

Rappel de 5^{ème} : Solutions

1 Analyse

1. Déterminer l'équation des asymptotes des fonctions suivantes. Etudier la position relative de la courbe représentative de la fonction par rapport aux asymptotes.

$$(a) f(x) = \frac{4x^2 - 10x - 3}{6(x-1)}$$

$$\text{dom}_f : \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

signe :

x		$\frac{5-\sqrt{37}}{4}$		1		$\frac{5+\sqrt{37}}{4}$		
N		+	0	-		-	0	+
D		-		-	0	+		+
$f(x)$		-	0	+	$\neq$	-	0	+

$$\underline{AV} : \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-3}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\underline{AH} : \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad FI$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{4x^2}{6x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x}{3} = \pm \infty \Rightarrow \underline{AH}$$

$$\underline{AO} : \text{div euclidienne} \quad \begin{array}{r|l} 4x^2 - 10x - 3 & 6x - 6 \\ \underline{-(4x^2 - 4x)} & \frac{2}{3}x - 1 \\ & -6x - 3 \\ & \underline{-(-6x + 6)} \\ & -9 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - 1 - \frac{9}{6(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow f(n) = \frac{2}{3}n - 1 - \frac{3}{2n-2}$$

Si $n \rightarrow \pm \infty$, $\frac{3}{2n-2} \rightarrow 0$ et

$f(n)$ tend vers $\frac{2}{3}n - 1$ (ég de dt)

$$\rightarrow AO \approx y = \frac{2}{3}n - 1$$

De plus: $d(n) = \frac{-3}{2n-2}$

n	1	
n	-	-
D	-	+
$d(n)$	+	-

$f(n)$
au-dessus de
l'AO

$f(n)$
sous l'AO

$$(b) f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

$$\text{dom } f: x^2 + x + 1 \geq 0, \Delta < 0 \rightarrow \text{tjs mai}$$

$$\text{dom } f: \mathbb{R}$$

AV: /

$$\underline{\text{AH}}: \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \rightarrow \text{AH}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty - \infty \quad \text{FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{\quad} - x)(\sqrt{\quad} + x)}{\sqrt{\quad} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + x + 1 - \cancel{x^2}}{D} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \text{AH} \equiv y = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\text{Pos}} \quad \underline{\text{AH}} \quad d(x) = \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad d(x) &= \frac{[\sqrt{\quad} - (x + \frac{1}{2})][\sqrt{\quad} + (x + \frac{1}{2})]}{\sqrt{\quad} + (x + \frac{1}{2})} \\ &= \frac{x^2 + x + 1 - (x + \frac{1}{2})^2}{D} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{n^2} + \cancel{n} + 1 - (\cancel{n^2} + \cancel{n} + \frac{1}{4})}{D} = \frac{3}{4D} > 0$$

$(\text{con}, \text{en} + \infty, D > 0) \rightarrow f(n) \text{ au-dessus AH}$

AO: $(\text{en} - \infty): m = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{f(n)}{n} = \frac{\infty}{\infty}$ FI

$$= \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{n^2} - n}{n} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{|n| - n}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-n - n}{n} = -2$$

$$p = \lim_{n \rightarrow -\infty} [f(n) + 2n] = \lim_{n \rightarrow -\infty} \sqrt{\quad} + n$$

$$= \infty - \infty \text{ FI}$$

$$= \dots (\text{cf calcul AH})$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \text{AO} \equiv y = -2n - \frac{1}{2}$$

Pos 1/2 AO $d(n) = \sqrt{\quad} - n + 2n + \frac{1}{2}$

$$= \frac{[\sqrt{\quad} + (n + \frac{1}{2})][\sqrt{\quad} - (n + \frac{1}{2})]}{\sqrt{\quad} - (n + \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{3}{4D} > 0 \quad (\text{cf AH}) \rightarrow f(n) \text{ au-dessus de l'AO}$$

$$(\text{con}, \text{en} - \infty, D > 0)$$

2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes. Simplifier et factoriser le résultat le plus possible.

(a) $[(x^2 - 6)(2x + 3)^2]'$

$$\begin{aligned} &= 2x(2x+3)^2 + 2(x^2-6)(2x+3) \cdot 2 \\ &= 2(2x+3) [x(2x+3) + 2(x^2-6)] \\ &= 2(2x+3) (2x^2 + 3x + 2x^2 - 12) \\ &= 2(2x+3) (4x^2 + 3x - 12) \end{aligned}$$

$$(b) \left[\frac{1-x^3}{(1-x^2)^2} \right]'$$

$$= \frac{-3x^2(1-x^2)^{\cancel{2}} - (1-x^3)2(1-x^2)^{\cancel{1}}(-2x)}{(1-x^2)^{\cancel{4}^3}}$$

