# *Probabilités : Solutions*

1. On tire une carte au hasard dans un jeu ordinaire de 52 cartes. Quelle est la probabilité de prélever :

   (a) une carte rouge,

   (b) un trèfle,

   (c) un as,

   (d) un roi noir,

   (e) la dame de coeur ?

a) $P(R) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

b) $P(T) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

c) $P(As) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

d) $P(RN) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

e) $P(Dc) = \frac{1}{52}$

2. Un groupe de personnes est composé de 20 hommes (dont 10 Européens) et de 30 femmes (dont 20 Européennes). Si l'on choisit une personne au hasard dans ce groupe, déterminez la probabilité pour qu'elle soit :

   (a) du sexe féminin ;

   (b) de nationalité européenne ;

   (c) un homme de nationalité non européenne.

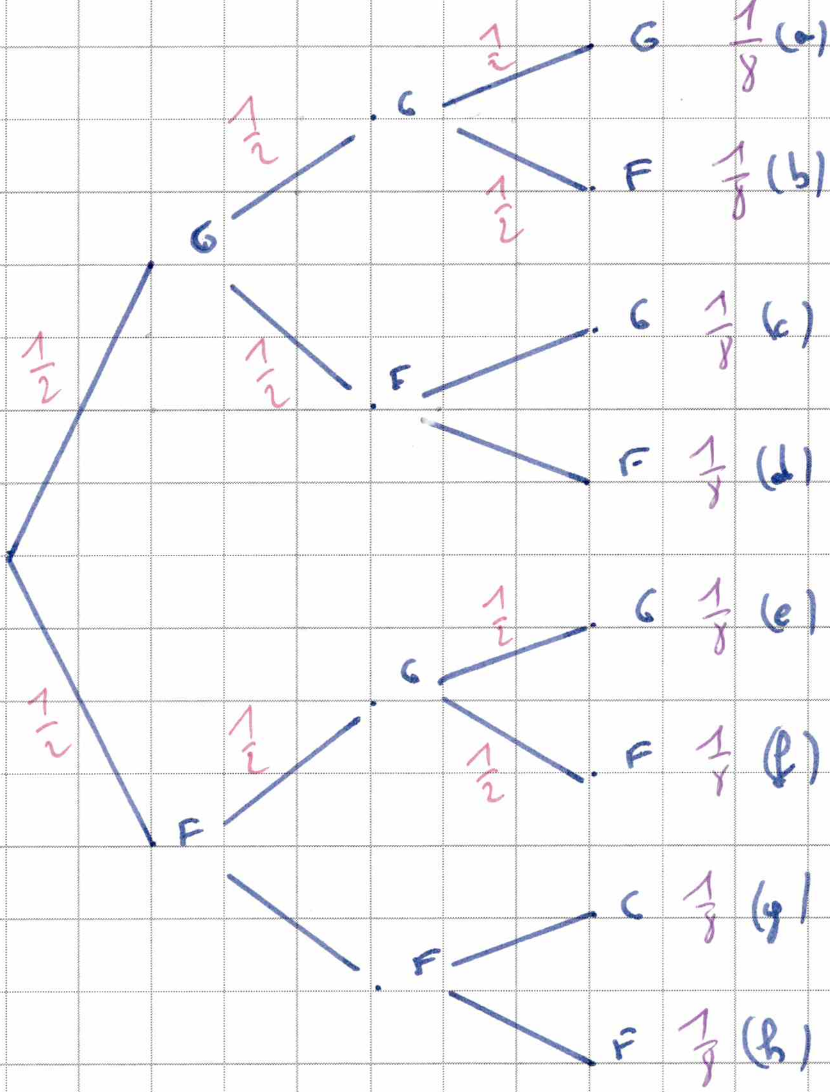
a) $P(F) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

b) $P(E) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

c) $P(H \cap \bar{E}) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

3. On considère une famille de 3 enfants. Trouvez les probabilités des événements suivants :

(a) avoir exactement un garçon ;
(b) avoir un garçon comme aîné ;
(c) avoir un garçon comme aîné et une fille comme cadette ;
(d) avoir exactement deux garçons ;
(e) avoir au moins un garçon ;
(f) avoir au moins deux garçons ;
(g) avoir au plus un garçon ;
(h) avoir plus de garçons que de filles ;
(i) avoir au moins une fille et un garçon ;
(j) n'avoir aucune fille plus jeune qu'un garçon.




