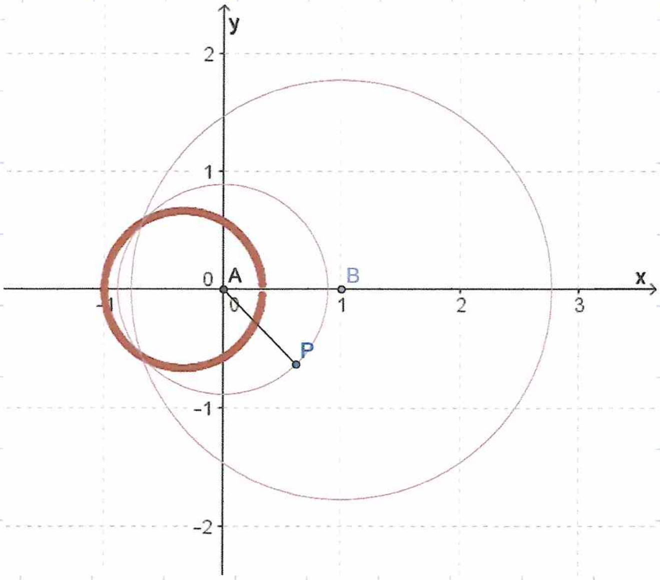
Lieux géométriques : Solutions

1. On donne deux points fixes A et B. Quel est le lieu des points P qui sont ~~deux~~ 3 fois plus loin de B que de A ?



$A : (0,0)$

$B : (1,0)$

$$d(P,B) = 2\, d(P,A)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$$

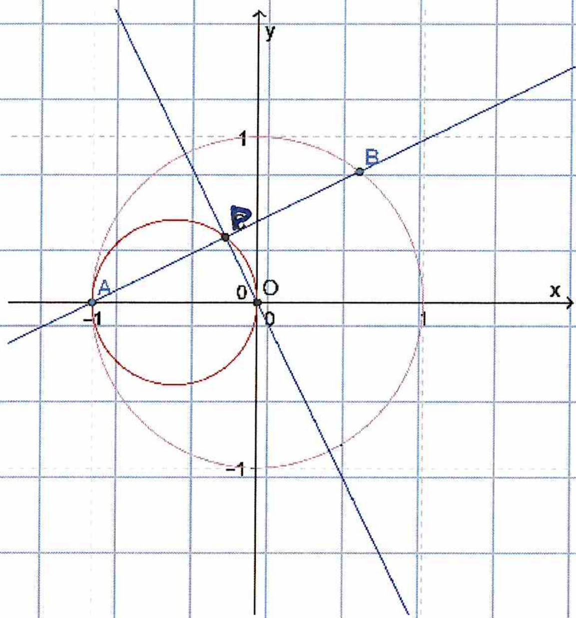
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 3y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + y^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$$

$\Rightarrow$ cercle de centre $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$

2. Déterminer le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'un cercle donné sur les cordes issues d'un même point de ce cercle.



$A(-1, 0)$

$d \equiv AB \equiv y = k(x+1)$

$d' \equiv OP \equiv y = -\frac{1}{k}x$

$$P : d \cap d' : \begin{cases} y = k(x+1) & (1) \\ y = -\frac{1}{k}x & (2) \end{cases}$$