$$= \frac{-3x^2(1-x^2) + 4x(1-x^3)}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{-3x^2 + 3x^4 + 4x - 4x^4}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{-x^4 - 3x^2 + 4x}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{x(-x^3 - 3x + 4)}{(1-x^2)^3}$$

$$\left(= \frac{x(\cancel{x-1})(-x^2-x-4)}{(1-x)^{\cancel{2}^1}(1+x)^3} \right)$$

$$= \frac{x(x^2+x+4)}{(1-x)^2(1+x)^3}$$

$$(c) [(x-1)^2 \sqrt{x^2+2x-1}]'$$

$$= 2(x-1) \sqrt{x^2+2x-1} + (x-1)^2 \cdot \frac{2x+2}{2\sqrt{}}$$

$$= \cancel{2}(x-1) \frac{2x^2+4x-2+x^2-1}{\cancel{2}\sqrt{}}$$

$$= (x-1) \frac{3x^2+4x-3}{\sqrt{}}$$

$$= \frac{(x-1)(3x^2+4x-3)}{\sqrt{x^2+2x-1}}$$

$$(g) \left[\frac{2}{x} \sqrt{4+x^2} \right]'$$

$$= -\frac{2}{x^2} \cdot \sqrt{4+x^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{}}$$

$$= \frac{-2(4+x^2) + 2x^2}{x^2 \sqrt{}}$$

$$= \frac{-8}{x^2 \sqrt{4+x^2}}$$

$$(2) \left[\frac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \right]'$$

$$= \frac{3x^2 \sqrt{} + x^3 \frac{3(1-x^2)^2 (2x)}{2\sqrt{}}}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{3x^2 (1-x^2)^{\cancel{3}} + 3x^4 (1-x^2)^{\cancel{2}}}{(1-x^2)^{\cancel{3}} \sqrt{}}$$

$$= \frac{3x^2 - 3x^4 + 3x^4}{D}$$

$$= \frac{3x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x(3+2x^2)}{3\sqrt[4]{(1+x^2)^3}} \right]' = \left[\frac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^{3/4}} \right]'$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(3+6x^2)(1+x^2)^{\frac{3}{4}} - (3x+2x^3) \cdot \frac{3}{4}(1+x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot 2x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{2(3+6x^4)(1+x^2) - 3x(3x+2x^3)}{2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{2(6x^4+9x^2+3) - (9x^2-6x^4)}{(1+x^2)^{\frac{7}{4}}}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{\cancel{6}x^4 + \cancel{9}x^2 + \cancel{6}}{D}$$

$$= \frac{2x^4 + 3x^2 + 2}{2\sqrt[4]{(1+x^2)^7}}$$

$$g) \left[\frac{(1+3x^2)\sqrt{1-2x^2}}{2x^3} \right]'$$

$$= \frac{(6x\sqrt{} + (1+3x^2) \cdot \frac{-4x}{2\sqrt{}})}{2x^6} - \dots$$

$$= \frac{(1+3x^2)\sqrt{} \cdot \frac{3}{6x^2}}{2x^6}$$

$$= \frac{[12x(1-2x^2) - 4x(1+3x^2)]x^3 - 6x^2(1+3x^2)(1-2x^2)}{2 \cdot 2x^6 \sqrt{}}$$

$$= \frac{x^2(8x - 24x^3 - 4x - 12x^3)x - 6(-6x^4 + x^2 + 1)}{4x^4 \sqrt{}}$$

$$= \frac{8x^2 - 36x^4 + 36x^4 - 6x^2 - 6}{4x^4 \sqrt{}}$$

$$= \frac{2x^2 - 6}{4x^4 \sqrt{}}$$

$$= \frac{x^2 - 3}{2x^4 \sqrt{1-2x^2}}$$

3. Soit la fonction $f(x) = |x + \sqrt[3]{x^2}|$.

(a) Déterminer le domaine et le(s) zéro(s) de $f(x)$.

CE — donc $f: \mathbb{R}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt[3]{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = -x \Leftrightarrow x^2 = -x^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

(b) Montrer que la fonction n'admet aucune asymptote.

• pos d'AV car dom $f: \mathbb{R}$

• signe de $x + \sqrt[3]{x^2}$ (pour la traduction de la V.A.)

