

Calcul intégral : Solutions

1. Calculer les intégrales définies suivantes

$$(a) \int_0^1 (e^x + 1)^2 dx$$

$$= \int_0^1 (e^{2x} + 2e^x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} [e^{2x}]_0^1 + 2[e^x]_0^1 + [x]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} (e^2 - 1) + 2(e - 1) + 1$$

$$= \frac{e^2}{2} + 2e - \frac{3}{2}$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} 5x \sin \left(x^2 - \frac{\pi^2}{16} \right) dx$$

$$= \frac{5}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{2x}_{g'} \sin \left(\underbrace{x^2 - \frac{\pi^2}{16}}_y \right) dx$$

$$= -\frac{5}{2} \left[\cos \left(x^2 - \frac{\pi^2}{16} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{5}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi^2}{16} \right) \right]$$

$$= \frac{5}{2} \left(\cos \frac{\pi^2}{16} - 1 \right)$$

$$(c) \int_4^8 \frac{2x}{\sqrt{x^2-5}} dx$$

$$g = x^2 - 5$$

$$g' = 2x$$

$$= \frac{1}{2} \int_4^8 g' g^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} \frac{g^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_4^8$$

$$= \left[\sqrt{x^2-5} \right]_4^8 = \sqrt{59} - \sqrt{11}$$

$$(d) \int_0^{\pi} x \cos x \, dx$$

$$\begin{array}{ll} f = x & f' = 1 \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{array}$$

$$= [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= 0 - [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= -2$$

$$(e) \int_e^{e^2} \ln^2 x \, dx$$

$$f = \ln^2 x \quad f' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$g' = 1 \quad g = x$$

$$= \left[x \ln^2 x \right]_e^{e^2} - 2 \int_e^{e^2} \ln x \, dx$$

$$= 4e^2 - e - 2 \left[x \ln x - x \right]_e^{e^2}$$

cf exercise 3(c)
do primitives

$$= 4e^2 - e - 2 \left[ee^2 - e^2 - (e \cdot e - e) \right]$$

$$= 2e^2 - e$$

$$(f) \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(x^2 - 4x + 4) + 1} dx = \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2 + 1}$$

$$= \left[\arctan(x-2) \right]_0^1$$

$$= \arctan(-1) - \arctan(-2)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \arctan(-2)$$

$$= \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$$

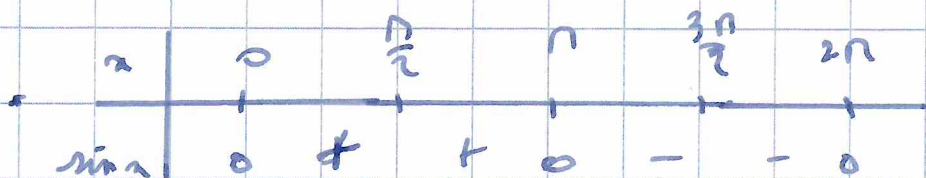
2. Calculer l'aire des surfaces limitées par le graphique de f , l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$.

(a) $f(x) = \sqrt{2x}$, $a = 0$ et $b = 4$;

$\sqrt{2x} \geq 0$ entre 0 et 4

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \sqrt{2x} \, dx = \sqrt{2} \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_0^4 = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ (u.a.)} \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{3\pi}{2}$;



$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$= [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= [-(-1) - 0] - [0 - (-1)]$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2 \text{ (u.a.)}$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}, a = -1 \text{ et } b = 1;$$

$$\text{dom}_f :]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\text{ et } f(x) \geq 0$$

$$\text{de } \int_{-1}^1 \frac{1 \, dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^1$$

$$= \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} - \arcsin \frac{-\sqrt{3}}{3} \quad (\text{u.a.})$$

$$\left(= 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(d) $f(x) = x^2 \ln x$, $a = \frac{1}{\sqrt{e}}$ et $b = e$.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	1	e
x^2	/	+	+	+
$\ln x$	/	-	-0	+
$f(x)$	/	-	-0	+

$$C = - \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 x^2 \ln x \, dx + \int_1^e x^2 \ln x \, dx$$

Calcul de la primitive :

$$\begin{aligned} f &= \ln x & f' &= \frac{1}{x} \\ g' &= x^2 & g &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C &= - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{1}{3\sqrt{e^3}} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{9\sqrt{e^3}} \right) \right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{e^3}{3} \cdot \frac{e^3}{9} \right) - \left(0 - \frac{1}{9} \right) \right] \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{6\sqrt{e^3}} - \frac{1}{9\sqrt{e^3}} + \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{2e^3}{9} - \frac{5}{18\sqrt{e^3}} \quad (\text{u.a.}) \end{aligned}$$

3. Calculer l'aire des surfaces limitées par les graphiques de f et de g , l'axe ~~Ox~~ et les droites $x = a$ et $x = b$.