a) $P(1!G) = \frac{3}{8}$ $(d+f+g)$

b) $P(G \text{ aîné}) = \frac{1}{2}$

c) $P(G_a \cap F_c) = \frac{1}{4}$ $(b+d)$

d) $P(2!G) = \frac{3}{8}$ $(b+c+e)$

e) $P(\text{au moins } 1G) = \frac{7}{8}$
(tout sauf h)

f) $P(\text{au moins } 2G) = \frac{1}{2}$

g) $P(\text{au plus } 1G) = \frac{1}{2}$

h) $P(\text{plus } G \text{ que } F) = \frac{1}{2}$

i) $P(1F \cap 1G) = \frac{3}{4}$

j) $P(\ldots) = \frac{1}{2}$

4. Une balle est tirée au hasard d'une boîte contenant 4 balles rouges, 6 balles blanches, 2 balles vertes et 8 balles noires. Déterminez la probabilité pour qu'elle soit :

   (a) rouge,
   (b) verte,
   (c) non blanche,
   (d) verte ou noire,
   (e) rouge ou blanche.

a) $P(R) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

b) $P(V) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

c) $P(\overline{B}) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

d) $P(V \cup N) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

e) $P(R \cup B) = 1 - P(V \cup N) = \frac{1}{2}$

5. Une urne U1 contient 5 balles blanches, 4 balles rouges et trois balles noires. Une autre urne U2 contient 5 balles blanches, 6 balles rouges et 7 balles noires. On prélève au hasard une balle dans chaque urne Quelle est la probabilité pour que ces deux balles soient de la même couleur ?

$P\{[(B \cap U_1) \cap (B \cap U_2)] \cup [(R \cap U_1) \cap (R \cap U_2)] \ldots$

$\ldots \cup [(N \cap U_1) \cap (N \cap U_2)]\}$

$= \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{18} + \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{18} + \frac{3}{12} \cdot \frac{7}{18}$

$= \frac{70}{216} = \frac{35}{108}$

6. Un dé bien équilibré est joué jusqu'à l'obtention d'un as (le chiffre 1). Quelle est la probabilité pour qu'il faille plus de trois jets pour voir apparaître l'as ?

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

7. Lors d'une élection on a observé les résultats suivants :

| Candidat | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| Pourcentage obtenu | 30% | 25% | 25% | 20% |

Si nous choisissons au hasard et avec remise trois personnes dans cette population, quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu ayant voté pour D dans ce groupe ?

$$P(\text{au moins } 1D) = 1 - P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3)$$
$$= 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8$$
$$= \frac{61}{125}$$

8. Trouvez la probabilité d'avoir le résultat 4 au moins une fois en deux jets d'un dé

$$P(\text{au moins } 1(4)) = 1 - P(0(4))$$
$$= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$$
$$= \frac{11}{36}$$

9. Considérons deux jeux de 52 cartes et prélevons une carte au hasard dans chacun d'eux. Quelle est la probabilité pour que l'une ou l'autre de ces deux cartes soient la dame de pique ?

$$P(1\,DP) = P\left[(DP_1 \cap \overline{DP_2}) \cup (\overline{DP_1} \cap DP_2)\right] = \frac{1}{52} \cdot \frac{51}{52} + \frac{1}{52} \cdot \frac{51}{52} = \frac{51}{1352}$$

10. Si deux dés sont lancés, quelle est la probabilité pour que la somme des deux résultats

(a) 3

(b) au moins 3

(c) au plus 3

(d) au moins 4 ?

(a) $P(3) = P[(1\cap 2) \cup (2 \cap 1)] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) $P(\text{au moins } 3) = 1 - P(2) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

c) $P(\text{au plus } 3) = P(2 \cup 3) = \frac{1}{12}$

d) $P(\text{au moins } 4)$
$= 1 - P(\text{au plus } 3)$
$= \frac{11}{12}$

11. Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. Les boules numérotées 1, 2 et 3 sont de couleur noire et les autres de couleur blanche. On prélève dans cette urne deux boules au hasard et avec remise. Calculez la probabilité des événements suivants :

(a) les chiffres indiqués sur les boules prélevées sont 8 et 9 ;

(b) au moins un des chiffres indiqués sur les boules prélevées est pair ;