$$\text{Si } x > 0, \quad x + \sqrt[3]{x^2} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x < 0: & \frac{(x + \sqrt[3]{x^2})(x^2 - x\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^4})}{x^2 - x\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^4}} \\ &= \frac{x^3 + x^2}{D} \end{aligned}$$

x		-1	0	
x^2	+	+	0	+
$x+1$	-	0	+	+
D	+	+	+	+
$x + \sqrt[3]{x^2}$	-	0	+	0

$$\bullet \lim_{\pm \infty} f(x) = +\infty \rightarrow \text{pas d'AH}$$

$$\bullet \stackrel{m}{=} \lim_{\pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{FI}$$

$$= \lim_{\pm \infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1$$

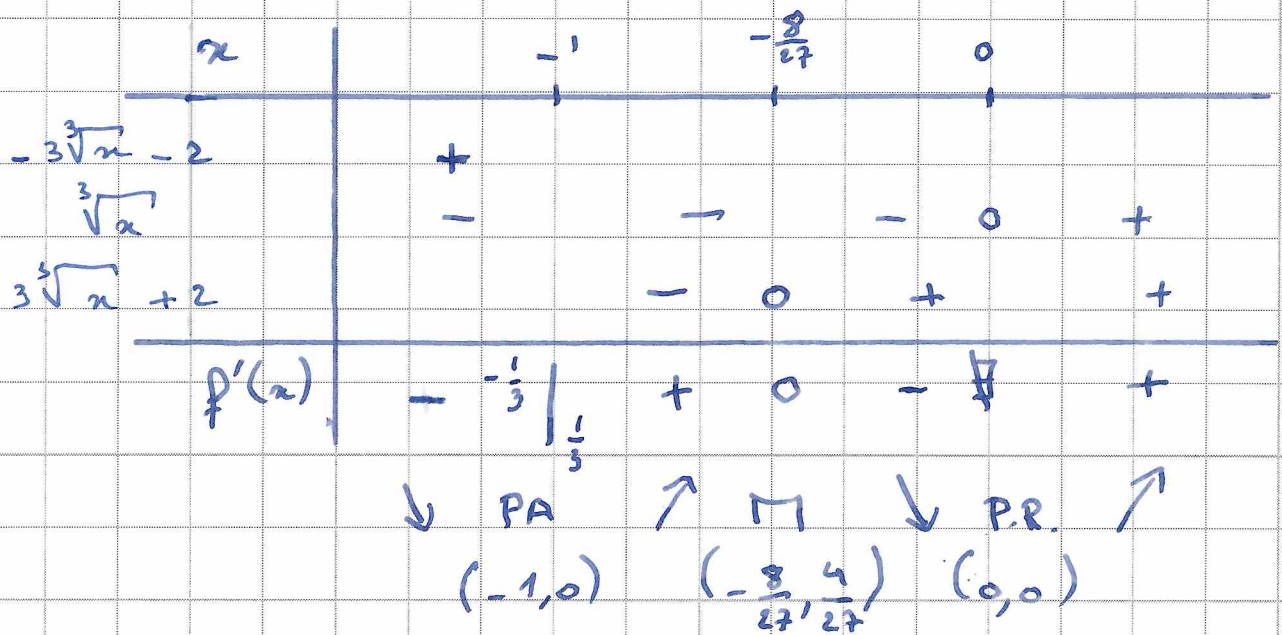
$$\text{en } +\infty: p = \lim_{+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{+\infty} \left(x + \sqrt[3]{x^2} - x \right) \\ = +\infty \rightarrow \text{pas d'Ao}$$

en $-\infty$: m calcul.

(c) Etudier les variations de $f(x)$ en précisant clairement ce qui se passe en $x = -1$ et $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{si } x \geq -1 \\ -1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{27}$$



4. Etudier complètement $f(x) = |x| \sqrt[3]{(x-1)^2}$ (domaine, zéros, asymptotes, variations).

* $\text{dom}_f : \mathbb{R}$ (aucune CE)

* zéros $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $x-1 = 0 \quad x = 1$

* AV /

AH $\lim_{\pm\infty} f(x) = +\infty \rightarrow \text{AH}$

AO : $\lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ FI

$$= \begin{cases} \lim_{-\infty} \frac{-x \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = -\infty \\ \lim_{+\infty} \dots = +\infty \end{cases} \rightarrow \text{AO}$$

$$* f(x) = \begin{cases} x \sqrt[3]{(x-1)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ -x \sqrt[3]{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\sqrt[3]{(x-1)^2} + x \left[(x-1)^{\frac{2}{3}} \right]' \right] \\ &= \sqrt[3]{} + x \cdot \frac{2}{3} (x-1)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{(x-1)^2} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x-1}} \\ &= \frac{3x-3+2x}{3\sqrt[3]{(x-1)^3}} = \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}} \quad \text{si } x \geq 0 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{3-5x}{3\sqrt[3]{x-1}} \quad \text{si } x < 0$$

x	0	$\frac{3}{5}$	1		
$5x-3$	(-)	-	0	+	+
$\sqrt[3]{x-1}$	-	-	-	0	+
$3-5x$	+	(+)	0	-	-
$f'(x)$	- PA	+	0	$-\infty$	+
$f(x)$	$\downarrow (0,0)$	$\uparrow$	$\cap (\frac{3}{5}, \otimes)$	$\downarrow$ PR	$\uparrow (1,0)$

$$f'(0^-) = -1 \quad \text{et} \quad f'(0^+) = 1 \quad \rightarrow \text{PA en } x=0$$

$$\otimes f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3 \sqrt[3]{20}}{25}$$

5. Soient les fonctions f et g définies par : $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} - \sqrt{x^2+1}$ et $g : x \mapsto x\sqrt{x^2+1} - 1$.

