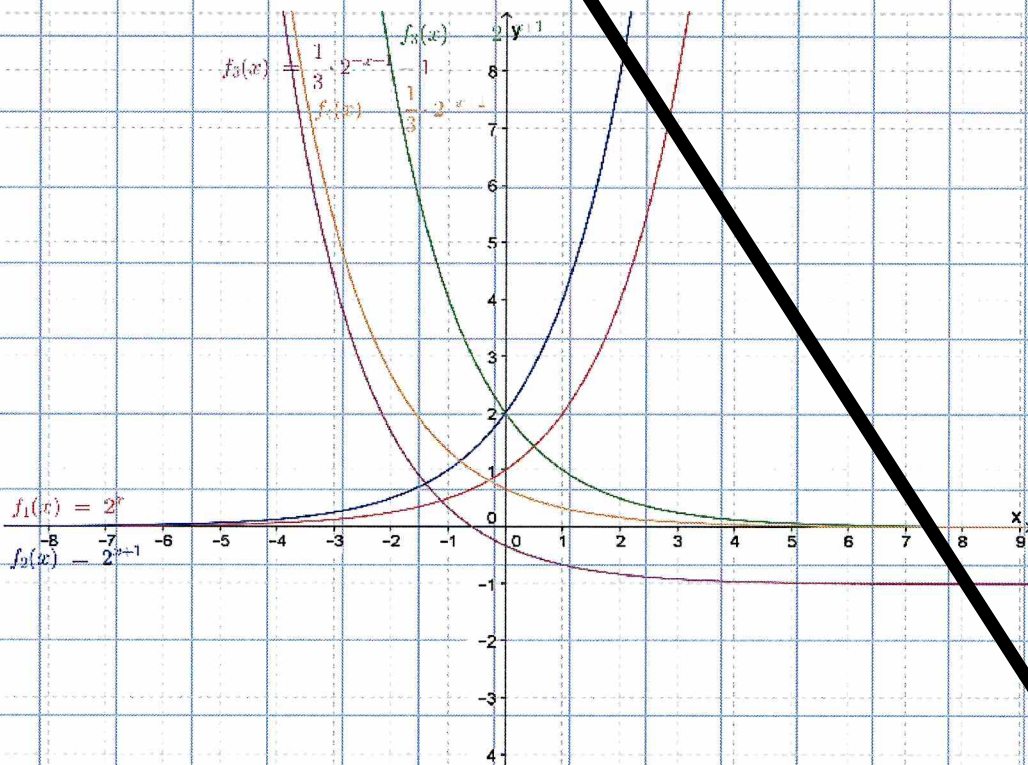
# 1 Fonctions exponentielles

1. Etablir le graphe de la fonction  $f(x) = 2^x$ . Etablir le graphe des fonctions suivantes par manipulations graphiques de fonctions. Déterminer ensuite le domaine de définition, l'image et le(s) zéro(s) éventuels de la fonction.

(a)  $f(x) = |2^{x-1} - 2|$



(b)  $f(x) = \frac{1}{3}2^{x+1} - 1$



2. Résoudre les équations suivantes

(a)  $2^x = 8$

$$2^n = 2^3 \quad (\Rightarrow) \quad n = 3$$

(b)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} = \frac{1}{27}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$(\Rightarrow) \quad 2n+1 = 3 \quad (\Rightarrow) \quad n = 1$$



$$(c) 2^{5x-3} = \frac{1}{4}$$

$$2^{5x-3} = 2^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 5x - 3 = -2 \quad \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$(d) 2^{x^2} = 4 \cdot 2^x$$

$$2^{x^2} = 2^2 \cdot 2^x$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2} = 2^{2+x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$$(e) 3^{|x|} \cdot 9^x = \frac{1}{3}$$

$$3^{|x|} \cdot 3^{2x} = 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow |x| + 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2x = -1 & \text{si } x \geq 0 \\ -x + 2x = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} & \text{si } x \geq 0 \quad \text{A.R.} \\ x = -1 & \text{si } x < 0 \quad \text{OK} \end{cases}$$

$$S: \{-1\}$$

$$(f) \left(\frac{1}{16}\right)^x - 3\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} - 3\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4$$

On pose  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  (c.s.:  $y > 0$ )

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} < 4$$

-1 (A.R.)

$$y = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4 \Leftrightarrow x = -1$$



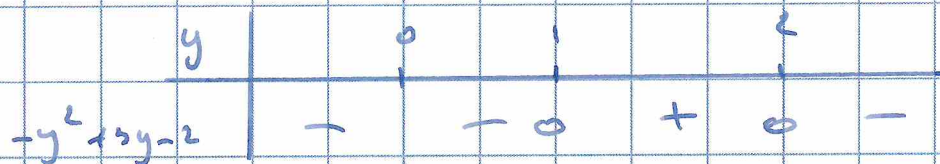
$$(g) -2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 2 \leq 0$$

On pose  $y = 2^x$  ( $y > 0$ )

$$-y^2 + 3y - 2 \leq 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} < 2$$



$$\Rightarrow y \in ]0, 1] \cup [2, +\infty$$

$$\Leftrightarrow 2^x \in ]0, 1] \cup [2, +\infty$$

$$\Leftrightarrow x \in -\infty, 0] \cup [1, +\infty$$

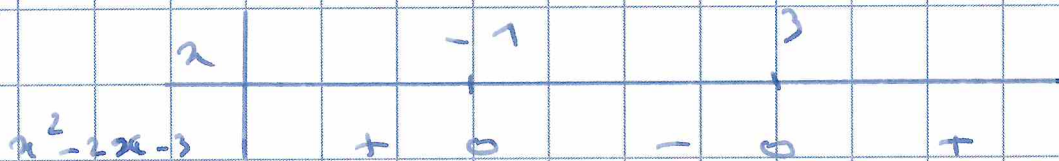
$$(h) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 2x - 6} \leq 27$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 2x - 6} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 6 \geq -3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} < \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$



