Résolution de systèmes d'équations linéaires : Rappels

1 Définitions

On appelle système d'équations un ensemble de plusieurs équations à plusieurs inconnues qui doivent être vérifiées en même temps.
Résoudre un système, c'est trouver toutes les valeurs qu'il faut donner à chaque inconnue en même temps pour que toutes les égalités soient vraies.

2 Méthode de résolution des systèmes linéaires de Cramer

Les méthodes de résolution des systèmes linéaires de Cramer[1] vont être rappelées sur base de l'exemple suivant.
Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x+10y-3z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$$

2.1 Méthode de substitution

La méthode de substitution consiste à isoler une inconnue d'une équation, de la remplacer dans les deux autres. On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues qui peut être résolu en répétant l'opération.
Dans le cas de notre système, on a :

$$\begin{cases} x+10y-3z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -x+y+z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-10y+3z \\ 2x-y+2z=2 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-10y+3z \\ 2(5-10y+3z)-y+2z=2 \\ -(5-10y+3z)+y+z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-10y+3z \\ 10-21y+8z=2 \\ -5+11y-2z=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-10y+3z \\ -21y+8z=-8 \\ +11y-2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-10y+3z \\ z=-1+\dfrac{21}{8}y \\ +11y-2z=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-10y+3z \\ z=-1+\dfrac{21}{8}y \\ +11y-2\left(-1+\dfrac{21}{8}y\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-10y+3z \\ z=-1+\dfrac{21}{8}y \\ +11y+2-\dfrac{21}{4}y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-10y+3z \\ z=-1+\dfrac{21}{8}y \\ \dfrac{23}{4}y=0 \end{cases}$$

1. où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues

En substituant cette valeur de y issue de la dernière équation dans les autres équations, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ z = -1 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

La solution du systèmes est donc : $S = \{(2, 0, -1)\}$
Cette méthode a l'inconvénient de souvent introduire des fractions (et donc des risques d'erreur de calcul)

2.2 Méthode par combinaison linéaire

La méthode de combinaison linéaire est basée sur la propriété :"*Si l'on remplace une équation d'un système par une combinaison linéaire*[2] *des autres équations du système, le système reste inchangé*". On cherche donc, en multipliant une équation par un cIJfficient et une autre par une autre, et en sommant les deux nouvelles équations, éliminer un inconnue. Si l'on effectue cette opération sur les trois équations de manière à effectuer la même inconnue, on se ramène à un système de deux équations à eux inconnues.
Dans le cas de notre système :

$$\left\{\begin{array}{l|c|c} x + 10y - 3z = 5 & 1 & \\ 2x - y + 2z = 2 & & 1 \\ -x + y + z = -3 & 1 & 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 10y - 3z = 5 \\ 11y - 2z = 2 \\ y + 4z = -4 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l|c} x + 10y - 3z = 5 & \\ 11y - 2z = 2 & 2 \\ y + 4z = -4 & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 10y - 3z = 5 \\ 9y - 2z = 2 \\ 23y = 0 \end{array}\right.$$

En substituant cette valeur de y dans les autres équations, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ z = -1 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

La solution du systèmes est donc : $S = \{(2, 0, -1)\}$
Il est clair que cette technique est beaucoup plus rapide que la précédente. Cette technique est une généralisation de la méthode de "*triangularisation de Gauss*" ou "*méthode du pivot*"

2.3 Méthode du pivot

La méthode du pivot de Gauss est une méthode pour transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre. Les opérations autorisées pour transformer ce système sont :
– échange de deux lignes.
– multiplication d'une ligne par un nombre non nul.
– addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.
Les inconnues sont éliminées successivement dans l'ordre alphabétique.

2. Soient deux "êtres" mathématique quelconque (vecteurs, équations, matrices, ...) u_1 et u_2 et deux nombres réels a_1 et a_2. On appelle combinaison linéaire de u_1 et u_2, l'expression $a_1u_1 + a_2u_2$

Dans le cas de l'exemple :

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + 10y - 3z = 5 \quad \text{permutation de L}_1 \text{ et L}_2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ 21y - 8z = 8 & L_2 \to 2L_2 - L_1 \\ y + 4z = -4 & L_3 \to 2L_3 + L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 21y - 8z = 8 \\ 92z = -92 & L_3 \to 21L_3 - L_1 \end{cases}$$

La dernière ligne donne la valeur de z et en remontant dans le système, on trouve les autres inconnues.
On obtient :

$$\begin{cases} z = -1 \\ y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

La solution du systèmes est donc : $S = \{(2, 0, -1)\}$