Soient $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_g$ les graphes respectifs de f et g

(a) 1^{ère} partie : Etude de g .

i. Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de g ? Justifier les réponses!

$$\text{dom } g : \mathbb{C} \in x^2 + 1 \geq 0 \rightarrow \text{tjs vrai} \\ \Rightarrow \text{dom } g = \mathbb{R}$$

$\text{dom}_c g = \text{dom } g$ car diff de fcts continues

$\text{dom}_{g'} :$

Rigoureusement : $g'(a) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{g(n) - g(a)}{n - a}$

$$= \lim_{n \rightarrow a} \frac{n\sqrt{n^2+1} - a\sqrt{a^2+1}}{n - a} = \frac{0}{0} \text{ FI}$$

$$= \lim_{n \rightarrow a} \frac{(n\sqrt{} - a\sqrt{})(n\sqrt{} + a\sqrt{})}{(n-a)(n\sqrt{} + a\sqrt{})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow a} \frac{n^2(n^2+1) - a^2(a^2+1)}{D(n)}$$

Simplifions $N(n) = n^4 + n^2 - a^4 - a^2$

$$= (n^4 - a^4) + (n^2 - a^2)$$

$$= (n^2 - a^2)(n^2 + a^2) + (n^2 - a^2)$$

$$= (n^2 - a^2)(n^2 + a^2 + 1)$$

$$= (n - a)(n + a)(n^2 + a^2 + 1)$$

$$\Rightarrow g'(a) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{(n-a)(n+a)(n^2+a^2+1)}{(n-a)(n\sqrt{} + a\sqrt{})}$$

$$= \frac{2a(2a^2+1)}{2a\sqrt{a^2+1}} = \frac{2a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\text{dom}_{g'} : \mathbb{C} \in : a^2 + 1 > 0$ tjs vrai $\Rightarrow \text{dom}_{g'} : \mathbb{R}$

Plus rapide : calculer $g'(n)$!

ii. Etudier les limites de g aux bornes du domaine et en déduire les asymptotes éventuelles à $\mathcal{G}_g$.

AV — car $\text{dom } g = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \sqrt{x^2 + 1} - 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \text{pas d'AH}_g$$

AO : $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right] = +\infty$

$\sim \text{pas d'AO}_d$

Idem en $-\infty$

iii. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'après la question (a) i, $g'(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

qui est tjrs > 0 sur $\text{dom}_g \rightarrow g(x)$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

iv. En déduire que g admet une seule racine α , dont on déterminera la valeur exacte.

Par le TVI, $g(x)$ est monotone
et change de signe sur dom_g
(car $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$) $\rightarrow g(x)$ s'annule
une fois.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + 1} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + 1} = 1 \quad \underline{\text{c.c. : } x > 0}$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0$$

dont la seule solution acceptable
(sur les c.c.) est:

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2} \quad (= \alpha)$$

(b) 2^{ème} partie : Etude de f .

i. Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f ? Justifier les réponses!

Les justifications sont identiques à celle de la partie 1.

$$\bullet \text{ dom}_f : \mathbb{R}$$

$$\bullet \text{ dom}_c^f : \mathbb{R}$$

$$\bullet f'(a) = \frac{a(a\sqrt{a^2+1} - 1)}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\Rightarrow \text{dom}_{f'} = \mathbb{R}$$

ii. Quelles sont les limites de f aux bornes du domaine. Etudier l'existence d'asymptotes.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty \rightarrow AH_g \quad \S$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty - \infty \quad FI$$

Le terme en x^3 tend plus vite vers l'infini que le terme $\sqrt{x^2+1}$

On peut donc déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\rightarrow AH_d \quad \S$$

Idem pour la AO.

iii. Etudier les variations de f en utilisant les résultats de la 1^{ère} partie.

