Lois de probabilités : Solutions

Variables aléatoires discrètes

1. On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.
Déterminer la loi de X, calculer son espérance.

Calculons les probabilités d'apparition des faces

$P(6) = 6\,P(1)$; $P(5) = 5\,P(1)$; ...

On a $P(1) + P(2) + \dots P(5) + P(6) = 1$

$P(1) + 2\,P(1) + \dots + 5\,P(1) + 6\,P(1) = 1$

$21\,P(1) = 1$

$\rightarrow P(1) = \frac{1}{21}$

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$
$p_i x_i$	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{25}{21}$	$\frac{36}{21}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = \frac{91}{21} \quad (\simeq 4,3)$$

3. (a) Un joueur tire sur une cible de 10cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1,2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.
Quelle est la loi de probabilité de X ?

(b) Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

(a) aire d'un secteur circulaire de rayon R $= \pi R^2$

La probabilité que le joueur atteigne le secteur i est donnée par

$$P(X=i) = \frac{A_i}{A} \quad \text{avec } A = \pi(10)^2$$

Le dernier secteur (le 10^e) est compris entre $R=11$ et $R=10$

$$\rightarrow A_i = \pi(11-i)^2 - \pi(10-i)^2$$
$$= \pi(121-22i+i^2-100+20i-i^2)$$
$$= \pi(21-2i)$$

$$\rightarrow P(X=i) = \frac{21-2i}{100}$$

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	$\frac{19}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{100}$

(b)

x_i'	-2	6	7	8	9	10
p_i	$\frac{75}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{100}$
$p_i x_i'$	$-\frac{150}{100}$	$\frac{54}{100}$	$\frac{49}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{10}{100}$

$E(X) = \sum p_i x_i = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ $\rightarrow$ jeu favorable

4. Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

   (a) Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :
   - A : "Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent".
   - B : "Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent".

   (b) Soit X la variable aléatoire : "nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres". Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Il s'agit ici d'une loi binomiale avec

$p = \frac{3}{5}$

a) $P(A) = 1 - P(0U) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0,9744$

$P(2U) = C_4^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0,3456$

b) X = loi binomiale $(n = 10, p = \frac{3}{5})$

$E(X) = np = 6$

$V(X) = npq = \frac{12}{5}$

5. Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : "nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20". Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

C'est une variable binomiale $\left(n=20,\ p=\frac{3}{4}\right)$

$E(X) = np = 15$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$P(X=15) = C_{20}^{15} \left(\frac{3}{4}\right)^{15} \left(\frac{1}{4}\right)^{5} = 0{,}202$

6. Un lot de graine est réputé avoir un taux de germination de 80%. Soit X la variable aléatoire définissant le nombre de graine ayant germée dans un lot de 25 graines.

(a) Quel est le modèle suivi par la variable aléatoire ?

(b) Calculer la probabilité que toutes les graines germent ?

(c) Calculer la probabilité que 20 graines germent ?

(d) Calculer la probabilité qu'au moins 20 graines germent ?

a) C'est une loi binomiale $(n = 25,\ p = 0{,}8)$

b) $P(X=25) = (0{,}8)^{25} = 0{,}004$

c) $P(X=20) = C_{25}^{20}\,(0{,}8)^{20}(0{,}2)^{5} = 0{,}196$

d) $P(X \geq 20) = P(X=20) + P(X=21) + P(X=22)$

$+ \dots\ P(X=25)$

$= C_{25}^{20}\, 0{,}8^{20}\, 0{,}2^{5} + C_{25}^{21}\, 0{,}8^{21}\, 0{,}2^{4}$

$+ \dots + 0{,}8^{25}$

$= 0{,}617$

7. Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est $p = 0,1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

   (a) Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.

   (b) Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?

a) C'est une loi de Poisson $(\lambda = 60 \cdot 0,1 = 6)$

b) $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10)$

$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + \dots P(X=9)]$

Avec la table, on a :

$P(X \geq 10) = 1 - [0,0025 + 0,0149 + 0,0446 + 0,0892 + 0,1339 + \dots + 0,0688)$

$= 0,0839$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

8. Un central téléphonique possède L lignes. On estime à 1200 le nombre de personnes susceptibles d'appeler le standard sur une journée de 8 heures, la durée des appels étant de deux minutes en moyenne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes en train de téléphoner à un instant donné.

(a) Montrer que l'on est en droit d'approcher la distribution de X par une loi de Poisson.

(b) On suppose $L = 3$. Calculer la probabilité d'encombrement à un instant donné, à savoir $P(X > L)$.

(c) Quelle doit être la valeur minimale de L pour qu'à un instant donné, la probabilité d'encombrement ne dépasse pas 0,1.

a) C'est la définition d'une loi de Poisson (approximation d'une binomiale par une Poisson)

b) La probabilité d'un appel est $p = \frac{2}{8 \times 60} = \frac{1}{240}$ et est une binomiale

Comme $E(X) = np = 5$, on peut approximer cette loi par une Poisson$(\lambda = 5)$

On cherche $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$
$= 1 - [P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)]$

D'après la table $P(X > 3) = 0,735$

c) On fait des "essais" :

$P(X \geq 8) = 0,13$
$P(X \geq 9) = 0,068$
il faut 8 lignes