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $a = \frac{5}{2}$ et $b = 4$;

Position relative de f et g

$$f - g = x^2 - 2x + 1 - \frac{x+1}{x-2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2 - x - 1}{x-2}$$

$$= \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{x-2} \quad (H) = \frac{(x-3)(x^2 - x + 1)}{x-2}$$

x	2	$\frac{5}{2}$	3	4
N	-	-	0	+
D	-	0	+	+
$f-g$	+	-	0	+

$f < g$ $f > g$

$$A = \int_{\frac{5}{2}}^3 \left[\frac{x+1}{x-2} - (x^2 - 2x + 1) \right] dx + \int_3^4 \left[x^2 - 2x + 1 - \frac{x+1}{x-2} \right] dx$$

Primitive $\int (x^2 - 2x + 1 - \frac{x+1}{x-2}) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - \left(1 + \frac{3}{x-2}\right) \ln |x-2| + C$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + x - 3 \ln |x-2| + C$$

$$A = - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x - 3 \ln |x-2| \right]_{\frac{5}{2}}^3 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x - 3 \ln |x-2| \right]_3^4$$

$$= - \left[\left(9 - 9 - 3 + 3 \ln 1 \right) - \left(\frac{125}{24} - \frac{25}{4} + \frac{3}{2} - 3 \ln \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$+ \left[\left(\frac{64}{3} - 16 + 4 - 3 \ln 2 \right) - \left(9 - 9 - 3 + 3 \ln 1 \right) \right]$$

$$= \frac{103}{24} \text{ (u.a.)}$$

(b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$;

Étude du signe de $f-g$

$$f(x) - g(x) = \sin x - \cos x$$

$$= \cos x (\tan x - 1)$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	+	+	0	-	-	0	+	+
$\tan x - 1$	-	0	+	+	-	0	+	-
$f-g$	-	0	+	+	-	0	-	-
			(1)				(-1)	

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$$

$$= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 1 \right] + \left[-1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

$$= \sqrt{2} - 1 - 1 + \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2} - 2 \quad (\text{u.a})$$

(c) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $g(x) = \ln 2$, $a = -3$ et $b = 2$.

Signe de $f-g$

$$f-g = \ln(x^2+1) - \ln 2 \quad \text{donc } f: \mathbb{R}$$

$$= \ln \frac{x^2+1}{2}$$

$$\frac{x^2+1}{2} > 0 \quad \text{si} \quad \frac{x^2+1}{2} > 1, \quad \ln \frac{x^2+1}{2} > 0$$

$$\frac{x^2+1}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in -\infty, -1[\cup]1, +\infty$$

x		-1		1	
$\ln \frac{x^2+1}{2}$	+	0	-	0	+

$$A = \int_{-3}^{-1} \ln \frac{x^2+1}{2} dx - \int_{-1}^1 \ln \frac{x^2+1}{2} dx + \int_1^2 \ln \frac{x^2+1}{2} dx$$

Primitive de $\ln \frac{x^2+1}{2}$

$$f = \ln \frac{x^2+1}{2} \quad f' = \frac{\frac{2x}{2}}{\frac{x^2+1}{2}}$$

$$= \frac{2x}{x^2+1}$$

$$g' = 1$$

$$g = x$$

$$\int \ln \frac{x^2+1}{2} dx = x \ln \frac{x^2+1}{2} - 2 \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

$$= x \ln \frac{x^2+1}{2} - 2 \int \left[1 - \frac{1}{x^2+1} \right] dx \quad (\text{division})$$

$$= x \ln \frac{x^2+1}{2} - 2x + 2 \arctan x + C$$

En remplaçant par les bornes : $A = \ln \frac{3125}{4} - \frac{\pi}{2} - 6$ (u.a.)