D'après la question (b) i,

$$f'(x) = \frac{x(x\sqrt{x^2+1}-1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

Le tableau de variations est donc :

x	0		α		
x	-	0	+	+	
$x\sqrt{x^2+1}-1$	-	0	-	+	← d'1 ^{ère} partie
$\sqrt{x^2+1}$	+		+	+	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	↗	↘	↘	↗
		$(0, -1)$		$(\alpha, f(\alpha))$	

$$f(\alpha) = - \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+22}}{6} \quad (\text{difficile})$$

2 Trigonométrie

Résoudre les équations et inéquations suivantes : ($x \in [0, 2\pi[$)

1. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(+2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = 2x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 3x - \frac{\pi}{4} = -2x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = -2x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ 5x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

$$S_p: \left\{ \frac{\pi}{60}, \frac{5\pi}{12}, \frac{49\pi}{60}, \frac{31\pi}{60}, \frac{97\pi}{60} \right\}$$

$$S_g: \left\{ \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5} \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \tan x - \cot x = 1$$

$$\underline{CE} : x \neq k\pi \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \tan x - \frac{1}{\tan x} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$\tan x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\tan x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 1,017 + k\pi$$

$$\tan x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = -0,55 + k\pi$$

$$S_p : \{1,017; 2,591; 4,186; 5,733\}$$

$$S_g : \{-0,55 + k\pi, 1,017 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$3. \sin x + \sin 3x = 1 + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2} \sin 2x \cos(-x) = \cancel{1} + \cancel{2} \cos^2 x - \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \cos x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x \cos x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$S_P: \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$S_g: \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$4. 2(\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x) = \sqrt{2} - 1 \quad \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$2\sqrt{3} \tan x - 2 \tan^2 x - (\sqrt{2} - 1)(1 + \tan^2 x) = 0$$

$$- (\sqrt{2} + 1) \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x - (\sqrt{2} - 1) = 0$$

$$\Delta = 12 - 4 = 8$$

$$\tan x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{2}}{-2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

$$x_1 = 0,918 \text{ rad} + k\pi$$

$$x_2 = 0,131 \text{ rad} + k\pi$$

$$S_g : \{ 0,131 + k\pi; 0,916 + k\pi \} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S_p : \{ 0,131; 0,916; 3,273; 4,058 \}$$

$$5. \sin x + \cos x < 0.5$$

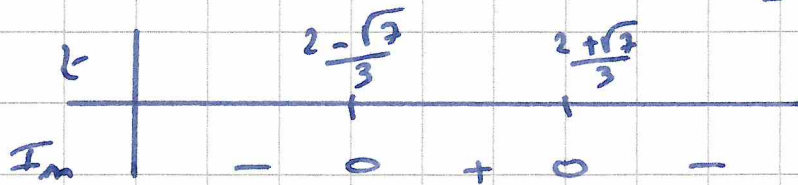
On pose $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{1}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow 4t + 1 - 2t^2 - 1 - t^2 < 0 \quad (\text{car } 1+t^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow -3t^2 + 4t + 1 < 0$$

$$\Delta = 16 + 12 = 28 \quad t_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{-6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$



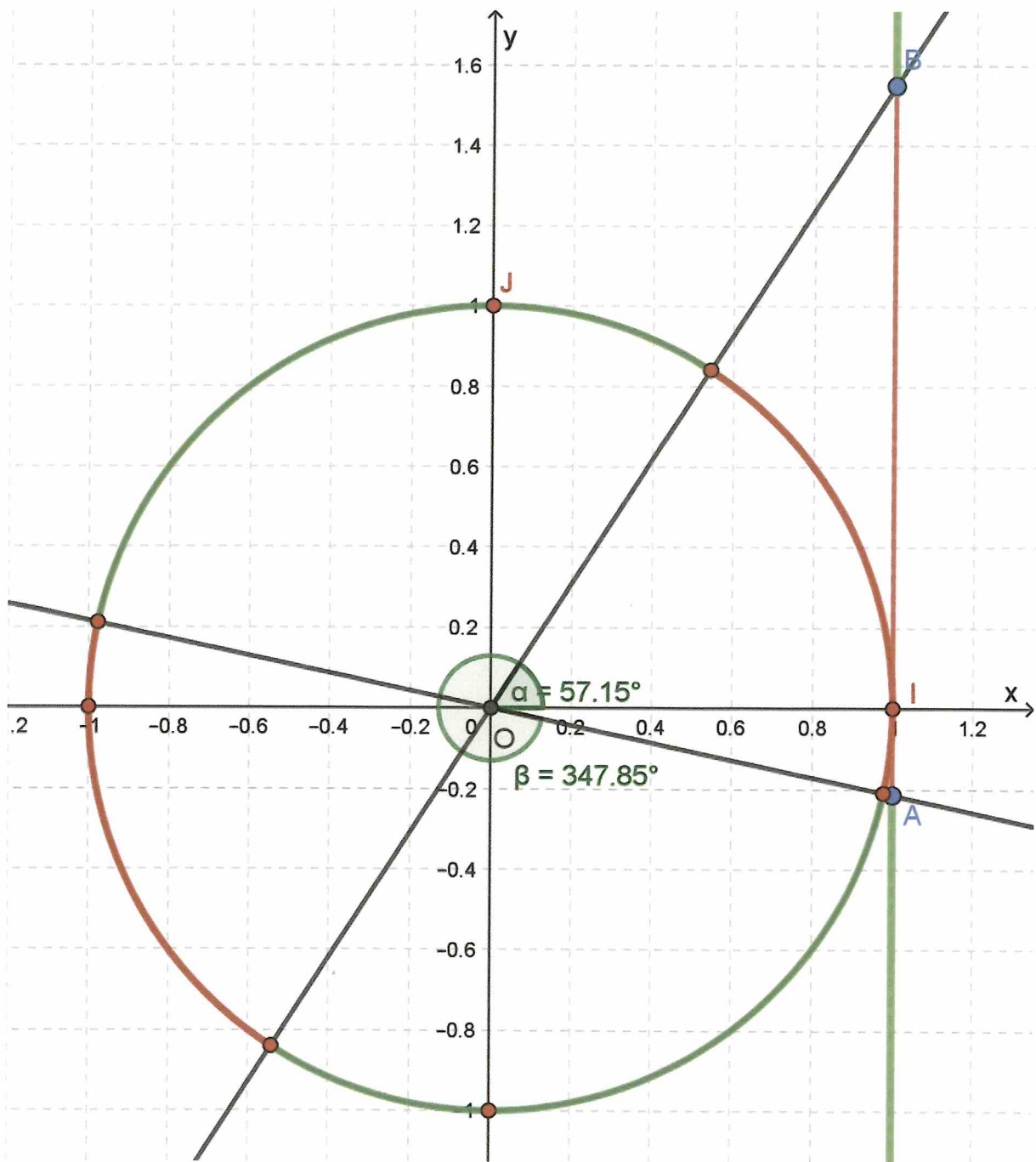
$$\Leftrightarrow t \in -\infty, \frac{2-\sqrt{7}}{3} [\cup] \frac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} \in]0,997; \frac{\pi}{2} [\cup] \frac{\pi}{2}; 2,929[+ k\pi \quad (\text{cf cercle unitaire})$$