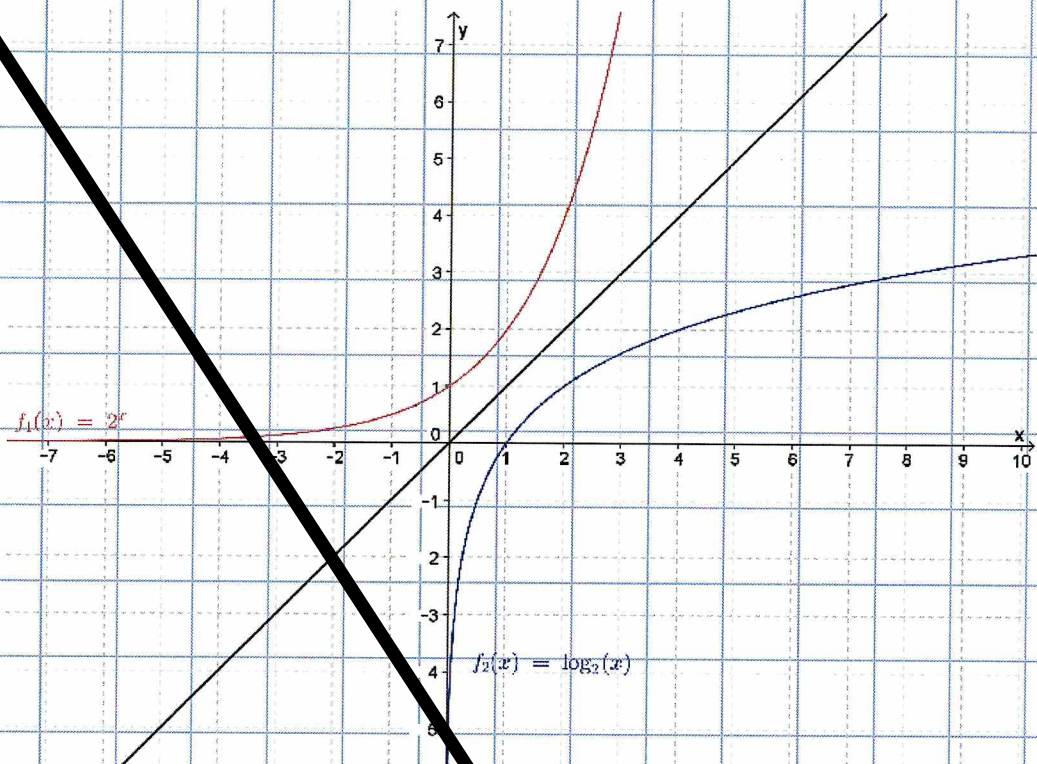
$$S: -\infty, -1] \cup [3, +\infty$$



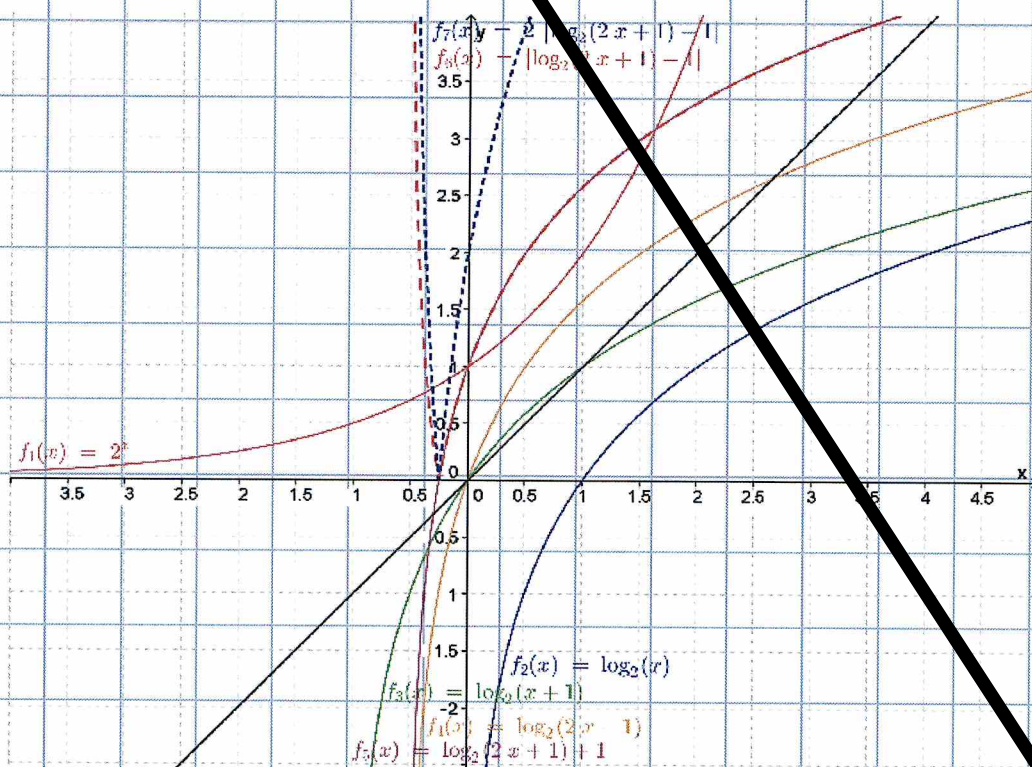
## 2 Fonctions logarithmiques

1. Etablir le graphe de la fonction  $f(x) = 2^x$ . A partir de ce graphe, et par manipulations graphiques de fonctions, établir le graphe des fonctions

(a)  $f(x) = \log_2 x$

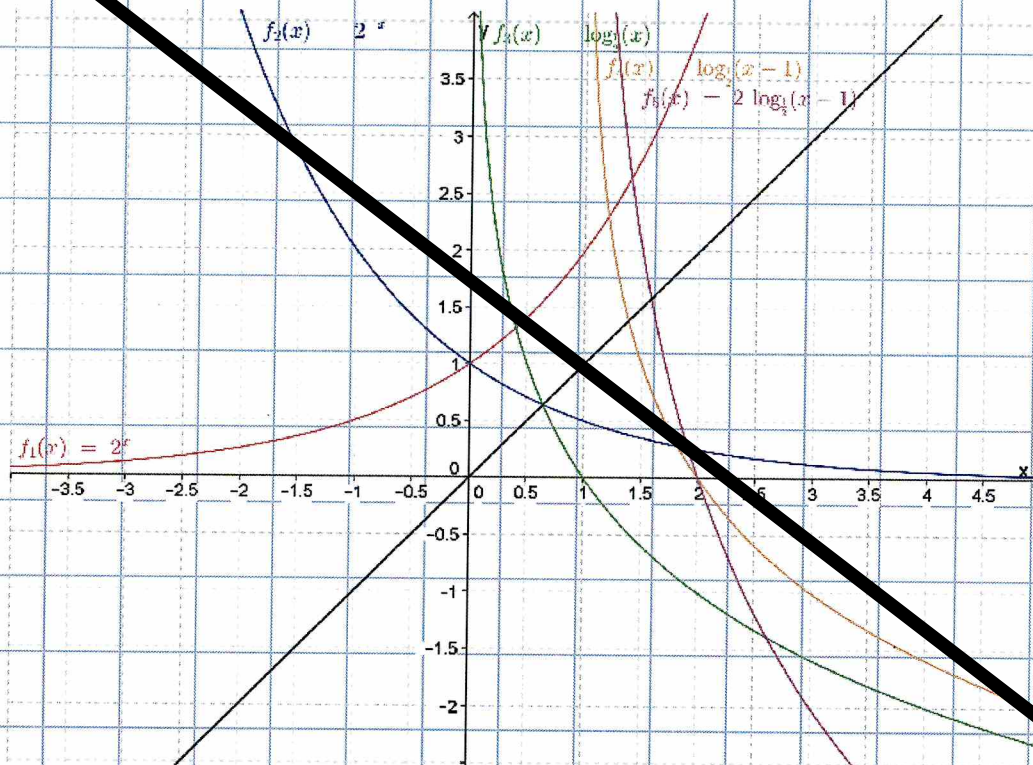


(b)  $f(x) = 2|\log_2(2x+1) + 1|$





(c)  $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$



2. Sans utiliser la calculatrice, calculer :

(a)  $\log_3 81 = 4$

car  $3^4 = 81$

(b)  $\log_{\frac{1}{4}} 256 = -4$

car  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-4} = 256$

(c)  $\log \sqrt{1000} = \frac{3}{2}$

car  $10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1000}$

(d)  $\log_a \sqrt[3]{a^{2n}} = \frac{2n}{3}$

car  $a^{\frac{2n}{3}} = \sqrt[3]{a^{2n}}$

3. Si  $\log_2 x = 41.43$ , calculer :

$$(a) \log_2 8x = \log_2 8 + \log_2 x = 3 + 41,43 \\ = 44,43$$

$$(b) \log_2 \sqrt{2}x = \log_2 \sqrt{2} + \log_2 x = \frac{1}{2} + 41,43 \\ = 41,93$$

$$(c) \log_2 \frac{x}{64} = \log_2 x - \log_2 64 = 41,43 - 6 \\ = 35,43$$

$$(d) \log_2 x^3 = 3 \log_2 x = 3 \cdot 41,43 \\ = 124,29$$

4. Démontrer que

$$(a) \log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = 1$$

$$I = \frac{\cancel{\log a}}{\cancel{\log b}} \cdot \frac{\cancel{\log b}}{\cancel{\log c}} \cdot \frac{\log c}{\log a}$$

$$= 1$$

$$= II$$



$$(b) \log_a p \cdot \log_b p + \log_b p \cdot \log_c p + \log_c p \cdot \log_a p = \frac{\log_a p \log_b p \log_c p}{\log_{abc} p}$$

$$I = \log_a p \log_b p \log_c p \left( \frac{1}{\log_c p} + \frac{1}{\log_a p} + \frac{1}{\log_b p} \right)$$