On élimine k entre les éq

$(2) \Rightarrow k = -\frac{x}{y}$

Dans (1) : $y = -\frac{x}{y}(x+1)$

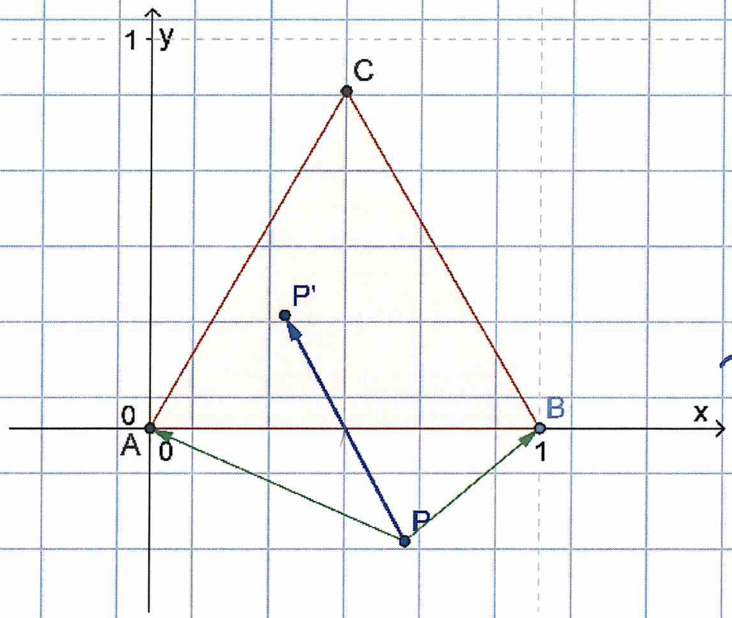
$$\Leftrightarrow y^2 = -x^2 - x \Leftrightarrow \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + y^2 = 0 + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Le lieu est un cercle de centre $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

3. Soit un triangle équilatéral ABC. Déterminer le lieu des points P vérifiant la condition :

$$\left\|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$$



$A(0,0)$

$B(1,0)$

$C : \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$P(x,y)$

$\overrightarrow{PA} : \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PB} : \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB} : \begin{pmatrix} 1-2x \\ -2y \end{pmatrix} = \overrightarrow{PP'}$

et $\|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\| = \sqrt{(1-2x)^2+(-2y)^2}$

$\|\overrightarrow{AC}\| = 1$

$\Rightarrow (1-2x)^2+(-2y)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+\cancel{1}+4y^2 = \cancel{1}$

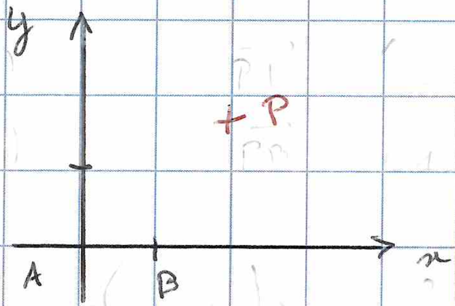
$\Leftrightarrow \cancel{4}\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\cancel{4}y^2 = 0+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 = \frac{1}{4}$

Le lieu est un cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

4. Déterminer le lieu des points P tels que

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \frac{5}{4}|AB|^2$$



$A(0,0)$

$B(1,0)$

$P(x,y)$

$\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix}1-x\\-y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = -x(1-x) + (-y)(-y)$

$\Rightarrow -x + x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$

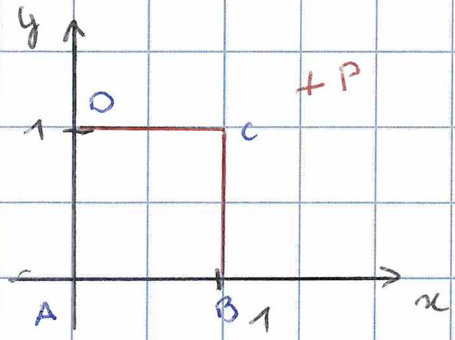
$\Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + y^2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{3}{2}$

Le lieu est un cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{2}$

5. $ABCD$ est un carré. Déterminer le lieu des points tels que

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}).(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}) = |AB|^2$$



$A(0,0)$
$B(1,0)$
$C(1,1)$
$D(0,1)$
$P(x,y)$

$\overrightarrow{PA} : \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PB} : \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PC} \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PD} \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB} : \begin{pmatrix} 1-2x \\ -2y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD} : \begin{pmatrix} 1-2x \\ 2-2y \end{pmatrix}$ et $|AB|^2 = 1$