4. Calculez l'aire de la surface fermée délimitée par les graphiques de f et g .

(a) $f(x) = 2 - x^2$ et $g(x) = \frac{x+3}{2}$

Intersection de f et g (x)

$$2 - x^2 = \frac{x+3}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad 4 - 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} < \frac{1}{2}$$

Point(s) relatif de f et g : $f - g = -2x^2 - x + 1$

x	-1	$1/2$
$f - g$	$-$	$+$
	0	0
	$f > g$	$f < g$

$$A = \frac{1}{2} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (-2x^2 - x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \right) - \left(+\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right]$$

$$= \frac{9}{16} \text{ (u.o.)}$$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et $g(x) = 2x^2 - 2x$

Pts d'intersection

$$f = g \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 - 2x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, x = 1, x = 2$$

Position relative de f et g

$$f - g = (x-2)(x^2-1)$$

x	-1	1	2
$x-2$	-	-	- 0 +
x^2-1	+ 0 -	0 +	+ +
$f-g$	- 0 +	0 -	- 0 +

$f > g$ $f < g$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx - \int_1^2 () dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 - \left[\right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2 \right) \dots \\ &\quad - \left[\left(4 - \frac{2}{3} \cdot 8 - 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right] \\ &= \frac{37}{12} \text{ (u.a.)} \end{aligned}$$

(c) $f(x) = -\frac{x^3}{2} - 1$ et la droite passant par $A(-2, 3)$ et l'origine des axes.

. Dte: $y = -\frac{3}{2}x$

. Pts d'N: $-\frac{x^3}{2} - 1 = -\frac{3}{2}x$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \quad (\text{Horner})$$

. Position relative f et g

$$f - g = \frac{-x^3 + 3x - 2}{2}$$

x	-2	1
$x+2$	-	+
$(x-1)^2$	+	+
$f-g$	+	-

$f < g$

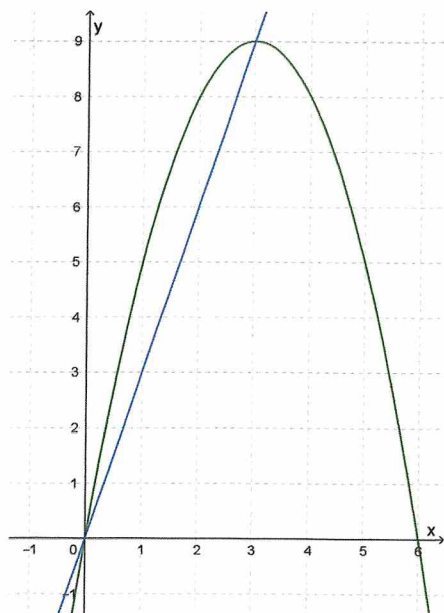
$$A = - \int_{-2}^1 \frac{-x^3 + 3x - 2}{2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left[-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^1$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2 \right) - \left(-\frac{16}{4} + \frac{3}{2} \cdot 4 - 4 \right) \right]$$

$$= \frac{27}{8} \text{ (u.e.)}$$

5. Déterminer la pente de la droite passant par l'origine qui délimite avec la parabole d'équation $y = -x^2 + 6x$ une surface dont l'aire vaut $\frac{1}{8}$ de la surface limitée par la parabole et l'axe Ox .