$$= \log_a p \log_b p \log_c p (\log_p c + \log_p a + \log_p b)$$

$$= \log_a p \log_b p \log_c p \cdot \log_p abc$$

$$= \frac{\log_a p \log_b p \log_c p}{\log_{abc} p}$$

$$= II$$

5. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

(a)  $\log_{0.5}(1 - 4x)$

CE :  $1 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$

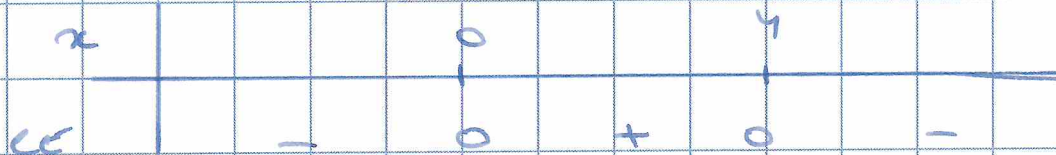
donc  $D_f : -\infty, \frac{1}{4} [$



(b)  $\ln(4x - x^2)$

CE:  $4x - x^2 > 0$

$\Leftrightarrow x(4-x) > 0$



don f:  $]0, 4[$

$$(c) \frac{e^x - 1}{e^{x+1} - 1}$$

$$\underline{CE}: e^{n+1} - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{n+1} \neq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{n+1} \neq e^0$$

$$\Leftrightarrow n+1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow n \neq -1$$

$$\text{dom } f: \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$



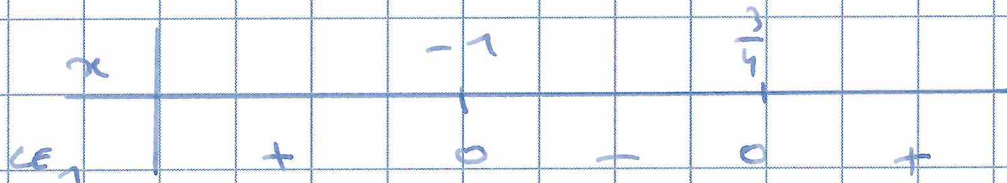
$$(d) \log(4x^2 + x - 3) - \ln(9 - x^2) + \log 3$$

$$\underline{CE1}: 4x^2 + x - 3 > 0$$

$$2: 9 - x^2 > 0$$

$$\underline{CE1}: \Delta = 1 + 48 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{8}$$



$$\underline{CE2}: x \in ]-3, 3[$$



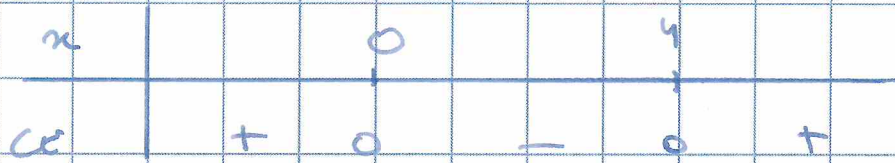
$CE1:$

$CE2:$

$$\text{dom } f: ]-3, -1[ \cup ]\frac{3}{4}, 3[$$

$$(e) \log \frac{1}{4x^2 - 16x}$$

$$\underline{CE} : 4x^2 - 16x > 0 \Leftrightarrow 4x(x-4) > 0$$



$$\text{Dom } f : -\infty, 0[ \cup ]4, +\infty$$



6. Résoudre dans  $\mathbb{R}$

$$(a) \log_5(7x+6) = 3\log_5 x$$

$$\underline{\text{C.E.}} : \left. \begin{array}{l} 7x+6 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{6}{7} \\ x > 0 \end{array} \right\} x > 0$$

$$\log_5(7x+6) = \log_5 x^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 7x - 6 = 0 \quad P(x) = 0$$

Horner

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$\Delta \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x-3) = 0$$

$$S : \{ 3 \} \quad \text{vers les C.E.}$$

$$(b) \log_{0.5}(x-1) + \log_{0.5} 2 - \log_{0.5} x = 1$$

$$\underline{CE}: \left. \begin{array}{l} x-1 > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 1$$

$$\log_{0.5} \frac{2(x-1)}{x} = \log_{0.5} 0.5$$

$$\Rightarrow \frac{2(x-1)}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4x - 4 - x = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3}$$



$$(c) \log x > 2$$

$$\underline{\text{CE}} : x > 0$$

$$\log x > \log 100 \iff x > 100$$

$$S: ]100, +\infty$$

$$(d) \log_{0.2}(2x-1) \leq 3$$

$$\underline{CF}: 2x-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$\log_{0.2}(2x-1) \leq \log_{0.2} 0.2^3$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 \geq \frac{8}{1000}$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq \frac{126}{125}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{63}{125}$$

$$S: \left[ \frac{63}{125}, +\infty \right)$$



$$(e) \ln(x-1) = \ln 3 + \ln(x^2 + 2x - 1)$$

$$\underline{CE} : \cdot x > 1$$

$$\cdot x^2 + 2x - 1 > 0$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \begin{matrix} < -1 + \sqrt{2} \\ < -1 - \sqrt{2} \end{matrix}$$

T.S

$$\rightarrow x \in -\infty, -1 - \sqrt{2} \cup -1 + \sqrt{2}, +\infty$$

$$\Rightarrow x \in ]1, +\infty$$

$$x-1 = 3(x^2 + 2x - 1)$$

$$(E) \quad 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{6} \begin{matrix} < \frac{1}{3} \text{ (AR)} \\ < -2 \text{ (AR)} \end{matrix}$$

$$S = \emptyset$$

$$(f) \ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0$$

$$\underline{CE} : x > 0$$

On pose  $\ln x = y$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 2 \\ \ln x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ x = e \end{cases}$$



$$(g) 2\ln x - \ln 2 \geq \ln(1-2x)$$

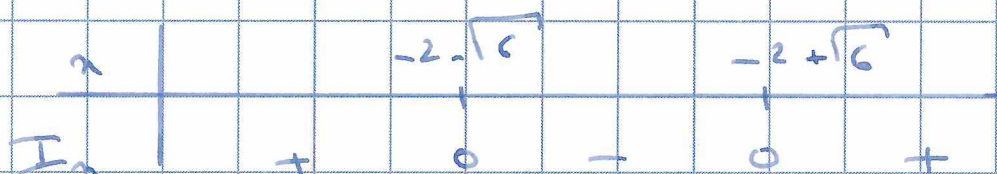
$$\underline{CE} : \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \end{array} \right\} x \in ]0, \frac{1}{2}[$$

$$\frac{x^2}{2} \geq 1-2x$$

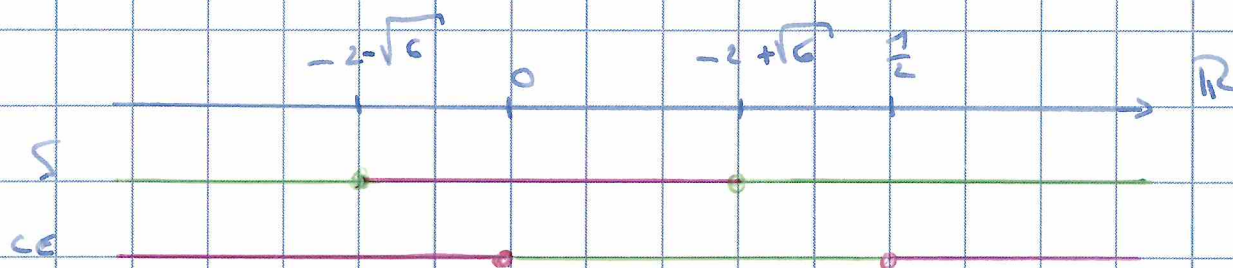
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 2 \geq 0$$

$$\Delta = 16 + 8 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$



$$\Rightarrow x \in -\infty, -2-\sqrt{6}] \cup [-2+\sqrt{6}, +\infty$$



$$S : [-2+\sqrt{6}, \frac{1}{2}[$$

$$(h) \frac{\ln x + 1}{1 - \ln x} < 0$$

CF:

