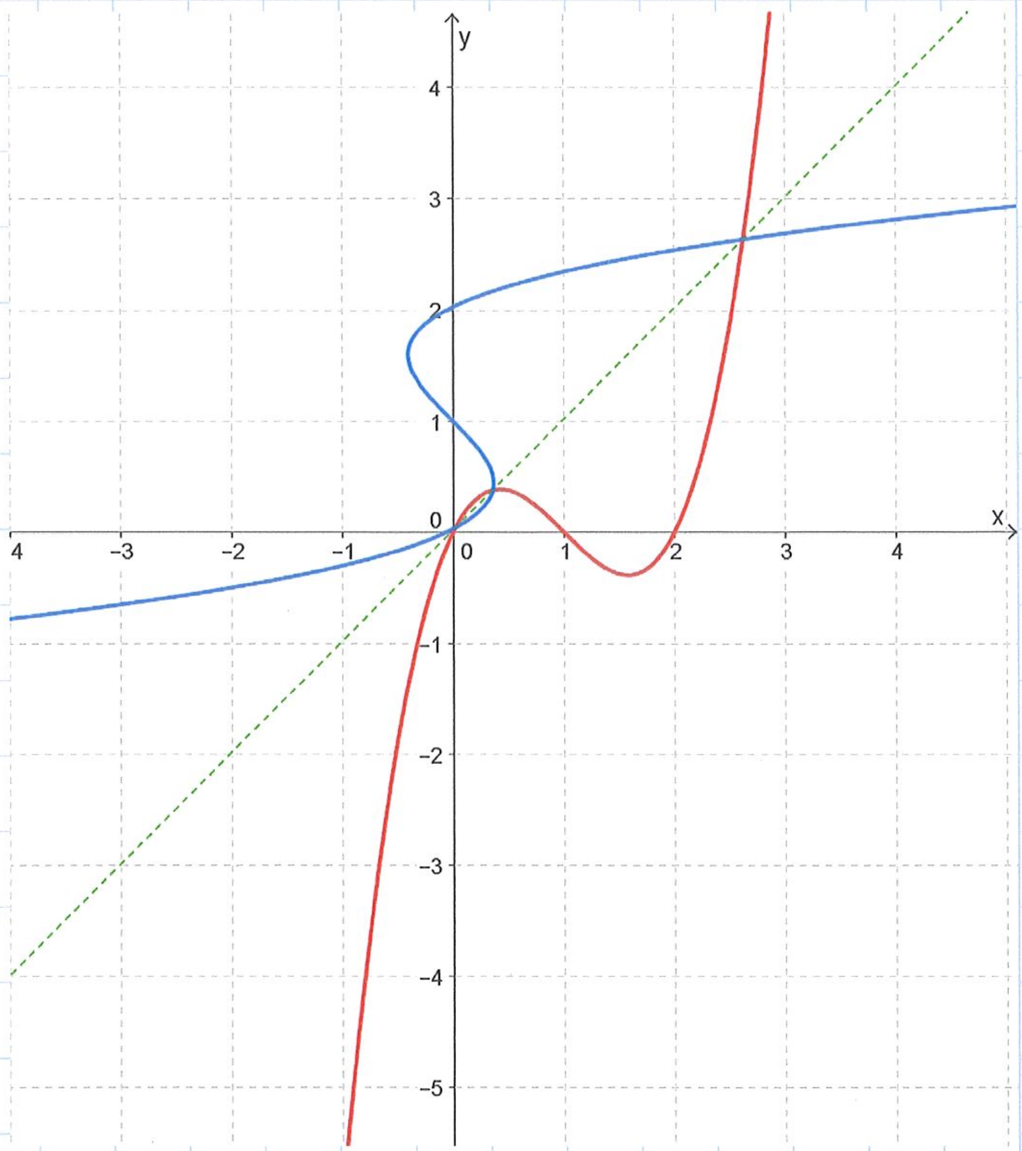
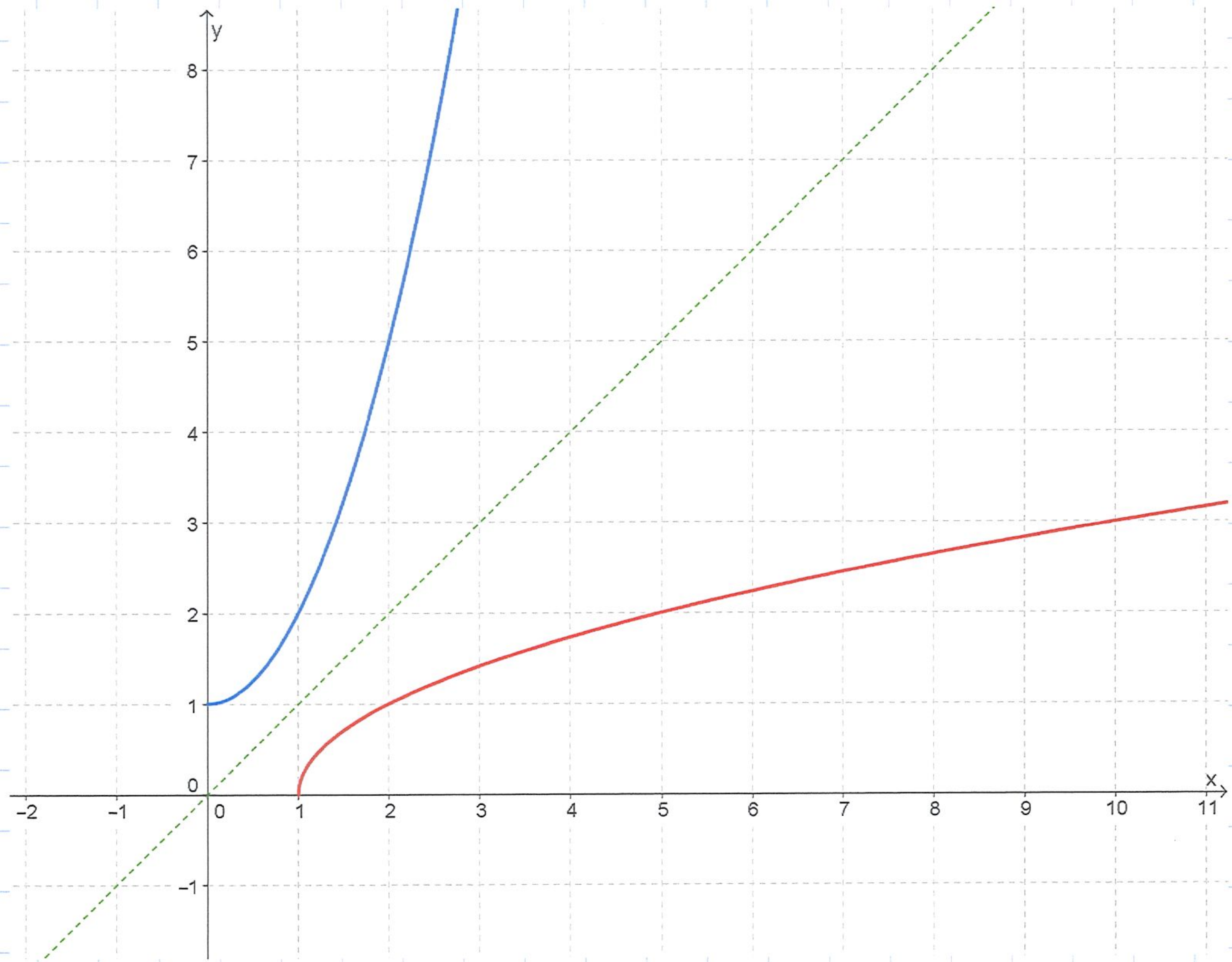