(c) les boules prélevées sont de la même couleur ;

(d) les chiffres indiqués sur les boules prélevées sont tous deux supérieurs ou égaux à 6 et l'une au moins des deux boules est de couleur noire ;

(e) les chiffres indiqués sur les boules prélevées sont tous deux pairs et ces boules sont de même couleur

a) $P(8 \cap 9) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

b) $P(\text{au moins } 1P) = 1 - P(0P)$
$= 1 - \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3}{4}$

c) $P[(N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2)] = \frac{29}{50}$

d) $P(\ldots) = 0$

e) $P[(P \cap N) \cup (P \cap B)]$
$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10}$
$= \frac{17}{100}$

12. Trois balles sont tirées d'une boîte contenant 6 balles rouges, 4 balles blanches et 5 balles noires. Quelle est la probabilité qu'elles soient prélevées dans l'ordre " rouge-blanche-noire"

(a) si après chaque tirage on replace la balle prélevée dans la boîte ?

(b) si les balles ne sont pas replacées dans la boîte ?

a) $P(R \cap B \cap N) = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{120}{3375} = \frac{8}{225}$

b) $P(R \cap B \cap N)_{SR} = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{4}{91}$

13. On prélève au hasard et sans remise quatre chaussures dans un lot de dix paires de chaussures différentes. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins une paire parmi les quatre chaussures choisies ?

$P(\text{au moins } 1P) = 1 - P(0P)$

$= 1 - \frac{20}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{14}{17}$

$= \frac{99}{323}$

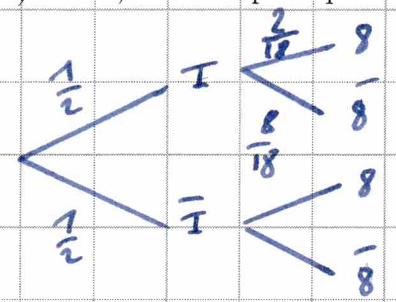
Il s'agit à partir d'ici de probabilités conditionnelles

14. On lance un dé non pipé deux fois de suite. Quelle est la probabilité pour que la somme des points obtenus :

(a) soit 8, sachant qu'au premier jet le point amené est impair ?

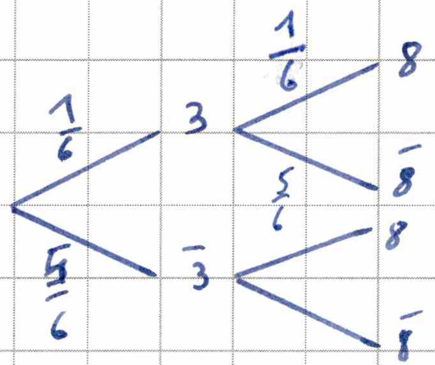
(b) soit 8, sachant qu'au premier jet le point amené est 3 ?

a)



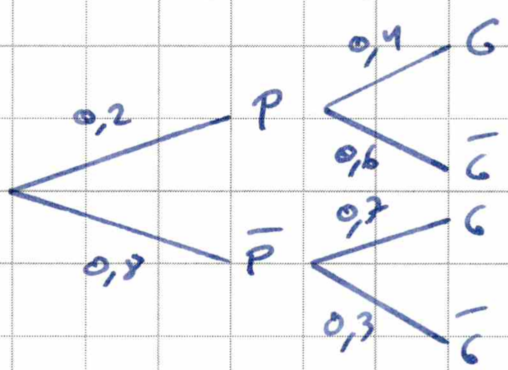

$$P(8/I) = \frac{P(8 \cap I)}{P(I)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$$

b)




$$P(8/3) = \frac{P(8 \cap 3)}{P(3)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

15. La probabilité pour qu'un jour quelconque de mai soit non pluvieux est 0,8. Une équipe de football gagne ses matchs par temps clair avec une probabilité de 0,7, par temps de pluie avec une probabilité de 0,4. Sachant que cette équipe a gagné un match le 10 mai, quelle est la probabilité pour qu'il ait plu ce jour-là ?