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

zeros:  $\ln x + 1 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{1}{e}$

$-\ln x + 1 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = e$

| $x$         | 0   | $\frac{1}{e}$ |   | $e$ |                |
|-------------|-----|---------------|---|-----|----------------|
| $\ln x + 1$ | /// | -             | 0 | +   | +              |
| $1 - \ln x$ | /// | +             | + | 0   | -              |
| $I_n$       | /// | -             | 0 | +   | <del>+</del> - |

$$S: ]0, \frac{1}{e}[ \cup ]e, +\infty$$



$$(i) \log x^2 = \log^2 x$$

$$\underline{CE} : x > 0$$

$$2 \log x - \log^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log x (2 - \log x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log x = 0 \\ 2 - \log x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 100 \end{cases}$$

$$(j) x^{\log x} = 100$$

$$\underline{CF} : n > 0$$

$$\log n^{\log n} = \log 100$$

$$\Leftrightarrow \log^2 n = 2$$

$$\Leftrightarrow \log n = \pm \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 10$$



$$(k) \log_2 x + \ln x = 5$$

$$\underline{\text{CF: } n > 0}$$

$$\frac{\ln n}{\ln 2} + \ln n = 5$$

$$\Leftrightarrow \ln n \left( \frac{1 + \ln 2}{\ln 2} \right) = 5$$

$$\Leftrightarrow \ln n = \frac{5 \ln 2}{1 + \ln 2}$$

$$\Leftrightarrow n = e^{\frac{5 \ln 2}{\ln 2 + 1}}$$

OU

$$\log_2 n + \frac{\log_2 n}{\log_2 e} = 5$$

$$\Leftrightarrow \log_2 n \left( 1 + \frac{1}{\log_2 e} \right) = 5$$

$$\Leftrightarrow \log_2 n (1 + \ln 2) = 5$$

$$\Leftrightarrow \log_2 n = \frac{5}{1 + \ln 2}$$

$$\frac{5}{1 + \ln 2}$$

$$\Leftrightarrow n = 2$$

$$(1) 10^{2x} - 10^x = 5$$

Soit  $y = 10^x$  ( $y > 0$ )

$$y^2 - y - 5 = 0$$

$$\Delta = 1 + 20 = 21$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \quad (\text{AR}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \log \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

Pierre  
Renaudie  
28/03/2018  
6h en 5 min  
B23 12:28



$$(m) e^x + 5e^{-x} = 6$$

$$e^x + \frac{5}{e^x} = 6$$

$$e^{2x} - 6e^x + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16$$

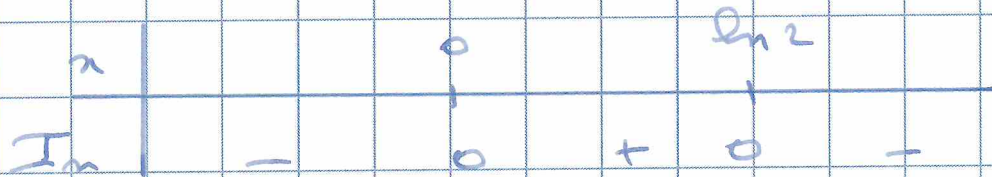
$$e^{x_{1,2}} = \frac{6 \pm 4}{2} < \frac{5}{1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$(n) -e^{2x} + 3e^x - 2 \leq 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$e^{x_{1,2}} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} 1 \rightarrow x = - \\ 2 \rightarrow x = \ln 2 \end{cases}$$



$$x \in -\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty$$



7. Dériver :

(a)  $\ln(4x - 5)$

$$(\ln(4x-5))' = \frac{4}{4x-5}$$

(b)  $\ln^3 x - 3\ln^2 x - 5\ln x$

$$\begin{aligned} (\ln^3 x - 3\ln^2 x - 5\ln x)' &= 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} - 6\ln x \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{3\ln^2 x - 6\ln x - 5}{x} \end{aligned}$$



$$(c) \ln \frac{3-x}{3+x}$$

$$\left( \ln \frac{3-x}{3+x} \right)' = \frac{-(3+x) - (3-x)}{(3+x)^2} \cdot \left( \frac{3-x}{3+x} \right)$$

$$= - \frac{6}{(3+x)^2} \cdot \frac{3-x}{3+x}$$

$$= - \frac{6}{9-x^2}$$

$$= \frac{6}{x^2-9}$$

(d)  $e^{x^2}$

$$(e^{x^2})' = 2x e^{x^2}$$



(e)  $\frac{x}{e^x}$

$$\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{e^x - x e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{1-x}{e^x}$$

$$(f) \frac{\ln x}{xe^x}$$

$$\left( \frac{\ln x}{xe^x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot xe^x - \ln x (e^x + xe^x)}{(xe^x)^2}$$

$$= \cancel{x}^1 \cdot \cancel{e^x}^1 - \ln x (e^x + \cancel{x}^1 \cancel{e^x}^1)$$

$$= \frac{1 - \ln x (1 + x)}{x^2 e^x}$$



$$(g) \ln^2(e^{2x} - 1)$$

$$\left[ \ln^2(e^{2x} - 1) \right]' = 2 \ln(e^{2x} - 1) \cdot \frac{(e^{2x} - 1)'}{e^{2x} - 1}$$

$$= 4 \ln(e^{2x} - 1) \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}$$

$$(h) \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}$$

$$\left( \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}} \right)' = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}} \frac{-e^x(1+e^x) - (1-e^x)e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{-e^x}{\sqrt{(1-e^x)(1+e^x)^3}}$$



(i)  $3^{2x+1}$

$$(3^{2x+1})' = 2 \cdot 3^{2x+1} \ln 3$$

(i)  $\frac{3^x + 2^x}{5^x}$

$$\left( \frac{3^x + 2^x}{5^x} \right)' = \frac{(3^x \ln 3 + 2^x \ln 2) \cancel{5^x} - \cancel{5^x} \ln 5 (3^x + 2^x)}{5^{xx}}$$

$$= \frac{1}{5^x} \left[ 3^x \ln \frac{3}{5} + 2^x \ln \frac{2}{5} \right]$$



(k)  $e^x(\sin x + \cos x)$

$$\begin{aligned} [e^x(\sin x + \cos x)]' &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \\ &= 2e^x \cos x \end{aligned}$$

(1)  $\ln(\sin x)$

$$\begin{aligned} [\ln(\sin x)]' &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \cot x \end{aligned}$$



(m)  $x^{\ln x}$

On cherche la dérivée de  $y = x^{\ln x}$

$$\Leftrightarrow \ln y = \ln x^{\ln x} \\ = (\ln x)^2$$

$$\Leftrightarrow [\ln y]' = [\ln^2 x]'$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow y' = 2 x^{\ln x} \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow (x^{\ln x})' = 2 x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$$

8. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation  $y = \frac{\ln x}{x} - 1$  au point d'abscisse 2.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - 1$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{1 - \ln 2}{4}$$

$$t = y - \left( \frac{\ln 2 - 2}{2} \right) = \frac{1 - \ln 2}{4} (x - 2)$$

$$\begin{aligned} &= y = \frac{1 - \ln 2}{4} x - \left( \frac{1 - \ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2 - 2}{2} \\ &= \frac{1 - \ln 2}{4} x + \frac{3 - 2 \ln 2}{2} \end{aligned}$$



9. Calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{FI}$$

$$\text{RH} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2} = -\infty \cdot 0 \text{ FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2}}$$

$$\text{RH} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x e^{x^2}} = 0$$



$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{FI}$$

$$\stackrel{RH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2}$$

$$= 0$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \infty \cdot 0 \text{ FI}$$

$$= \lim_{\pm\infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\text{Rn} = \lim_{\pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{\pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{\pm\infty} \left( -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot -\frac{x^2}{1} \right)$$

$$= \lim_{\pm\infty} \frac{x+1}{x}$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \text{ PI}$$

$$\text{Rn} = \lim_{\pm\infty} \frac{1}{1}$$

$$= 1$$



10. Faire l'étude complète des fonctions suivantes

(a)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

• dom  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \text{quelconque}$

• zéro:  $x = 1$

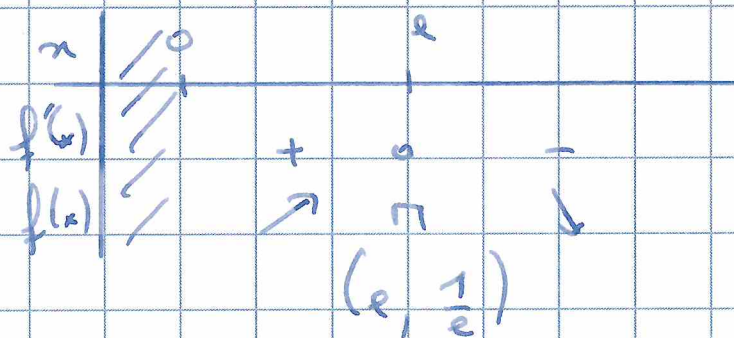
•  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-\infty}{0} = -\infty \Rightarrow AV: x = 0$