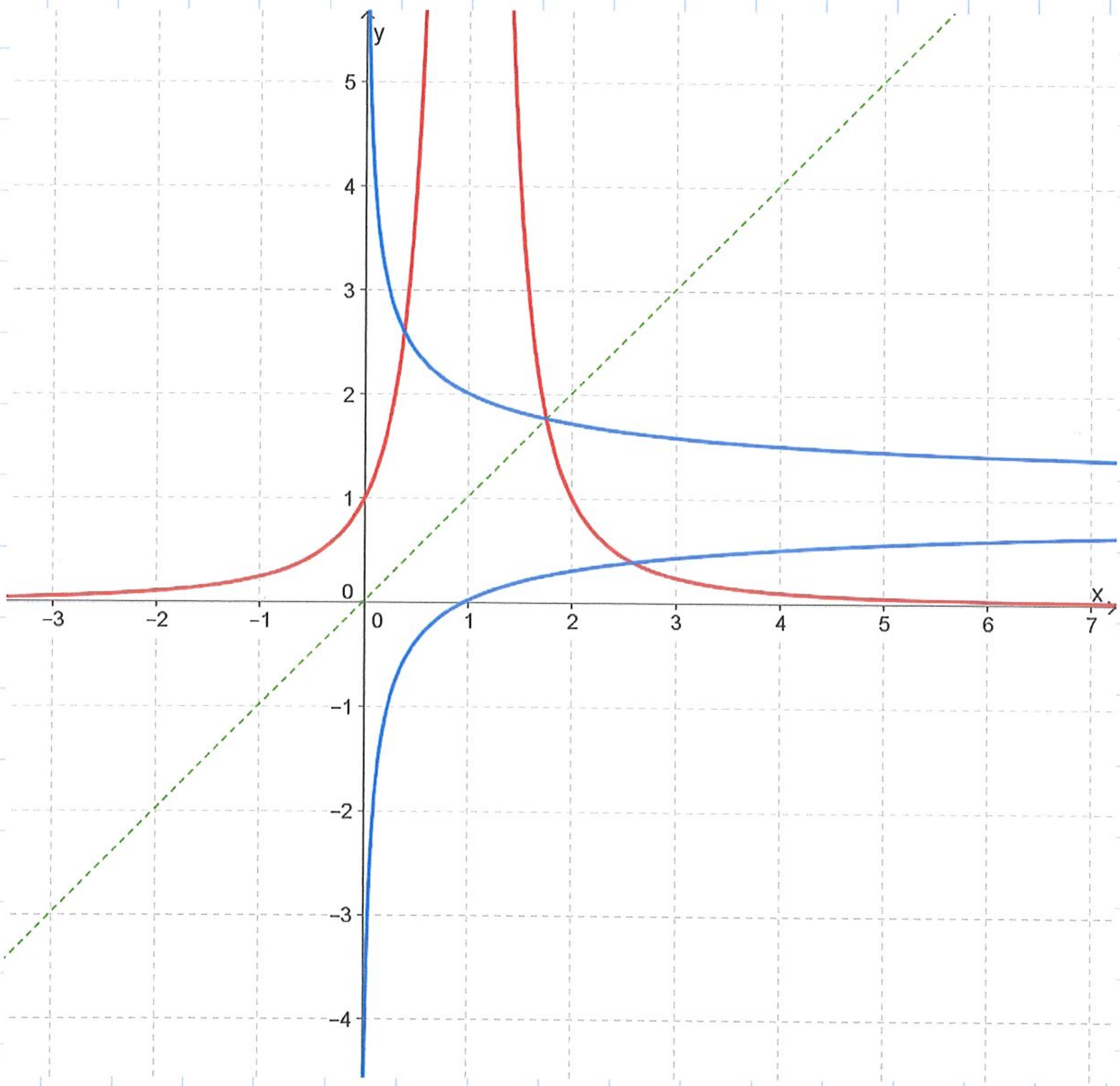
Fonctions cyclométriques : Solutions

