



Athénée Royal Uccle 1

Athénée Royal d'Uccle 1

Cours de
Mathématique
6^{ème} année
RÉVISION DE
DÉCEMBRE

Chapitre 1

Analyse

1.1 Exercices

1. Calculer sans utiliser la règle de l'Hospital

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0} \text{ FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - (1 - 2\sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \text{ FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - \sqrt{\cos 2x})(\cos x + \sqrt{\cos 2x})}{\sin^2 x (\cos x + \sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos 2x}{\sin^2 x (\cos x + \sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{D}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin^2 x} (\cos x + \sqrt{\cos 2x})} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x-a) - \cos(x+a)}{x} = \frac{\cos(-a) - \cos a}{0} = \frac{0}{0} \text{ FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x-a+x+a}{2} \sin \frac{x-a-(x+a)}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \sin(-a)}{x}$$

$$= 2 \sin a$$

2. Calculer

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \arctan x = \infty \cdot 0 \text{ FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \frac{0}{0} \text{ FI}$$

$$\stackrel{(RM)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x - 4x}{x - \arcsin 5x} = \frac{0}{0} \quad \text{FI}$$

$$\stackrel{(RH)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+4x^2} - 4}{1 - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}} = \frac{2-4}{1-5} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \cot x) = 0 \cdot \infty \quad \text{FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\frac{1}{\cot x}} \stackrel{(RH)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{(\cot x)^2}{\cot^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\cot^2 x}{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

3. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{\cos x}{\sin 3x} + \cot x$ au point d'abscisse $\frac{5\pi}{6}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \frac{\cos \frac{5\pi}{6}}{\sin \frac{5\pi}{2}} + \cot \frac{5\pi}{6} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} - \sqrt{3} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x \sin 3x - \cos x \cdot 3 \cos 3x}{\sin^2 3x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) 3 \cdot 0}{1} + \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2} - 4 = -\frac{9}{2}$$

$$t = y + \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{9}{2} \left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{9}{2}x + \frac{15\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

4. Etude complète (pas de dérivée seconde)

(a) $f(x) = \sin x \sin 2x$

• dom $f: \mathbb{R}$ période 2π

• $f(-x) = \sin(-x) \sin(-2x)$
 $= [-\sin x] [-\sin 2x]$
 $= \sin x \sin 2x = f(x) \rightarrow [0, \pi[$

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ et $x = \frac{k\pi}{2}$

• Asymptotes: /

signe	x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$\sin x$		0	+	+	0	
$\sin 2x$		0	+	0	-	0
		0	+	0	-	0

• $f'(x) = \cos x \sin 2x + 2 \sin x \cos 2x$
 $= 2 \sin x \cos^2 x + 2 \sin x (1 - 2 \sin^2 x)$
 $= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x - 4 \sin^3 x$
 $= 4 \sin x - 6 \sin^3 x$
 $= 2 \sin x (2 - 3 \sin^2 x)$

zéros: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

$\sin x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,955 + 2k\pi \\ x = -2,166 + 2k\pi \end{cases}$

$\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,955 + 2k\pi \\ x = 2,166 + 2k\pi \end{cases}$

x	0	0,956	2,166	π			
$\sin x$	0	+	+	+	0		
$\sin x - \sin x_1$		+	+	+			
$\sin x - \sin x_2$		-	0	+	-		
-1		-	-	-			
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0
	TH	$\nearrow$	$\sqcap$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\sqcap$
	(0,0)		/	/			(π ,0)

