

# Chapitre 3

## Géométrie

1. On donne  $d \equiv \begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{2-y}{3} \\ z=1 \end{cases}$  et les points  $A(1,0,-1)$  et  $B(2,0,1)$

- (a) Trouver les composantes d'un vecteur directeur de  $d$
- (b) Ecrire l'équation du plan  $\pi$  contenant  $d$  et  $A$ ;
- (c) Calculer la distance de  $B$  à  $\pi$ .

(a)  $\vec{v} : (2, -3, 0)$

$PGd : (3, 2, 1)$

(b)  $\overrightarrow{AP} : (2, 2, 2)$

$$R \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow R &\equiv (x-1)(-6) - y(4) + (z+1)10 = 0 \\ &\equiv -6x - 4y + 10z + 16 = 0 \\ &\equiv 3x + 2y - 5z - 8 = 0 \end{aligned}$$

c). Équation de  $d' \perp \alpha$  et  $\ni B$

$$d' = \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 2k \\ z = 1 - 5k \end{cases}$$

•  $d' \cap \alpha$ :

$$3(2 + 3k) + 2(2k) - 5(1 - 5k) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 38k - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow k = \frac{7}{38}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3\left(\frac{7}{38}\right) \\ y = 2\left(\frac{7}{38}\right) \\ z = 1 - 5\left(\frac{7}{38}\right) \end{cases}$$

$$I: \left( \frac{97}{38}, \frac{14}{38}, \frac{3}{38} \right)$$

$$\begin{aligned} \bullet d(B, I) &= \sqrt{\left(2 - \frac{97}{38}\right)^2 + \left(0 - \frac{14}{38}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{38}\right)^2} \\ &= \dots \\ &= \frac{7\sqrt{38}}{38} \end{aligned}$$

2. Déterminer la distance de  $P(0, 0, 4)$  à  $d \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 2 \end{cases}$

•  $\mathcal{R} \perp d$  et  $\exists P$  :

$$d \equiv \begin{cases} x = 2k - 1 \\ y = k + 2 \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \mathcal{R} = 2x + y + z - 4 = 0$$

$$P \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 4 + d = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{R} \equiv 2x + y + z - 4 = 0$$

•  $d \cap \mathcal{R} = \{I\}$

$$2(2k - 1) + (k + 2) + k - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} - 1 \\ y = \frac{2}{3} + 2 \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I: \left( \frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

•  $d(P, I) = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{2}{3}\right)^2}$

$\approx \dots$

$$= \frac{\sqrt{165}}{3}$$

3. Trouver l'angle entre les droites  $d \equiv \begin{cases} x-2=2y \\ 2z+1=2x \end{cases}$  et  $d' \equiv \frac{1-2x}{4} = y+1 = \frac{2-z}{-3}$

$$d \equiv \begin{cases} x=k \\ y=-1+\frac{k}{2} \\ z=-\frac{1}{2}+k \end{cases} \rightarrow \vec{v}_d : \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : (2, 1, 2)$$

$$d' \rightarrow \vec{v}_{d'} : (-2, 1, 3)$$

$$\|\vec{v}_d\| = 3$$

$$\|\vec{v}_{d'}\| = \sqrt{14}$$

$$\vec{v}_d \cdot \vec{v}_{d'} = -4 + 1 + 6 = 3$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{3 \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 1,3 \text{ rad } (74,48^\circ)$$

4. Soient les points  $A(1,-1,0)$ ,  $B(0,1,-1)$  et  $D(\alpha,0,1)$

- Pour quelle valeur de  $\alpha$  le plan  $\pi$  passant par ces trois points est perpendiculaire au plan d'équation  $y = 0$ ?
- Soit une sphère  $S$  de centre  $C(1,2,-1)$  et de rayon 2. Déterminer les caractéristiques de l'intersection de  $\pi$  avec  $S$ .
- Déterminer l'aire du triangle  $ABC$ .

a)  $\vec{AB} : (-1, 2, -1)$  et  $\vec{AD} : (\alpha-1, 1, 1)$

$$ABD \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ -1 & 2 & -1 \\ \alpha-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow ABD \equiv (x-1)3 - (y+1)[-1+\alpha-1] + z[-1-2(\alpha-1)] = 0$$

$$\equiv 3x - (\alpha-2)y + (-2\alpha+1)z + \dots = 0$$

Le vecteur normal de  $y=0$  est  $(0, 1, 0)$   
 $\pi (\equiv ABD) \perp \alpha y=0 \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi} \cdot \vec{n}_{y=0} = 0$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 0 + 1(-\alpha+2) + 0(-2\alpha+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$\rightarrow \pi \equiv 3(x-1) + z(-3) = 0$$

$$\equiv x - z - 1 = 0$$

b) Schema : voir page annexe.

• éq de  $CC'$  :  $CC' \perp \alpha \pi$  et  $C \in \pi$

$$\Rightarrow CC' \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 \\ z = -1 - k \end{cases}$$

•  $\{C'\} = CC' \cap \pi$

$$\Leftrightarrow (1+k) - (-1-k) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1+2k=0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C' : \left( \frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2} \right)$$

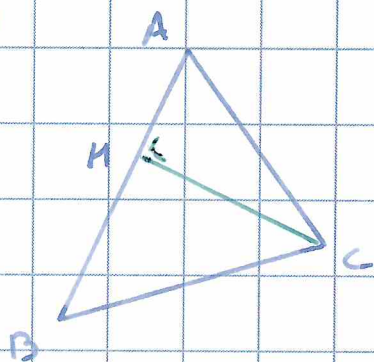
$$\bullet \quad r = \sqrt{kp^2 - |Cc'|^2}$$

$$\text{et } |Cc'| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (2-2)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^2}$$

$$\Rightarrow |Cc'|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{4 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

c)



$$A_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CH|}{2}$$

$$|AB| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

? H :  $CH \perp AB$  et  $\exists C$   
 $(\vec{v}_n = \vec{AB})$

$$\bullet \quad \Gamma \equiv -x + 2y - z + d = 0$$

$$C \in \Gamma \Leftrightarrow -1 + 4 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

$$\Rightarrow \Gamma \equiv -x + 2y - z - 4 = 0$$

$$\bullet \quad AB \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -1 + 2k \\ z = -k \end{cases}$$

$$\bullet \quad \{H\} = \Gamma \cap AB$$

$$\Leftrightarrow -(1+k) + 2(-1+2k) - (-k) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6k - 7 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow H: \left( -\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, -\frac{7}{6} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |CH| &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{7}{6}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{49 + 16 + 1}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{66}}{6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{\sqrt{6} \sqrt{66}}{12} = \frac{6\sqrt{11}}{12} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