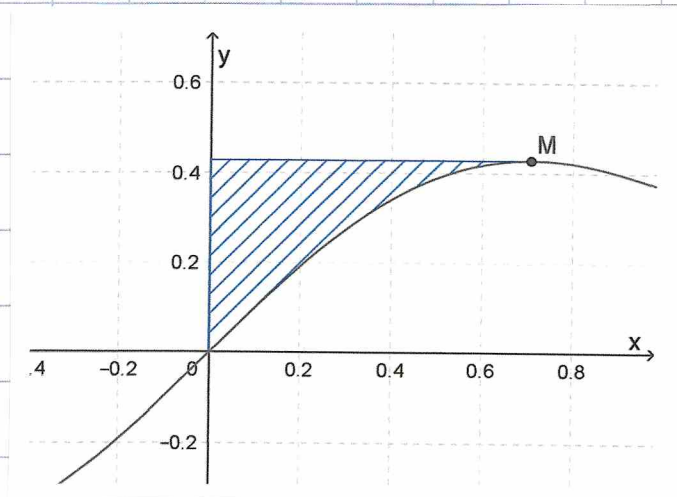
$$\begin{aligned}
 d & \text{ est } y = mx \\
 P & : y = -x^2 + 6x \\
 d \cap P: & \begin{cases} y = mx \\ y = -x^2 + 6x \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & -x^2 + 6x = mx \\
 \Leftrightarrow & -x^2 + (6-m)x = 0 \\
 \Leftrightarrow & x[-x + 6 - m] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 - m \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{d-p} &= \int_0^{6-m} (-x^2 + 6x - mx) dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - m\frac{x^2}{2} \right]_0^{6-m} \\
 &= -\frac{(6-m)^3}{3} + 3(6-m)^2 - \frac{m}{2}(6-m)^2 \\
 &= (6-m)^2 \left[-\frac{6-m}{3} + 3 - \frac{m}{2} \right] \\
 &= (6-m)^2 \frac{-12+2m+18-3m}{6} \\
 &= \frac{(6-m)^3}{6}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_P : \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx = \dots = 36$$

$$\Leftrightarrow \frac{(6-m)^3}{6} = \frac{36}{8} \quad (\Leftrightarrow) \quad (6-m)^3 = \frac{6^3}{8} \quad (\Leftrightarrow) \quad 6-m = \frac{6}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad m = 3$$

6. Calculer l'aire délimitée par le graphique de la fonction $f(x) = xe^{-x^2}$, la tangente au graphique en son maximum et l'axe Oy .



$$f'(x) = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↓	m	↑

* $\Pi: \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}e}{2e} \right)$

$$L = y_2 \frac{\sqrt{2e}}{2e}$$

$$L = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{\sqrt{2e}}{2e} + \frac{-2xe^{-x^2}}{2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2e}}{2e} x + \frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{e}}{e} + \frac{1}{2} \sqrt{e^{-1}} \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} \text{ (u.a.)}$$

7. Calculer les volumes de révolution engendré par la rotation autour de Ox de la surface limitée par le graphe de $f(x)$ et l'axe Ox

(a) $f(x) = 9 - x^2$

Intersection Ox : $9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^3 (9 - x^2)^2 dx \\ &= \pi \int_{-3}^3 (81 - 18x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \left[81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-3}^3 \\ &= \frac{1296\pi}{5} \text{ (u.m.)} \end{aligned}$$

$$(b) f(x) = x^3 + x^2$$

$$\Delta O_x : x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^0 (x^3 + x^2)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^0 (x^6 + 2x^5 + x^4) dx \\ &= \pi \left[\frac{x^7}{7} + \frac{2x^6}{6} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^0 \\ &= \pi \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{\pi}{105} \text{ (u.a.)} \end{aligned}$$

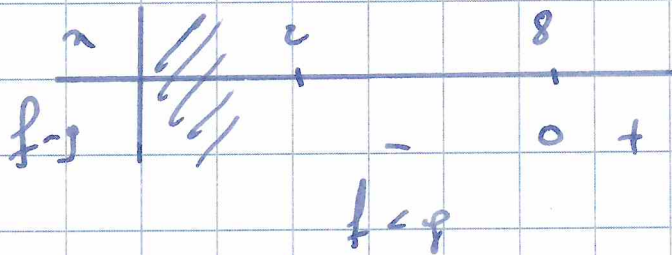
8. Calculer le volume de révolution engendré par la rotation autour de Ox des surfaces limitées par les graphes de $f(x) = \sqrt{x-2}$ et $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2} + 2}$ entre $x = -4$ et $x = 8$.