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}) = (1-2x)^2 - 2y(2-2y)$$

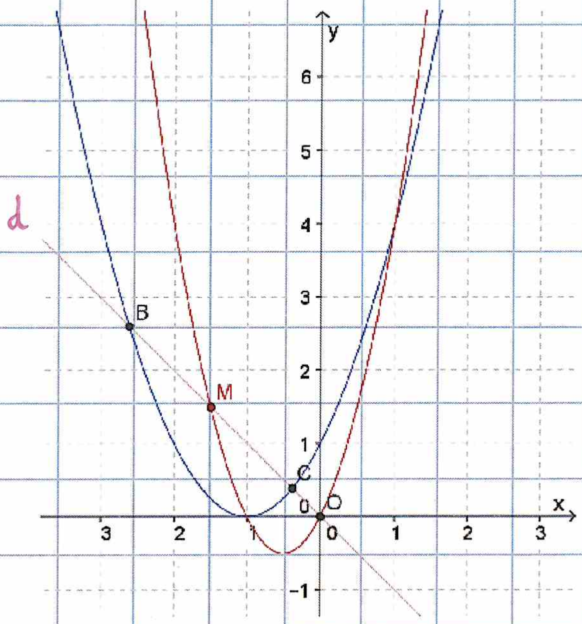
$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + \cancel{1} - 4y + 4y^2 = \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{4}\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \cancel{4}\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

le lieu est un cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. On donne la parabole $\mathcal{P} \equiv y = (x+1)^2$. Déterminer le lieu des milieux des cordes découpées par la parabole sur des droites comprenant l'origine des axes.



$d \equiv y = kx$

On cherche d'abord B et C ($d \cap \mathcal{P}$)

$$\begin{cases} y = kx & (1) \\ y = (x+1)^2 & (2) \end{cases}$$

(2) dans (1) $\Leftrightarrow (x+1)^2 = kx$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - kx = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (2-k)x + 1 = 0$

$\Delta = (2-k)^2 - 4$

$= 4 - 4k + k^2 - 4$

$= k^2 - 4k$

$x_{1,2} = \dfrac{k-2 \pm \sqrt{k^2-4k}}{2}$ et $y_{1,2} = k\,\dfrac{k-2 \pm \sqrt{}}{2}$ (par (1))

Les coordonnées de M : $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(k-2) \\ y = \frac{1}{2}k(k-2) \end{cases}$$

En éliminant k entre les deux équations :

$$\begin{cases} k = 2x + 2 \\ y = \frac{1}{\cancel{2}}(2x+2)\cancel{2}x \end{cases} \quad (*)$$

$(*) \iff y = 2x^2 + 2x$

C'est une parabole décentrée d'axe focal // à Oy

$$y + \frac{1}{2} = 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)$$

$$y + \frac{1}{2} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

$S : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$2p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$ — dirigée vers le haut

$d \equiv y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \Rightarrow y = -\frac{5}{8}$