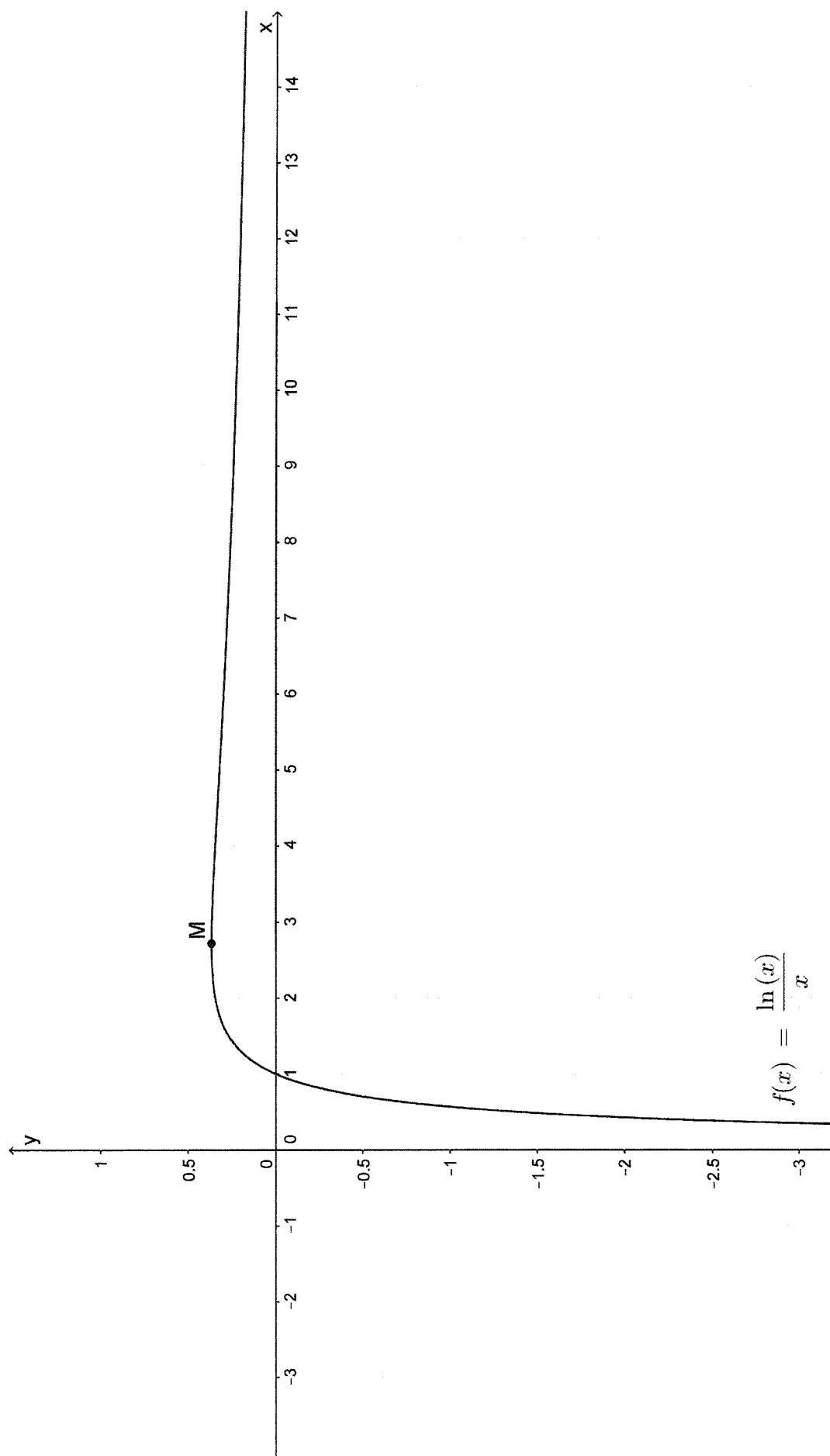
•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$  FI

$\stackrel{RH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow AH: y = 0$

•  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

zéro:  $x = e$   
D:  $x = 0$





$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$



(b)  $f(x) = e^x(x-1)$

donc  $f: \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \rightarrow \text{quelconque}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

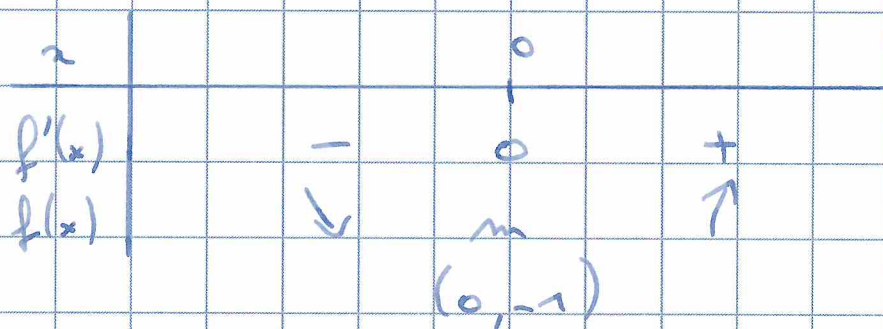
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0. \infty$  FI

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{-x}}$

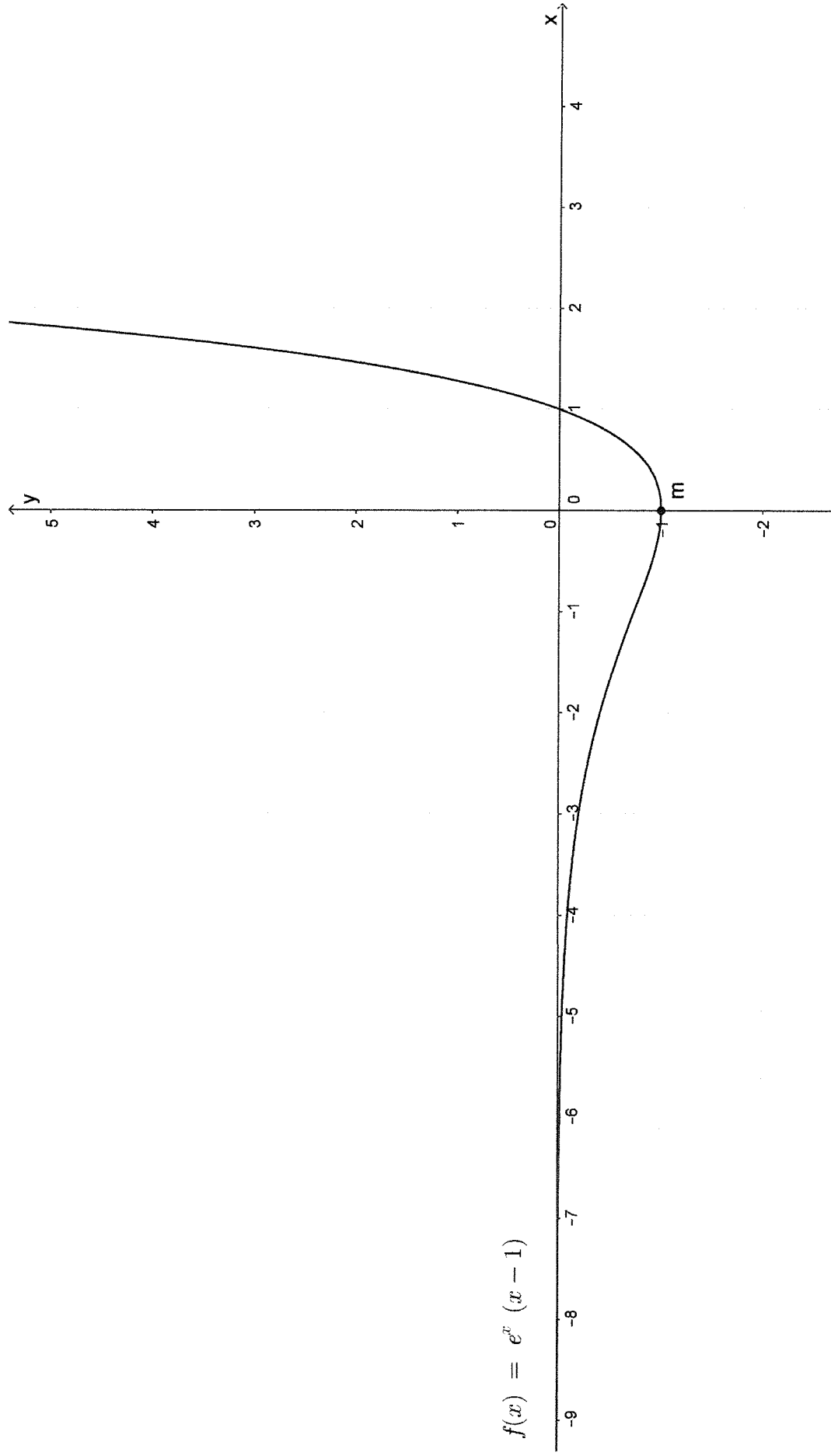
RH  $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