Pos. relative f et g

$$* \underline{CE} : \begin{array}{l} f \quad x \geq 2 \\ g \quad x \geq -4 \end{array}$$

$\Rightarrow$ sur $[-4, 2]$, g seul

$$* f - g : \sqrt{x-2} - \sqrt{\frac{x}{2} + 2} = \frac{x-2 - (\frac{x}{2} + 2)}{\sqrt{x-2} + \sqrt{\frac{x}{2} + 2}} = \frac{\frac{x}{2} - 4}{\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}}$$

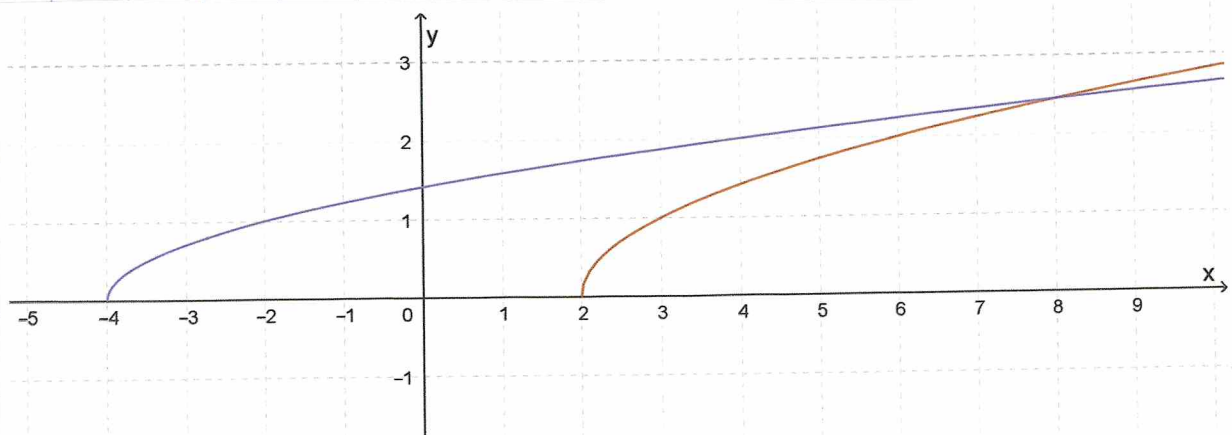


$$\rightarrow V = \pi \int_{-4}^2 \left(\frac{x}{2} + 2\right) dx + \pi \int_2^8 \left[\left(\frac{x}{2} + 2\right) - (\sqrt{x-2}) \right] dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{4} + 2x \right]_{-4}^2 + \pi \left[-\frac{x^2}{4} + 4x \right]_2^8$$

$= \dots$

$$= 18 \text{ (u.v.)}$$



9. Une parabole d'axe Oy comprend les points $(2,4)$ et $(0,2)$. Déterminer l'équation de cette parabole ainsi que le volume engendré par la rotation de la parabole autour de l'axe Ox entre $x = -2$ et $x = 2$.