$F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right)$

$S : (-1, -1)$

$2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

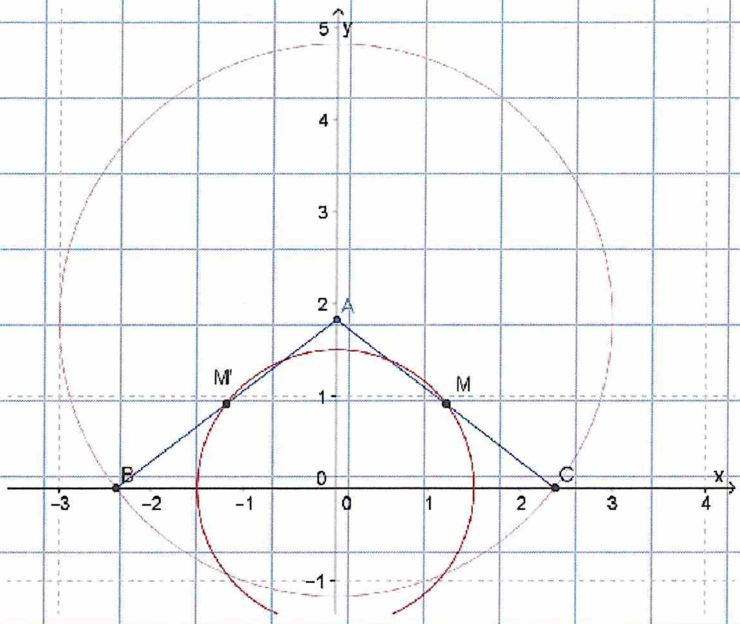
$d \equiv y = -\frac{5}{4}$

$F : \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$

dirigé vers le haut

7. Déterminer le lieu géométrique des milieux des segments de longueur constante dont les extrémités glissent sur les côtés d'un angle droit.

$\hookrightarrow L = 1$



$A(0, k)$ $\quad C(l, 0)$ $\quad$ avec $l^2 + k^2 = 1$

$\Rightarrow l = \sqrt{1-k^2}$

M : milieu de AC : $\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{2}, \frac{k}{2} \right)$

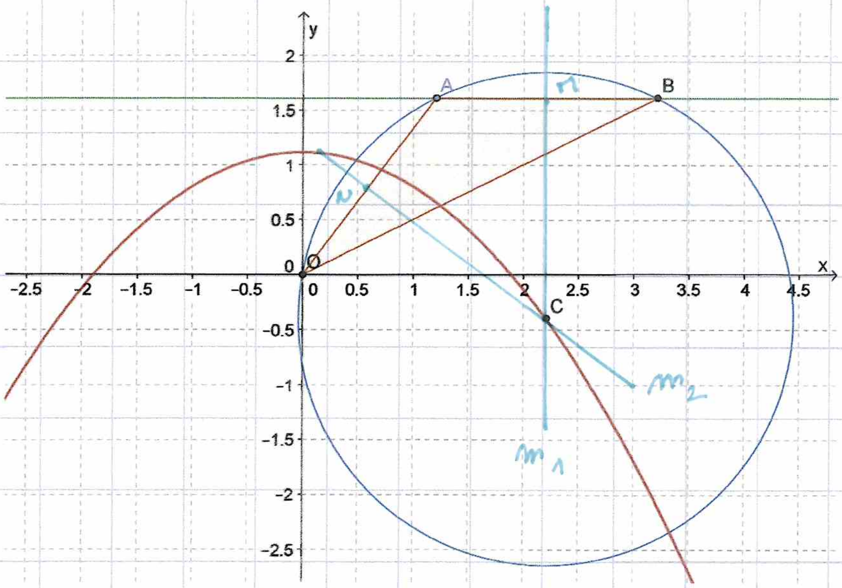
$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{1-k^2}}{2} \\ y = \frac{k}{2} \end{cases}$ On élimine k entre les équations

$\Rightarrow \begin{cases} k = 2y \\ 2x = \sqrt{1-4y^2} \end{cases}$ $(*)$

$(*) \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

Le lieu est un cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.

8. Soit un triangle variable OAB dont le sommet O est à l'origine et le côté AB (de longueur constante L) sur la droite d'équation $y = b$. Déterminer l'équation cartésienne du lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle, ainsi que sa nature.



$A(k, b)$, $B(k+L, b)$ et $O(0,0)$

C est l'intersection des médiatrices m_1 et m_2

$M : \left(\frac{2k+L}{2}, b\right)$ et $N\left(\frac{k}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$$m_1 \equiv x = \frac{2k+L}{2} \quad (1)$$

$$m_2 : m_{OA} = \frac{b}{k} \to m_{m_2} = -\frac{k}{b}$$

$$\to m_2 \equiv y - \frac{b}{2} = -\frac{k}{b}\left(x - \frac{k}{2}\right) \quad (2)$$

On élimine k entre (1) et (2).