AM<sub>g</sub> = y = 0

$f'(x) = e^x + e^x(x-1)$   
 $= x e^x$



$$f(x) = e^x (x - 1)$$





(c)  $f(x) = x^3 e^x$

dom  $f: \mathbb{R}$

zero:  $x=0$

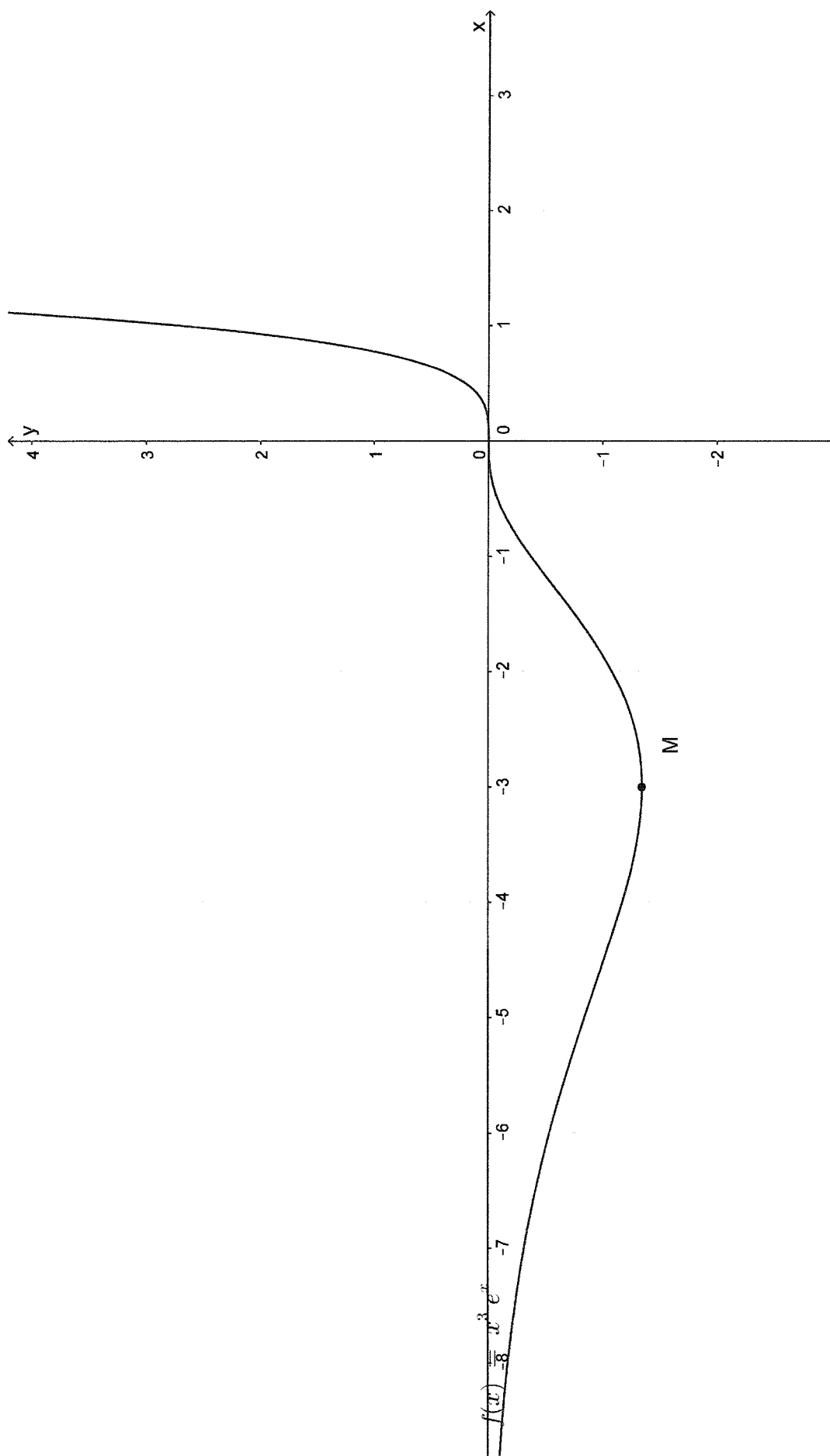
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \cdot 0$  FI  
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{-x}}$

RM(3x)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{e^{-x}} = 0$  AM  $= y=0$

$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x$   
 $= x^2 e^x (x+3)$

|         |                         |            |            |
|---------|-------------------------|------------|------------|
| $x$     | -3                      | 0          |            |
| $f'(x)$ | -                       | +          | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$              | $\nearrow$ | $\nearrow$ |
|         | m                       | TH         |            |
|         | $(-3, -\frac{27}{e^3})$ |            |            |





(d)  $f(x) = e^{\tan x}$

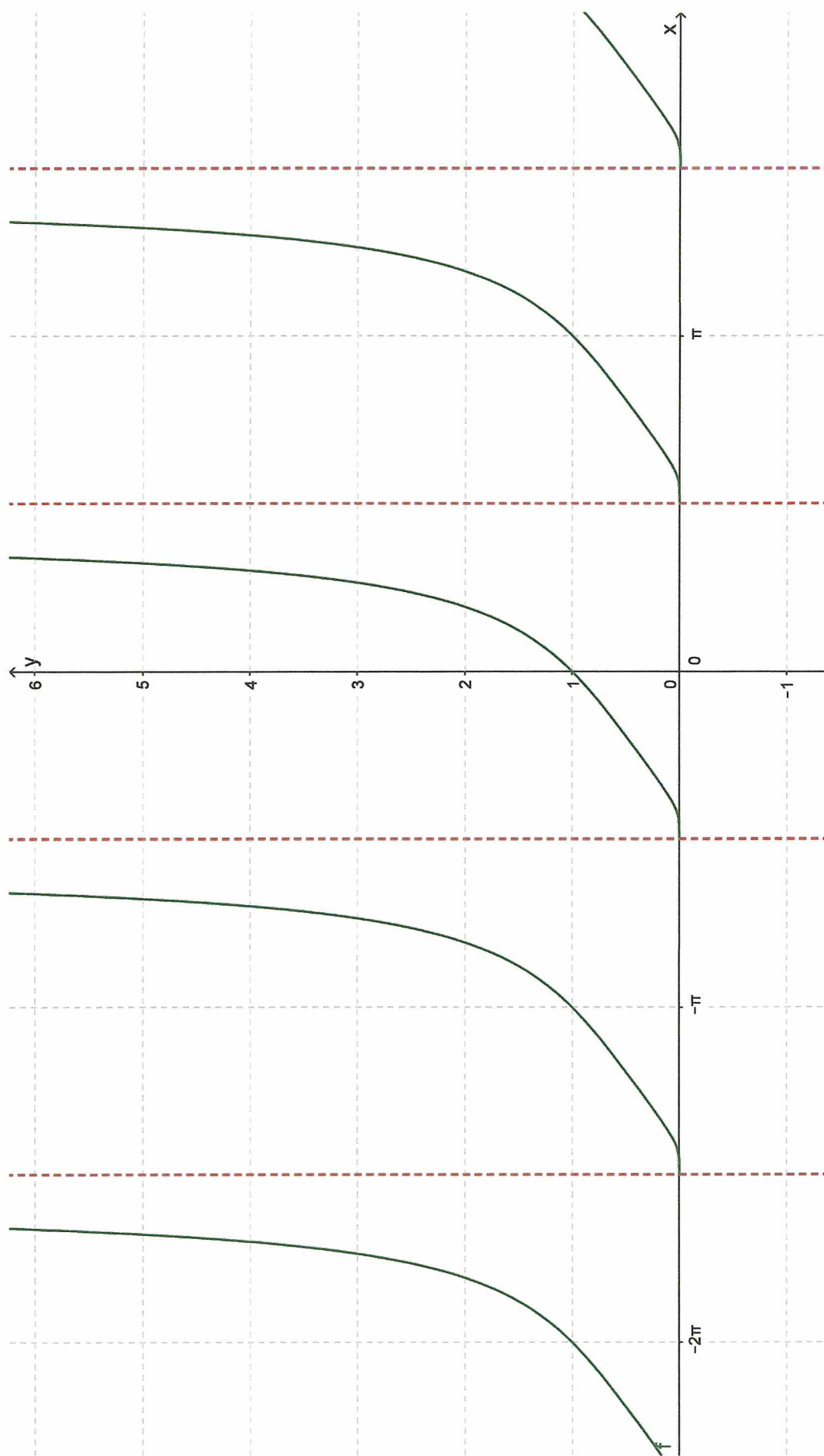
• dom  $f$ :  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad (k \in \mathbb{Z})$