$$P \equiv y = ax^2 + c$$

$$(2,4) \in P \Leftrightarrow 4 = 4a + c$$

$$(0,2) \in P \Leftrightarrow 2 = c \quad (\Rightarrow) \quad a = \frac{1}{2}$$

$$P \equiv y = \frac{1}{2}x^2 + 2$$

$$V = \pi \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 \right)^2 dx$$

$$= \dots$$

$$= \frac{448}{15} \pi \text{ (u.v.)}$$

10. Calculer le volume d'une sphère de rayon 2 à l'aide du calcul intégral.

• Volume engendré par le cercle de centre $(0,0)$
et de rayon 2

$$\Rightarrow C: x^2 + y^2 = 4 \quad (\Leftrightarrow) y = \pm \sqrt{4 - x^2}$$

• $\Delta O, x$: $(-2,0)$ et $(2,0)$

$$V = \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$$

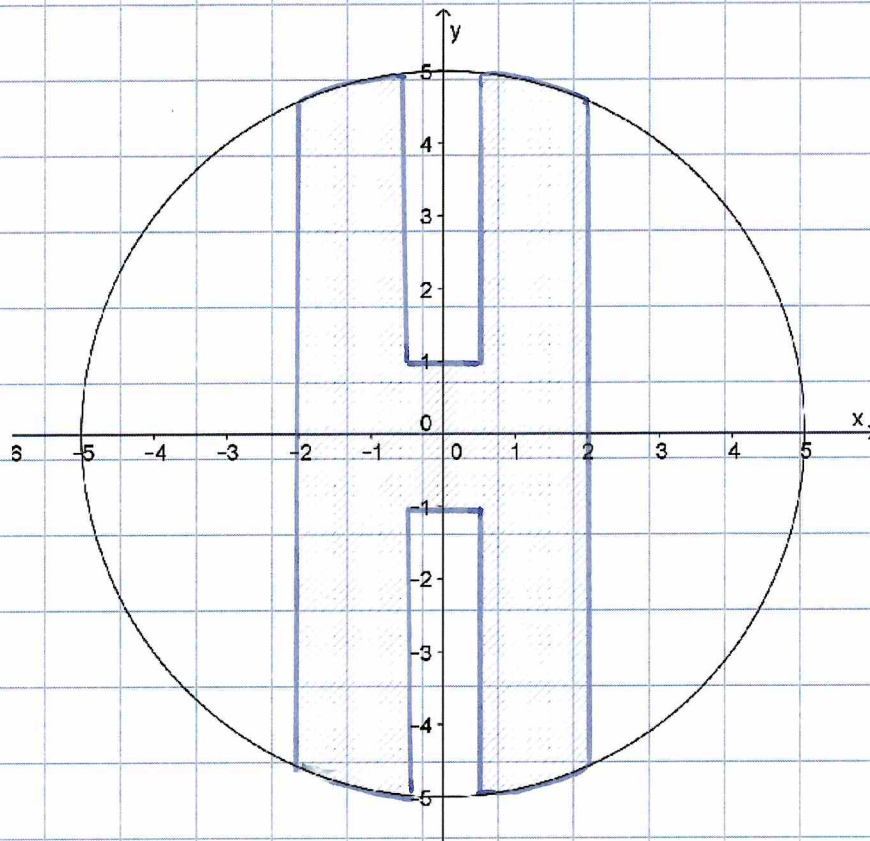
$$= \frac{32}{3} \pi \text{ (u.n.)}$$

$$\text{Vérification : } V_s = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \cdot 8 = \frac{32\pi}{3}$$

11. Un yoyo est formé :

- d'un moyeu cylindrique de 2cm de diamètre et de 1cm de large
- de deux flancs de 1,5cm d'épaisseur coupés dans une sphère de 5cm de rayon centrée au centre du moyeu.



Calculer le volume de ce yoyo.

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (25 - x^2) dx + \pi \int_{-0,5}^{0,5} 1 dx \\
 &= 2\pi \left[25x - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^2 + \pi [x]_{-0,5}^{0,5} \\
 &= \frac{282}{8} \pi \text{ (u.n.)}
 \end{aligned}$$

Exercices récapitulatifs : fonctions exponentielles et calcul intégral

Exercice 1

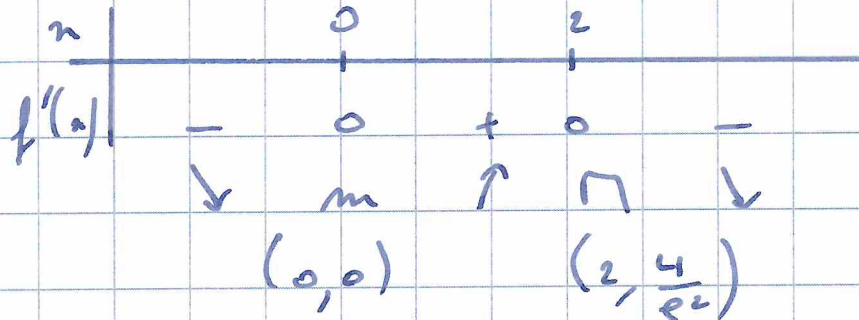
Soient les fonctions

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad g(x) = e^{-x}$$

et F et G leur graphe respectif dans le même repère orthonormé.

1. Déterminer les coordonnées des extrémums de $f(x)$ et en donner la nature ;
2. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de F ;
3. Etudier la limite en $\pm\infty$ de $f(x)$;
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de F et G ;
5. Tracer F et G ;
6. Déterminer l'aire de la région finie S entre F et G ;
7. Calculer la longueur du plus grand segment de droite parallèle à l'axe des ordonnées que l'on peut trouver dans S .