1. On donne les graphes des fonctions suivantes
   (a) Pour chacune de ces fonctions, établir le graphe de sa réciproque ;
   (b) Les fonctions réciproques obtenues sont-elles des fonctions ? Justifier.




y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11



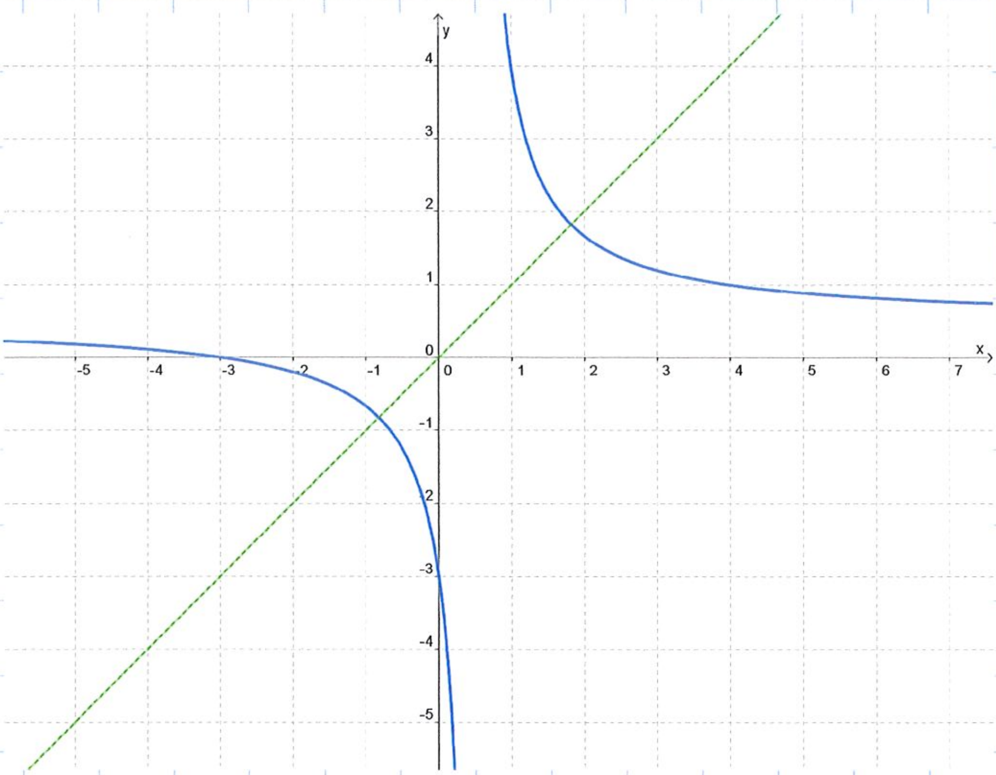
y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

2. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$. Déterminer la forme analytique de sa réciproque. Que constate-t-on ? Vérifier graphiquement le résultat obtenu.

$$y = \frac{x+3}{2x-1} \iff x = \frac{y+3}{2y-1} \iff x(2y-1) = y+3$$

$$\iff 2xy - y = x+3 \iff y = \frac{x+3}{2x-1}$$

La fct et sa réciproque sont les m̂.



3. Déterminer la valeur de a, b et c pour que la fonction $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ réponde aux trois conditions suivantes :
   - Son domaine est $\mathbb{R}\backslash\{2\}$
   - Elle est égale à sa réciproque ;
   - Son graphique comprend le point (3,-1).

- $\mathrm{dom}_f = \mathbb{R} \backslash \{2\} \Leftrightarrow \underline{c = -2}$
- $(3,-1) \in G_f \Leftrightarrow -1 = \dfrac{3a+b}{3-2} \Leftrightarrow 3a+b=-1$

  $\Leftrightarrow b = -1-3a \quad (1)$
- $y = \dfrac{ax+b}{x-2} \Leftrightarrow x = \dfrac{ay+b}{y-2} \Leftrightarrow x(y-2) = ay+b$

$\Leftrightarrow xy - ay = b + 2x \Leftrightarrow y = \dfrac{2x+b}{x-a} \Leftrightarrow \underline{a=2}$

Dans (1) $\Rightarrow \underline{b = -7}$

4. Calculer

(a) $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$ $= \frac{2\pi}{3}$

(b) $\arctan\sqrt{3}$ $= \frac{\pi}{3}$

(c) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $= \frac{\pi}{3}$

(d) $\arccos(-1,3)$ $\nexists$ $(\notin C\epsilon)$

5. Résoudre

(a) $\arccos x = \dfrac{2\pi}{3}$ $-1 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow x = \cos \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

(b) $\arctan x = 1.2$

$x = \tan 1{,}2$

(c) $\arcsin x = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arctan(-1)$ $-1 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow \arcsin x = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sin \dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1$

(d) $\arctan x + \arctan(x-2) = \dfrac{\pi}{4}$ $\rightarrow \tan(a+b)$

$$\Leftrightarrow \frac{x + (x-2)}{1 - x(x-2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2x} - 2 = 1 - x^2 \cancel{+2x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

(e) $\arctan 2x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \arctan 2x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \qquad (\tan)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \cot(\arccos x)$$

Or $\cot \alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \cot(\arccos x) = \pm\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow 4x^2 = \frac{x^2}{1-x^2} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x^4 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2(3 - 4x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. Vérifier les identités suivantes

(a) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\tan \arctan \frac{1}{2} + \tan \arctan \frac{1}{3}}{1 - \tan \arctan \frac{1}{2} \tan \arctan \frac{1}{3}} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \quad \text{OK}$$

(b) $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{3} + \arccos \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{3} - \sin\left(\arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \sin\left(\arccos \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{9} - \sqrt{1 - \frac{8}{9}} \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = 0$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0 \quad \text{OK}$$

(c) $2\arctan\frac{\sqrt{5}}{2} + \arctan(4\sqrt{5}) = \pi$

$$\frac{\tan 2\arctan\frac{\sqrt{5}}{2} + \tan\arctan 4\sqrt{5}}{1 - \tan 2\arctan\frac{\sqrt{5}}{2}\tan\arctan 4\sqrt{5}} = 0 \quad (1)$$

$$\tan 2\arctan\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{1-\frac{5}{4}} = \frac{4\sqrt{5}}{-1} = -4\sqrt{5}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-4\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{1+16.5} = 0 \qquad \text{OK}$$

(d) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3} + \arctan\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\pi}{2}$

$$\cos\arccos\frac{\sqrt{2}}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} = \sin\arctan\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2}{7}}{1+\frac{2}{7}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{9}} \qquad \text{OK}$$