$$\Rightarrow x \in]1,994; \pi [\cup] \pi; 5,829[+ 2k\pi$$

$$S_g : \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{]1,994; \pi [;] \pi; 5,829[\right\}$$

$$S_p :]1,994; \pi [\cup] \pi; 5,829[$$



$$6. 5 \cos x - 4 < 3 \cos 2x$$

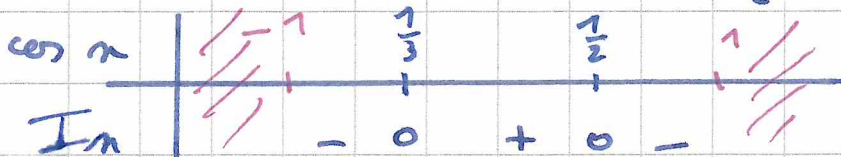
$$\Leftrightarrow -3 \cos 2x + 5 \cos x - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow -3(2 \cos^2 x - 1) + 5 \cos x - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow -6 \cos^2 x + 5 \cos x - 1 < 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$\cos x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{-12} < \frac{1}{3}$$



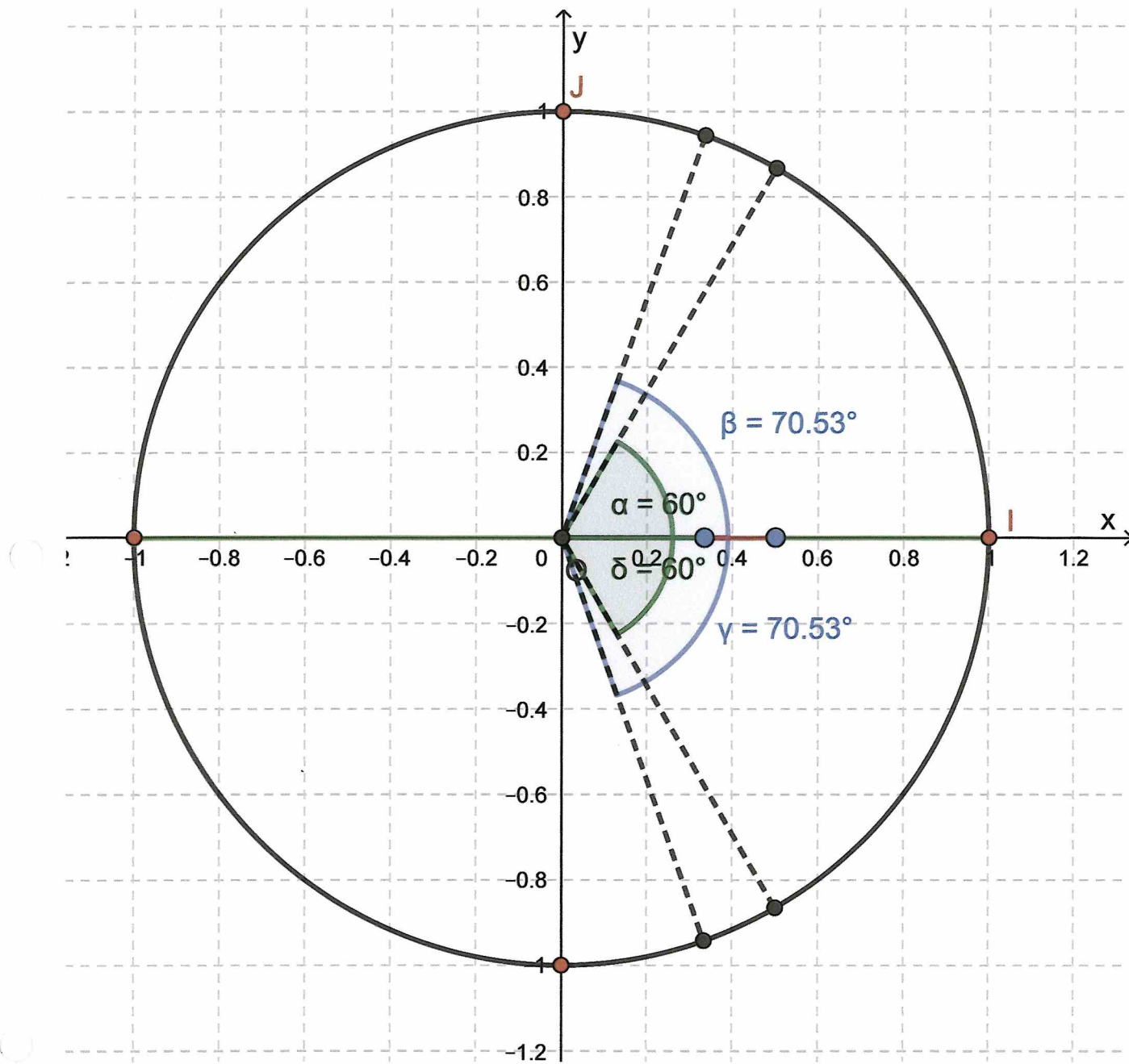
$$\Rightarrow \cos x \in [-1, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, \frac{\pi}{3}] \cup]1, 231; 5,052] \cup \frac{\pi}{2}, 2\pi[$$

(circle trigo)

$$S_p:]0, \frac{\pi}{3}] \cup]1, 231; 5,052] \cup \frac{\pi}{2}, 2\pi[$$

$$S_g = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ S_p + 2k\pi \}$$



$$7. \frac{2 \sin 2x - 1}{\cos 2x - 3 \cos x + 2} > 0$$

Zéros: N: $2 \sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{sur } [0, 2\pi[: \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$$

D: $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad \cos x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} < \frac{1}{2}$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \text{sur } [0, 2\pi[: \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