$$\begin{aligned} 1) f'(x) &= 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} \\ &= e^{-x} (2x - x^2) \\ &= x e^{-x} (2 - x) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2) f''(x) &= -(2x - x^2) e^{-x} + (2 - 2x) e^{-x} \\ &= e^{-x} (-2x + x^2 + 2 - 2x) \\ &= e^{-x} (x^2 - 4x + 2) \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \Delta = 16 - 8 = 8$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \\ y_{1,2} = (6 \pm 4\sqrt{2}) e^{-2 \pm \sqrt{2}} \end{cases}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \text{ on FI } = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{0}{\infty} \text{ FI}$$

$$\text{RM} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\text{RM}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$u) f \cap g : \begin{cases} y = x^2 e^{-x} \\ y = e^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1) e^{-x} = 0 \\ (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = e^{\pm 1} \end{cases} \quad \begin{matrix} A(-1, e) \\ B(1, e^{-1}) \end{matrix}$$

5) cf annexe

c) Position relative de f et g

$$f - g = (x^2 - 1) e^{-x} \quad \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline f-g & + & 0 & - \\ & & & f < g \end{array}$$

$$A = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) e^{-x} dx$$

$$\begin{array}{ll} f = x^2 - 1 & f' = 2x \\ g' = e^{-x} & g = -e^{-x} \end{array}$$

$$A = \left[(x^2 - 1) e^{-x} \right]_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 x e^{-x} dx$$

$$= 0 - 2 \int_{-1}^1 x e^{-x} dx$$

$$\begin{array}{ll} f = x & f' = 1 \\ g' = e^{-x} & g = -e^{-x} \end{array}$$

$$A = 0 + 2 \left[x e^{-x} \right]_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 e^{-x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= 2e^{-1} + 2e \cdot 2[-e^{-x}]_{-1}^1 \\
 &= \frac{2}{e} + 2e + \frac{2}{e} - 2e \\
 &= \frac{4}{e} \text{ (u.u.)}
 \end{aligned}$$

$$7) kx = k$$

$$P: d \cap f: \begin{cases} n=k \\ y=k^2 e^{-k} \end{cases}$$

$$Q: d \cap g: \begin{cases} n=k \\ y=e^{-k} \end{cases}$$

$$l = d(P, Q) = (k^2 - 1)e^{-k}$$

$$l_{\max} \Leftrightarrow l' = 0 \Leftrightarrow 2k e^{-k} - (k^2 - 1)e^{-k} = 0$$

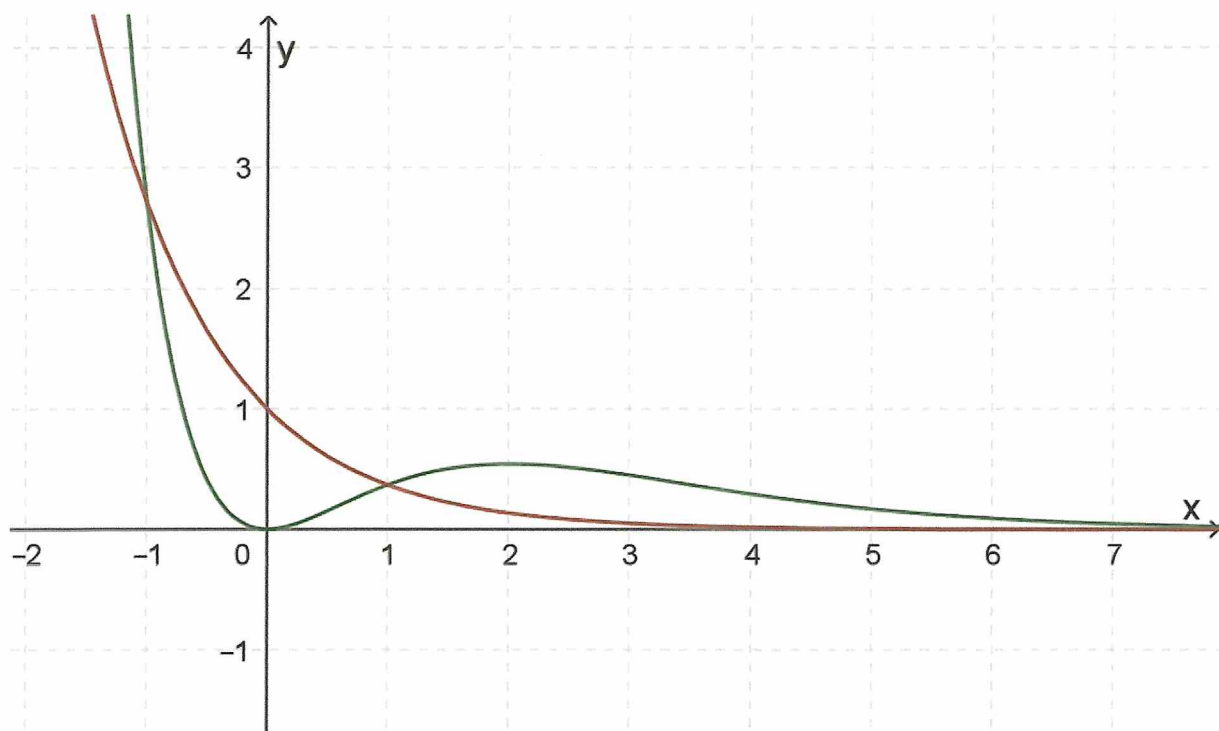
$$\Leftrightarrow (-k^2 + 2k + 1)e^{-k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4 + 4 = 8$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