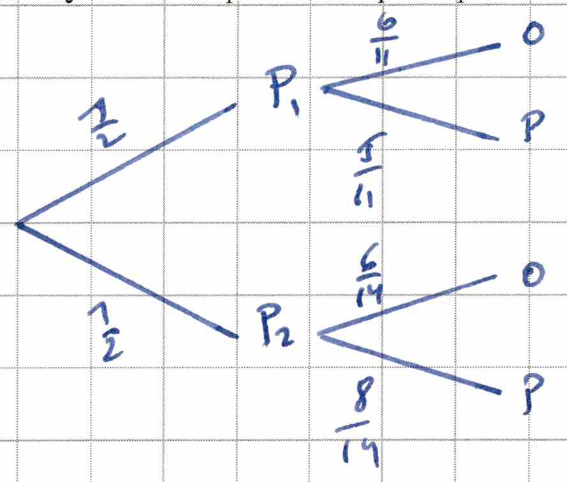



$$P(P/G) = \frac{P(P \cap G)}{P(G)}$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,2 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,7}$$

$$= 0,125$$

16. Un panier contient 6 oranges et 5 pamplemousses. Un deuxième panier contient 6 oranges et 8 pamplemousses. Choisissons un panier au hasard et prélevons-y un fruit. Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne une orange ?

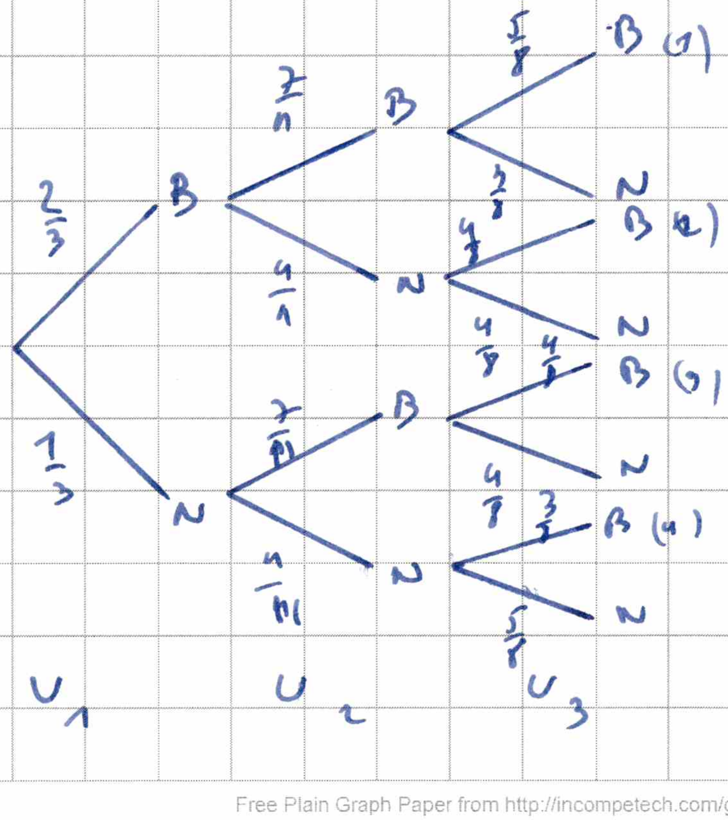


$$P(O) = P(O \cap P_1) + P(O \cap P_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{14}$$

$$= \frac{75}{154}$$

17. Une urne contient 6 balles blanches et 3 balles noires ; une deuxième urne contient 7 balles blanches et 4 balles noires. On choisit une balle au hasard dans chacune des urnes et on place ces deux balles dans une troisième urne contenant déjà 3 balles blanches et 3 balles noires. On prélève ensuite une balle dans cette troisième urne ; quelle est la probabilité pour que cette balle soit blanche ?



$$P(B) = (1) + (2) + (3) + (4)$$

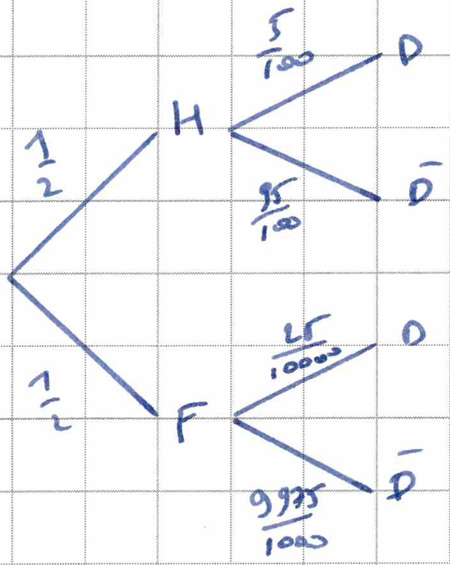
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{8}$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{8}$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{8}$$

$$= \frac{71}{132}$$

18. Supposons que 5 hommes sur 100 et 25 femmes sur 10000 soient daltoniens. Choisissons un daltonien au hasard. Quelle est la probabilité pour que cette personne soit un homme, si l'on suppose que les hommes et les femmes sont en nombre égal ?