u	-	0	+	+	0	-	0	-
$\cos x - \frac{1}{2}$	+	+	0	-	-	-	-	0
$\cos x - 1$	0	-	-	-	-	-	-	0
I_m	$\frac{1}{2}$	+	0	-	$\frac{1}{2}$	+	0	-

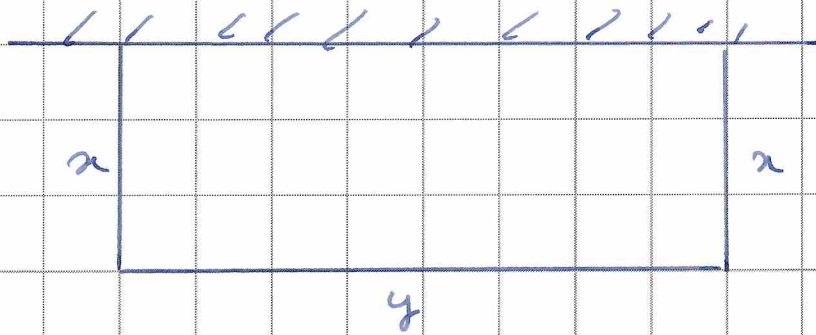
⊗ cos particulière!

$$S_p :]0, \frac{\pi}{12}[\cup]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}[\cup]\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}[\cup]\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$$

$$S_g : \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ S_p + 2k\pi \right\}$$

3) Problèmes d'extrémums : Solutions

1)



$$L = 2x + y \quad \text{et} \quad xy = 450$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{450}{x}$$

$$\Rightarrow L = 2x + \frac{450}{x}$$

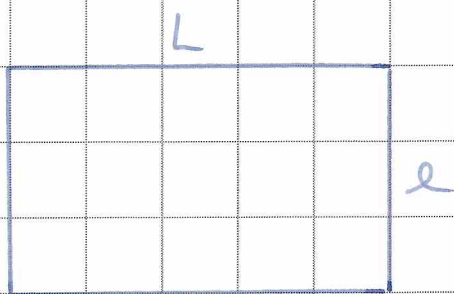
$$L' = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{450}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow x = 15$$

$$\Leftrightarrow y = 30$$

x	0	15
$\frac{2x^2 - 450}{x^2}$	///	- 0 +
		↘ m ↗

2)



$$P = 2L + 2l$$

$$A = Ll$$

$$Ll = 16 \Leftrightarrow l = \frac{16}{L}$$

$$\rightarrow P = 2L + \frac{32}{L}$$

$$P' = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{32}{L^2} = 0 \Leftrightarrow L^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow L = 4$$

$$\Leftrightarrow l = 4$$

Le rectangle est un carré.