k	-1-√2	-1+√2
l'	-	+
l	↘ m	↗ n
	(A.R.)	(-1+√2; (2√2)e^{1-√2})

$$l_{\max} = (2 - 2\sqrt{2})e^{1-\sqrt{2}}$$



Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x+2}$$

On note F la représentation graphique de f dans un repère orthogonal et d la droite d'équation $y = \frac{5}{2}x$. On note $\mathcal{A}$ l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe F , la droite d et la droite d'équation $x = 0$. On note O , P , Q et R les points de coordonnées : $O(0, 0)$, $P(0, 5)$, $Q(2, 5)$ et $R(0; e^2)$.

1. Détermination d'un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$

- (a) Montrer par le calcul que le point Q appartient à la droite d et à la courbe F , et que la courbe F coupe l'axe des ordonnées au point R .
- (b) Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte des aires de chacun des triangles OPQ et OQR . En déduire un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ en unités d'aire.

2. Calcul de la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$

- (a) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide d'une expression faisant intervenir une intégrale.
- (b) Soit G la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = (-x^2 - 2x - 3)e^{-x+2}$$

On note G' la fonction dérivée de G sur $\mathbb{R}$. Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, calculer $G'(x)$ en donnant les détails du calcul. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- (c) Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$. En donner une valeur approchée arrondie au centième.

Défini (cf annexe)

$$1) a) Q \in d \Leftrightarrow 5 = \frac{5}{2} \cdot 2 \quad (\text{OK})$$
$$f \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y = 1e^2 \end{cases} \rightarrow (0, e^2)$$

$$b) \Delta OPQ \Rightarrow \frac{1}{2} |OP| \cdot |PQ| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$$
$$\Delta OQR \Rightarrow \frac{1}{2} |OR| \cdot |PQ| = \frac{1}{2} \cdot e^2 \cdot 2 = e^2$$

2) a) Le calcul de la position relative de f et d est impossible $\rightarrow$ graphique, on voit que $f > d$.

$$ct = \int_0^2 \left[(n^2 + 1) e^{-n+2} - \frac{5}{2} n \right] dn$$

$$b) G(n) = (-n^2 - 2n - 3) e^{-n+2}$$

$$\begin{aligned} G'(n) &= (-2n - 2) e^{-n+2} - (-n^2 - 2n - 3) e^{-n+2} \\ &= e^{-n+2} (n^2 + 2n + 3 - 2n - 2) \\ &= (n^2 + 1) e^{-n+2} \\ &= f(n) \end{aligned}$$

→ $G(n)$ est primitive de $f(n)$

$$\begin{aligned} c) ct &= \int_0^2 \left[(n^2 + 1) e^{-n+2} - \frac{5}{2} n \right] dn \\ &= \int_0^2 (n^2 + 1) e^{-n+2} dn - \frac{5}{2} \int_0^2 n dn \\ &= [G(n)]_0^2 - \frac{5}{2} \left[\frac{n^2}{2} \right]_0^2 \\ &= \dots \\ &= 3e^2 - 16 \text{ (u.a.)} \end{aligned}$$

$$\text{et } \Delta OQP < ct < \Delta OQR$$

$$\hookrightarrow 5 < ct < e^2$$

$$\hookrightarrow 5 < ct < 7,39$$