$$(1) \Leftrightarrow k = \frac{2x-L}{2}$$

Dans (2) : $y - \frac{b}{2} = -\frac{1}{b}\left(\frac{2x-L}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\,\frac{2x-L}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow y - \frac{b}{2} = \frac{-(2x-L)(4x-2x+L)}{8b}$$

$$= \frac{-(2x-L)(2x+L)}{8b}$$

$$= -\frac{(4x^2-L^2)}{8b}$$

$$\Leftrightarrow 8by - 4b^2 - L^2 = -4x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -2by + b^2 + \frac{L^2}{4}$$

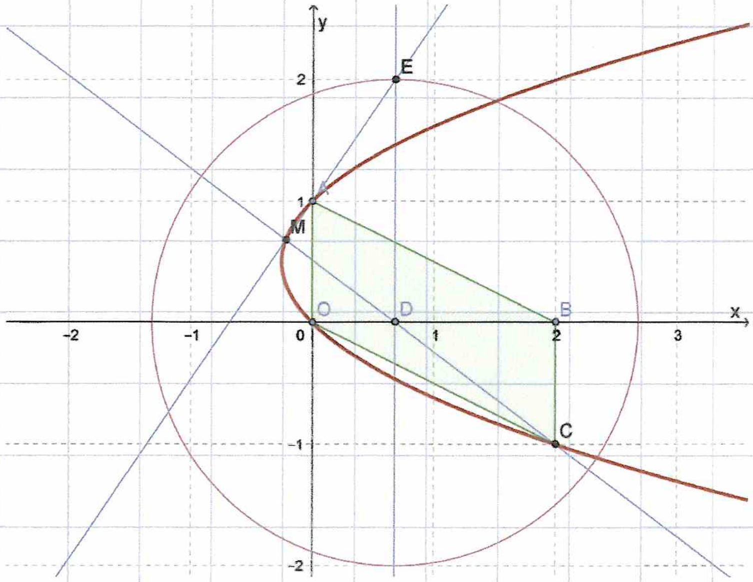
$$\Leftrightarrow x^2 = -2b\left(y - \frac{b}{2} - \frac{L^2}{8b}\right)$$

C'est une parabole d'axe focal Oy, de sommet $\left(0, \frac{b}{2} + \frac{L^2}{8b}\right)$, dirigée vers le bas, $2p = 2b \Rightarrow p = b$

$$d \Rightarrow y = \frac{b}{2} + \frac{L^2}{8b} + \frac{b}{2} = b + \frac{L^2}{8b}$$

$$F : \left(0, \frac{L^2}{8b}\right)$$

9. Soit $OABC$ un parallélogramme dont la diagonale OB (de longueur 2) est perpendiculaire au côté OA (de longueur 1). Un segment de droite $[DE]$ de longueur 2 se déplace parallèlement à OA, tandis que son extrémité D se déplace sur OB. Quel est le lieu des points d'intersection de AE et CD.



$O(0,0)$
$A(0,1)$
$B(2,0)$
$C(2,-1)$
$D(k,0)$
$E(k,2)$

$\{M\} = AE \cap CD$

$AE \equiv y - 1 = \frac{2-1}{k-0}(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{k}x \; (1)$

$CD \equiv y = \frac{1}{k-2}(x-k) \; (2)$

$(1) \Leftrightarrow k = \frac{x}{y-1}$

Dans (2) : $y = \frac{1}{\frac{x}{y-1} - 2}\left(x - \frac{x}{y-1}\right)$

$\Leftrightarrow y = \frac{(\cancel{y-1})x}{x-2y+2}\left(\frac{y-1-1}{\cancel{y-1}}\right)$

$\Leftrightarrow \cancel{xy} - \cancel{2}y^2 + \cancel{2}y = \cancel{xy} - \cancel{2}x$

$\Leftrightarrow y^2 - y + \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{4}\right)$

C'est une parabole d'axe focal // à Ox,
$S : \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

$d \equiv x = -\frac{1}{2}$ et $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$