3) Soit l la largeur de la bande non découpée
(voir schéma)

$$V = B \cdot l = l \cdot n \cdot (30 - 2x)$$

$$\text{Or } 2l + 2n = 30 \text{ (voir fig 2)} \\ \Rightarrow l = 15 - n$$

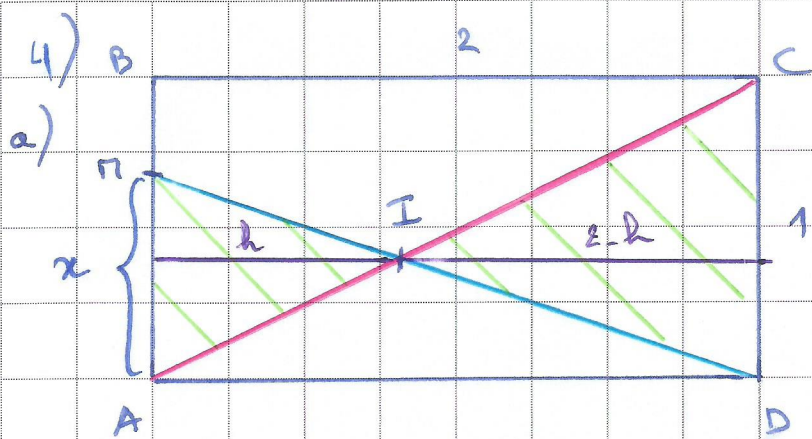
$$\Leftrightarrow V = (15 - n) n (30 - 2x) \\ = 2x^3 - 60n^2 + 450n$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 120x + 450 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$\Delta = 400 - 4 \cdot 75 \\ = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm 10}{2} \begin{matrix} \swarrow 5 \\ \searrow 15 \text{ (AR)} \end{matrix}$$

x	5	15
V'	+	-
	$\uparrow$	$\downarrow$



b) i) Area of two parts are equal
 $\Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{2-h}{1} \Leftrightarrow h = x(2-h)$

ii) $h = 2x - xh \Leftrightarrow h(n+1) = 2x$
 $\Leftrightarrow h = \frac{2x}{1+x}$

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{x \cdot h}{\frac{x^2}{1+x}} + \frac{1 \cdot (2-h)}{2} \\ &= \frac{x^2}{1+x} + 1 - \frac{x}{1+x} \\ &= \frac{x^2 + 1 + x - x}{1+x} \\ &= \frac{x^2 + 1}{1+x} \end{aligned}$$

c) $\Sigma' = \frac{2x(1+x) - (x^2 + 1)}{(1+x)^2}$

$$= \frac{2x + 2x^2 - x^2 - 1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2}$$

$$\Delta_n = 4 + 4 = 8$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

x		$-1-\sqrt{2}$		-1	0		$-1+\sqrt{2}$		
N		+	0	-	-		-	0	+
D		+		+	0	+	+	+	+
Σ'		+	0	-	0		-	0	+

$\downarrow$ $\nearrow$

ii) $x = -1 + \sqrt{2}$

5) Soit x la position de P par rapport à B.

Le temps de parcours est donné par

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

$$t = t_{AP} + t_{BP}$$

$$= \frac{\Delta x_{AP}}{4} + \frac{x}{5}$$

$$\text{et } \Delta x_{AP} = \sqrt{9^2 + (15-x)^2} \quad (\text{Pythagore})$$

$$= \sqrt{x^2 - 30x + 306}$$

$$t_{\min} \Leftrightarrow t' = 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{2x} - \cancel{30}^{15}}{4 \cdot \cancel{2} \sqrt{}} + \frac{1}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 75 + 4\sqrt{} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 75 = -4\sqrt{}$$

$$\underline{\text{CE}} : 5x - 75 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 15 \quad (\text{con})$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 750x + 5625 = 16(x^2 - 30x + 306)$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 270x + 729 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 30x + 81 = 0$$

$$\Delta = 900 - 324 = 576$$

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm 24}{2} \begin{cases} 27 \text{ (A.R.)} \\ 3 \text{ OK} \end{cases}$$

⚠ Vérifier le min avec T.S.