• zéro — , période :  $\pi$

•  $\lim_{\frac{\pi}{2}^+} f(x) = e^{-\infty} = 0$

$\lim_{\frac{\pi}{2}^-} f(x) = e^{+\infty} = \infty$  AV  $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

•  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} e^{\tan x}$   $f'_x > 0$   
 $\rightarrow f'_x$  croissante





(e)  $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$

dom:  $\mathbb{R}$  ( $e^x + 2e^{-x} > 0$ )

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(e^0 + 2e^{-0}) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow e^x + 2e^{-x} = 0$  (imp con  $e^x + 2e^{-x} > 0$ )

Av —

AH  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow \text{Att}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

AO:  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$  FI

RH  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}} = \frac{\infty - 0}{\infty + 0}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (1 - 2e^{-2x})}{e^x (1 + 2e^{-2x})} = 1$

$p = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 2e^{-x}) - x]$

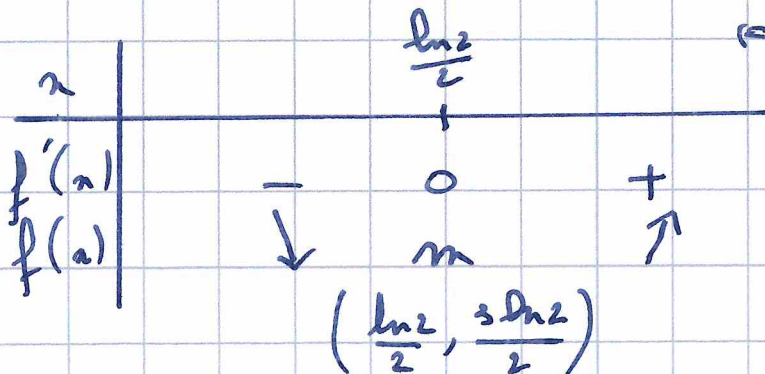
$= \dots$  (trop difficile)  $= 0$

$AO_d \equiv y = x$

De  $\hat{m}$   $AO_d \equiv y = -\infty$

$f'(x) = \frac{e^{2x} - 2}{e^{2x} + 2}$

$e^{2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{2}$



(f)  $f(x) = \ln(\cos^2 x + 1)$

• dom  $f: \mathbb{R}$

• zéros :  $\ln(\cos^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + 1 = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

•  $T = \pi$

• AV ✓

• AH, AO ✓

•  $f'(x) = \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + 1}$

| $x$       | 0            | $\frac{\pi}{2}$      | $\pi$          |
|-----------|--------------|----------------------|----------------|
| $-\sin x$ | 0            | -                    | 0              |
| $\cos x$  | +            | 0                    | -              |
| $f'(x)$   | 0            | 0                    | +              |
| $f(x)$    | $\ln 2$      | 0                    | $\ln 2$        |
|           | $(0, \ln 2)$ | $(\frac{\pi}{2}, 0)$ | $(\pi, \ln 2)$ |



11. Dans certaines conditions, une population de bactéries triple toutes les trois heures. Supposons qu'il y ait initialement 100 bactéries.

(a) Quelle est la population au bout de 15 heures ?

$$t=0, P=100$$

$$t=3h, P=300=100 \cdot 3$$

$$t=6, P=900=3^2$$

$$P_t = P_0 \cdot 3^{\frac{t}{3}}$$

t en heures

$$\begin{aligned} P_{15} &= 100 \cdot 3^{\frac{15}{3}} \\ &= 100 \cdot 3^5 \\ &= 24300 \end{aligned}$$

(b) Déterminer le temps qu'il faut pour que la population atteigne 50000 éléments.

$$P_t = 50000 \Leftrightarrow 50000 = 100 \cdot 3^{\frac{t}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 500 = 3^{\frac{t}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{3} = \log_3 500$$

$$\Leftrightarrow t = 3 \frac{\ln 500}{\ln 3}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 17h$$

12. Un isotope de sodium, le  $^{24}\text{Na}$ , a une demi-vie de 15 heures.

(a) Si l'on prend un échantillon de 2 gr. de cet isotope, combien en reste-t-il au bout de 60 heures ?

$$t = 0, m = 2$$

$$t = 15, m = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$t = 30, m = 0,5$$

$$m_t = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}} \quad t \text{ en heures}$$

$$t = 60 \Rightarrow m_t = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= 0,125 \text{ gr}$$

(b) Combien de temps faut-il pour qu'il n'en reste que 0,01 gr. ?

$$m_t = 0,01 \Rightarrow 0,01 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$$

$$\Rightarrow 0,005 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{15} = \log_{\frac{1}{2}} 0,005$$

$$\Rightarrow t = 15 \frac{\ln 0,005}{\ln 0,5}$$

$$\Rightarrow t \approx 115 \text{ h}$$



### 3 Exercices récapitulatifs

#### 3.1 Fonction n°1

On cherche à étudier le comportement de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$$

L'étude de cette fonction nécessite l'étude d'une fonction annexe

$$g(x) = x^2 - 2 \ln x$$

1. Déterminer le domaine de  $f(x)$ .

$$\text{donc } f: \mathbb{R}_0^+$$

2. Etude de la fonction  $g(x)$ .

- (a) Etudier la variation de  $g(x)$ .

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2}{x} (x^2 - 1)$$

|           |      |   |   |              |     |   |   |
|-----------|------|---|---|--------------|-----|---|---|
| $x$       | $-1$ |   |   | $0$          | $1$ |   |   |
| $x^2 - 1$ | +    | 0 | - | -            | 0   | + | + |
| $x$       | -    | - | - | 0            | +   | + | + |
| $g'(x)$   | -    | 0 | + | <del>0</del> | -   | 0 | + |
| $g(x)$    | ↓    | m | ↑ |              | ↓   | m | ↑ |

$(1, 1)$

- (b) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\text{dom } f$ .

$$\lim_{0^+} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad y_{\min} > 0$$

$$\Rightarrow g(x) > 0$$

3. Etude de la fonction  $f(x)$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f(x)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(a) Calcul des asymptotes

i. Déterminer la limite de  $f(x)$  en 0 et interpréter graphiquement le résultat ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + \frac{1 - \infty}{0} = -\frac{\infty}{0} = -\infty$$

$$AV = x = 0^+$$

ii. Déterminer la limite en  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty + \frac{\infty}{\infty} \quad \text{FI} \quad (*)$$

$$(*) \quad \text{RH} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \quad (\rightarrow \text{Asymptote})$$

iii. Montrer que la droite  $d \equiv y = \frac{x}{2}$  est asymptote de la courbe  $\mathcal{C}$ .