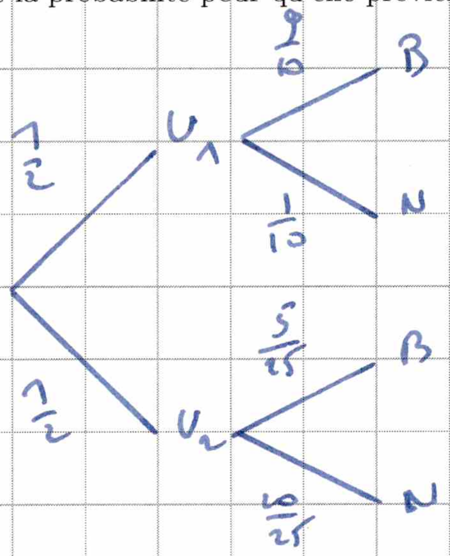



$$P(H/D) = \frac{P(H \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100} + \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{10000}}$$

$$= \frac{20}{21}$$

19. Une urne $U_1$ contient 9 balles blanches et 1 noire. Une autre urne $U_2$ contient 5 balles blanches et 20 noires. On prélève une balle au hasard dans une des urnes choisie elle-même au hasard parmi $U_l$ et $U_2$. On constate que cette balle est blanche. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne $U_1$ ?




$$P(U_1/B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)}$$

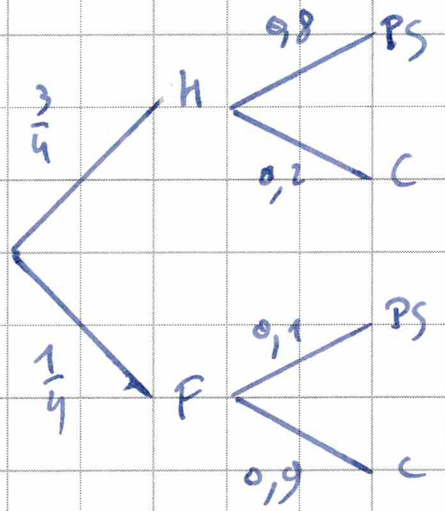
$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{9}{11}$$

20. Un restaurant prépare deux plats pour les clients pressés : un plat froid spécial et une assiette de charcuterie. 80% des hommes qui sont clients commandent le plat spécial, les autres prenant le second plat, 90% des clientes commandent l'assiette de charcuterie, les autres prenant le plat spécial. 75% des clients sont des hommes. On demande :

(a) la proportion de plats spéciaux par rapport aux assiettes de charcuterie que doit idéalement préparer le restaurant ;

(b) la probabilité pour qu'une personne commandant un plat spécial soit un homme.




a) $P(PS) = P(PS \cap F) + P(PS \cap H)$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{10}$

$= \frac{5}{8} \Rightarrow P(C) = \frac{3}{8}$

b) $P(H/PS) = \dfrac{P(H \cap PS)}{P(PS)}$

$= \dfrac{\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{10}}{\frac{5}{8}}$

$= \frac{24}{25}$

21. Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. Le vaccin est-il efficace ?
Si on suppose de plus que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades. Quelle est la proportion de malades dans la population ?