7. Déterminer le domaine de définition et la dérivée première des fonctions suivantes

(a) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

dom f : $\mathbb{R}_0$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2+1}$$

(b) $f(x) = \arccos \frac{x}{x-1}$

CE : $-1 \leq \frac{x}{x-1} \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} \geq 0 & (1) \\ \frac{1}{x-1} \leq 0 & (2) \end{cases}$

(1)

x		$\frac{1}{2}$		1	
N	$-$	0	$+$		$+$
D	$-$		$-$	0	$+$
CE1	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

(2)

x		1	
CE2	$-$	$\nexists$	$+$

dom f : $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

$$f'(x) = \frac{-\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\sqrt{1-\frac{x^2}{(x-1)^2}}} = -\frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\sqrt{\frac{x^2-2x+1-x^2}{(x-1)^2}}}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{(x-1)^2}{1-2x}} = -\frac{1}{(x-1)\sqrt{1-2x}}$$

car $x < \frac{1}{2}$

(c) $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-2x}{x^2-3}}$

CE : $\dfrac{1-2x}{x^2-3} \geq 0$

x		$-\sqrt{3}$		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$	
N	$+$		$+$	0	$-$		$-$
D	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
CE	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

dom f : $]-\infty, -\sqrt{3}[$
$\cup \left[\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right[$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1-2x}{x^2-3}} \cdot \frac{\left(\frac{1-2x}{x^2-3}\right)'}{2\sqrt{}}$$

$$= \frac{\cancel{x^2-3}}{x^2-2x-2} \cdot \frac{-2(x^2-3)-2x(1-2x)}{(x^2-3)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{}}$$

$$= \frac{\cancel{2}x^2 - \cancel{2}x + \cancel{6}^{3}}{(x^2-2x-2)(x^2-3) \cdot \cancel{2}\sqrt{}}$$

(d) $f(x) = \arcsin(x^2 - 5)$

<u>CE</u> $-1 \leq x^2 - 5 \leq 1 \iff \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 6 \leq 0 \end{cases}$

T.S.
$\iff \begin{cases} x \in \;]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ x \in \; [-\sqrt{6}, \sqrt{6}] \end{cases}$

dom f : $[-\sqrt{6}, -2] \cup [2, +\sqrt{6}]$

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-5)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{-x^4+10x^2-24}}$$

8. Calculer les limites suivantes (si elles existent)

(a) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}$ $= \frac{0}{0}$ FI

RH

$= \lim_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{-\sin x}{3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = -\infty$

(b) $\lim_{x \to 1} \left[(1-x)\tan\dfrac{x\pi}{2}\right]$ $= 0 \cdot \infty$ FI

$= \lim_{1} \dfrac{1-x}{\frac{1}{\tan x\frac{\pi}{2}}} = \frac{0}{0}$ FI

RH

$= \lim_{1} \dfrac{-1}{\dfrac{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2 x\frac{\pi}{2}}}{\tan^2 \frac{x\pi}{2}}} = \lim_{1} \frac{2}{\pi} \tan^2 \frac{x\pi}{2} \cos^2 \frac{x\pi}{2}$

$= \frac{2}{\pi}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \frac{0}{0}$ FI

RH
$= \lim_{0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \left[x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)\right] = \infty \cdot 0$ FI

$= \lim_{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$ FI

RH
$= \lim_{+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$

9. Faire l'étude complète de

(a) $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$

. dom f : CE : $-1 \leq x^2 - 1 \leq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x^2 - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tjs vrai} \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$

dom f : $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

. zéro : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \arcsin x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$

. asymptotes : aucune vu le domaine

. fct paire

. $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} = \dfrac{2x}{\sqrt{-x^4+2x^2}}$

$= \dfrac{2x}{|x|\sqrt{-x^2+2}} = \dfrac{\pm 2}{\sqrt{2-x^2}} \begin{cases} + \text{ si } x \geq 0 \\ - \text{ si } x < 0 \end{cases}$

f'(x) décroissante si $x < 0$

m $(0, -\frac{\pi}{2})$ et PA car $f'(x)$ disc.

(b) $f(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}$

1 . dom f : CE : $x \neq -1$ dom f : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1 . zéro : $\arctan \frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

.1 AV : $\lim_{-1} f(x) = \arctan \infty = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \cancel{AV}$

3 AH : $\lim_{\pm\infty} f(x) = \arctan \frac{\infty}{\infty}$

$= \arctan \lim_{\pm\infty} \frac{x-1}{x+1}$

$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow AH \equiv y = \frac{\pi}{4}$

3 . $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}$

$= \dfrac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1}$

$= \dfrac{1}{x^2+1} > 0$ sur dom f.