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{x}{2} \right] = 0 \quad (f \text{ est dérivable ici})$$

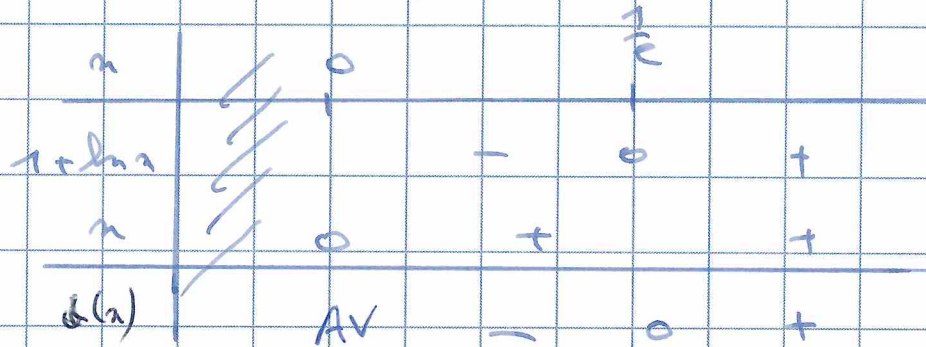
$$\Rightarrow AO = y = \frac{x}{2}$$



iv. Etudier la position de  $C$  par rapport à  $d$ . Montrer en particulier que  $d$  coupe  $C$  en un point  $A$  dont on déterminera les coordonnées.

$$d(n) = f(n) - \frac{n}{2}$$

$$= \frac{\ln n + 1}{n}$$



$f(x)$  sur  $A$   
 $A_0$

$f(x)$  au dessus  
de  $l'AO$

$$A : \left( \frac{1}{e} ; \frac{1}{2e} \right)$$

(b) Etudier les variations de  $f(x)$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cancel{\frac{1}{x}} \cdot \cancel{x} - \cancel{1} \cdot \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2 \ln x}{2x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{2x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ est croissante}$$



- (c) Montrer qu'il existe un point  $B$ , et un seul, de la courbe  $\mathcal{C}$  où la tangente  $t$  à  $\mathcal{C}$  est parallèle à  $d$ . Préciser les coordonnées de  $B$ .

$$m_d = \frac{1}{2} \Rightarrow ? \quad \& \quad f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$B \left( 1, \frac{3}{2} \right)$$

(d) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique  $a$ . Justifier l'encadrement  $0.34 < a < 0.35$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) > 0 \rightarrow \text{monotone (croissante)} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$  par le théorème des valeurs intermédiaires

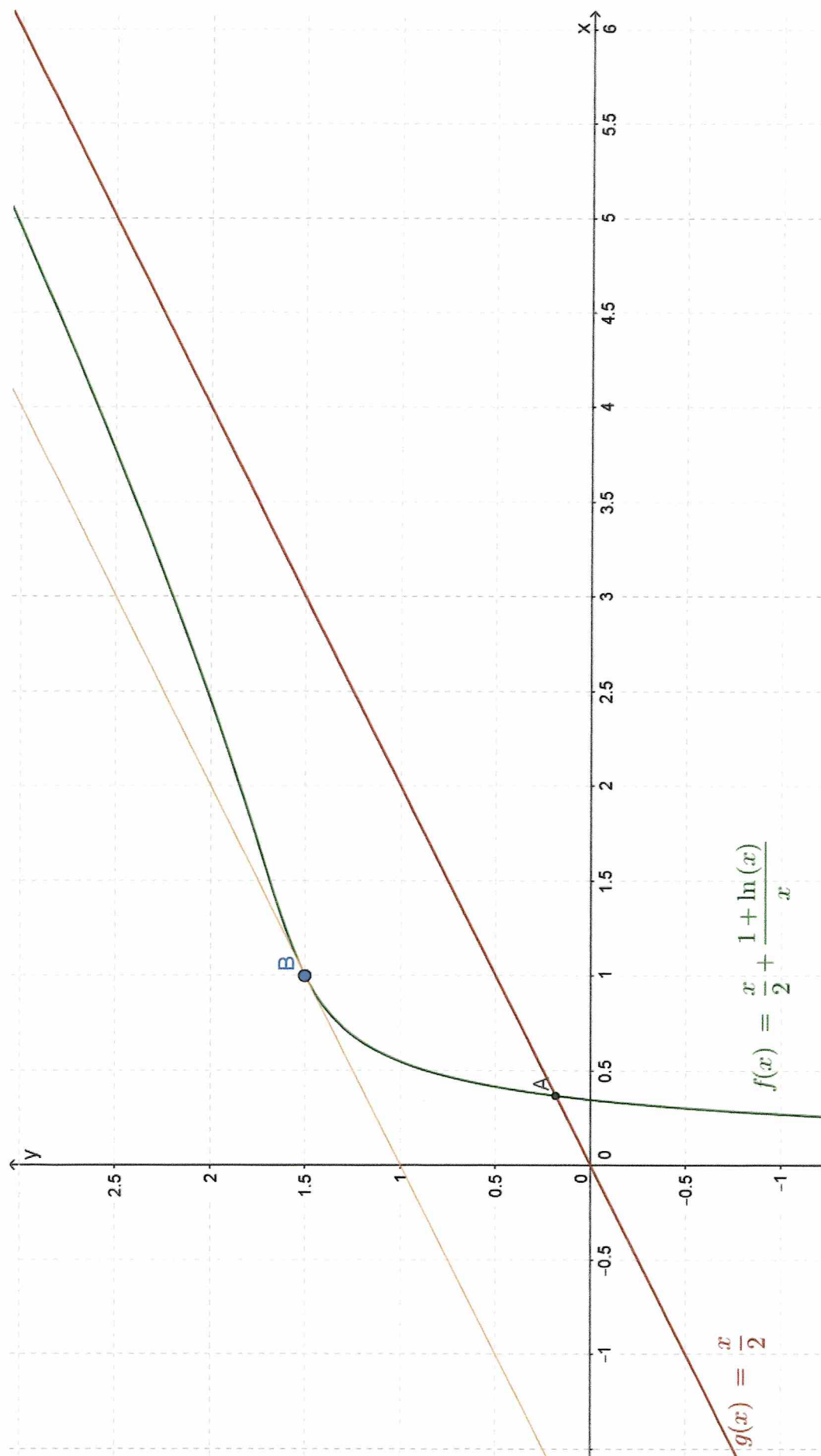
$f(x)$  s'annule une seule fois

$$f(0,34) \approx -0,061$$

$$f(0,35) \approx 0,033$$

$$\Rightarrow 0,34 < a < 0,35$$





### 3.2 Fonction n°2

1. Soit  $g(x) = \ln(x+1) - \ln x$ .

(a) Déterminer le domaine de  $g(x)$ .

$$\text{don } f: \mathbb{R}_0^+$$

(b) Montrer que sur  $\text{dom} g$ , la fonction peut s'écrire sous la forme

$$g(x) = \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(x+1) - \ln x \\ &= \ln \frac{x+1}{x} \\ &= \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

(c) Etudier le signe de  $g(x)$ .

$$\text{Comme } x > 0, \frac{1}{x} > 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} > 1$$

$$\Rightarrow \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) > 0 \text{ et } g(x) > 0$$

(d) Déterminer les limites de  $g(x)$  en 0 et en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln(1+0) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \ln(+\infty) = +\infty$$



2. Soit la fonction

$$f(x) = x + 2 + \ln(x+1) - \ln x$$

définie sur  $]0, +\infty$  et soit  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
En utilisant les résultats du 1, on demande de montrer que

(a) L'axe des ordonnées est asymptote de la courbe  $\mathcal{C}$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + (+\infty) = +\infty$$

$$f(x) = x + 2 + g(x)$$

$$\Rightarrow AV \equiv x = 0$$

(b) La droite  $d \equiv y = x + 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ ;

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , alors  $f(x)$  tend

vers  $x + 2$  si  $x$  tend vers  $+\infty$

$$\Rightarrow AO \equiv y = x + 2$$

(c) La courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $d$ .

$$\begin{aligned}d(x) &= f(x) - y_{A0} \\&= \ln(1+x) - \ln x \\&= g(x)\end{aligned}$$

Or  $g(x) > 0 \rightarrow f(x)$  toujours au  
dessus de l' $A0$ .