$P(V) = \frac{1}{3}$ ; $P(V/M) = \frac{2}{15}$

a) $P(M/V) = \dfrac{P(M \cap V)}{P(V)}$ et $P(V/M) = \dfrac{P(V \cap M)}{P(M)}$

$\Leftrightarrow P(M/V) = \dfrac{P(V/M) \cdot P(M)}{P(V)} = \dfrac{\frac{2}{15} \cdot P(M)}{\frac{1}{3}}$

$= \frac{2}{5} P(M) \Rightarrow$ le vaccin est efficace

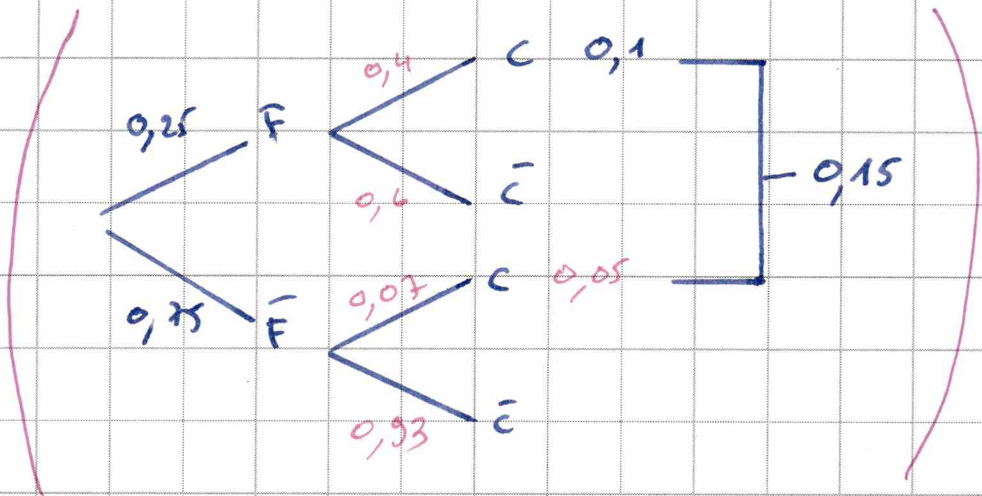
b) $P(M/V) = \frac{8}{100} \Rightarrow P(M) = \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{100} = \frac{1}{5}$

22. Dans un athénée, 25% des élèves échouent en français, 15% échouent en chimie et 10% échouent en chimie et en français. On choisit un élève au hasard.

(a) S'il échoue en chimie, quelle est la probabilité qu'il échoue aussi en français ?

(b) S'il échoue en français, quelle est la probabilité qu'il échoue aussi en chimie ?

(c) Quelle est la probabilité qu'il échoue en français ou en chimie ?




a) $P(F/C) = \dfrac{P(F\cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,1}{0,15} = \dfrac{2}{3}$

b) $P(C/F) = \dfrac{P(C\cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,1}{0,25} = \dfrac{2}{5}$

c) $P(F\cup C) = P(F) + P(C) - P(F\cap C)$

$= 0,25 + 0,15 - 0,1$

$= \dfrac{3}{10}$

23. Quelle est la probabilité de gagner au Lotto à 42 numéros.

(a) Au rang 1 (6 bons numéros)

(b) Au rang 2 (5 bons numéros et le complémentaire)

(c) Au rang 3 (5 bons numéros)

(d) Au rang 4 (4 bons numéros)

(e) Au rang 5 (3 bons numéros)

a) $P(R_1) = \dfrac{1}{C_{42}^{6}} = 1,9\ 10^{-7}$

b) $P(R_2) = \dfrac{C_6^5 \cdot 1}{C_{42}^{6}} = 11,4\ 10^{-7}$

c) $P(R_3) = \dfrac{C_6^5 \cdot C_{35}^{1}}{C_{42}^{6}} = 4\ 10^{-5}$

35 car on ne peut prendre le complémentaire !

d) $P(R_4) = \dfrac{C_6^4\ C_{36}^{2}}{C_{42}^{6}} = 18\ 10^{-4}$

e) $P(R_5) = \dfrac{C_6^3\ C_{36}^{3}}{C_{42}^{6}} = 242\ 10^{-4}$

24. On jette une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir face est le double de la probabilité d'obtenir pile. Si face apparaît, on choisit au hasard l'un des nombres allant de 1 à 9. Si c'est pile qui apparaît, on choisit au hasard l'un des nombres allant de 1 à 5. Calculer la probabilité qu'un nombre pair ait été choisi.

$P(F) = \frac{2}{3}$ $\quad P(P) = \frac{1}{3}$

$P(P_a) = P[(P_a \cap F) \cup (P_a \cap P)]$

$= P(P_a \cap F) + P(P_a \cap P)$

$= P(P_a) . P(F) + P(P_a) . P(P)$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$

$= \frac{58}{135}$