3. Etude complète de

(b) $f(x) = \cos x + \cos 2x$

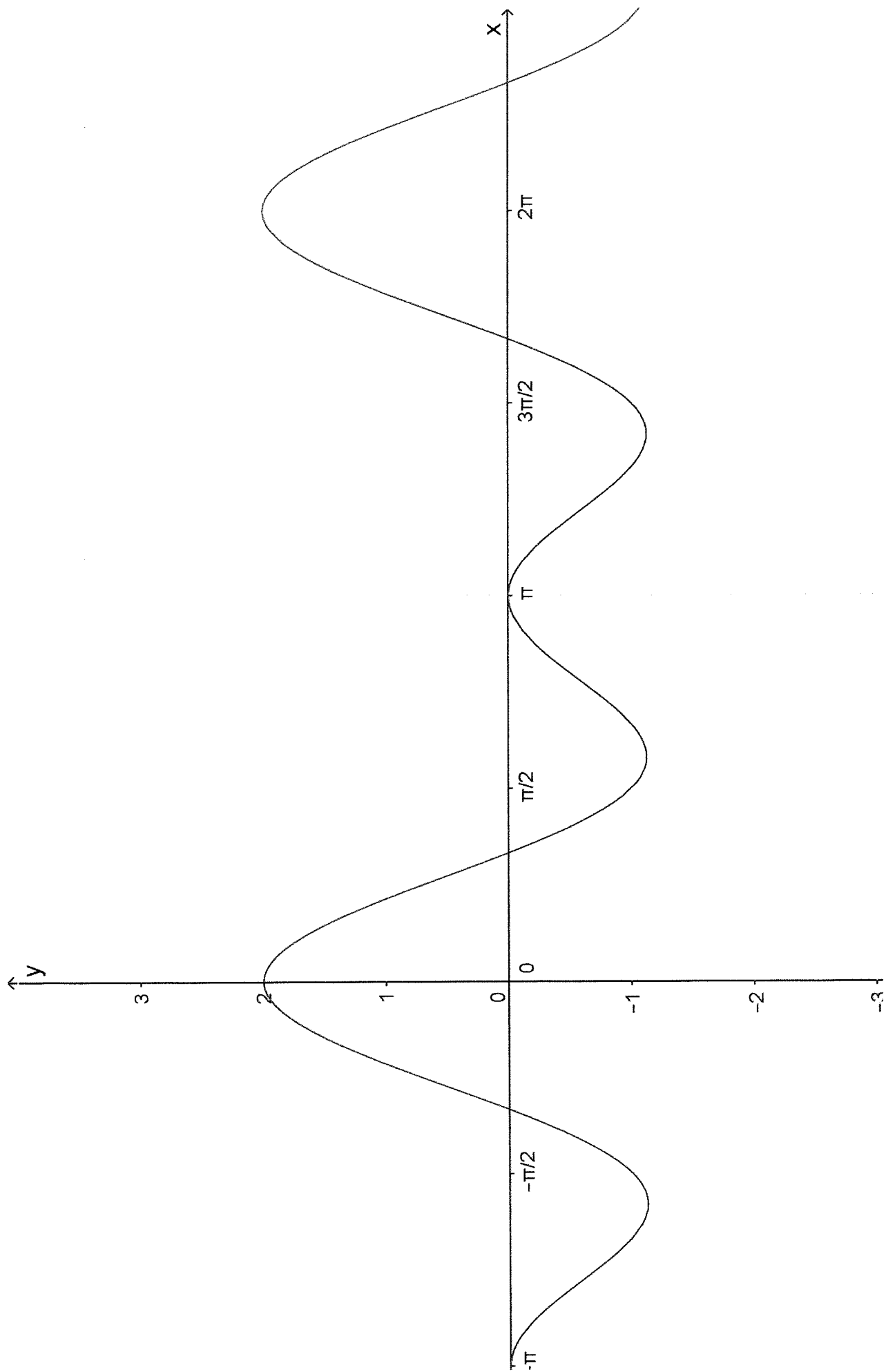
- dom f : $\mathbb{R}$
- $f(-x) = f(x) \rightarrow$ paire
- zéros: $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
 - $T = 2\pi$
 - $\Delta = 9$, $\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} < \frac{1}{2}$

$$\text{Sur } [0, \pi] \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ et } x = \pi$$

- pas d'asymptotes
- $f'(x) = -(\sin x + 2\sin 2x)$

$$= -\sin x (1 + 4\cos x)$$
 - $\downarrow$ $x = 0, \pi$
 - $\downarrow$ $x = 1,82 \text{ rad}$

x	0		1,82		π
$-\sin x$	0	-		-	0
$1+4\cos x$		+	0	-	
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	$(0, 2)$	$\downarrow$	m	$\uparrow$	$(\pi, 0)$
			$(1,82; -1,15)$		



$$(E) f(x) = \arctan(1 - x^2)$$

• dom f : $\mathbb{R}$ • parité $\rightarrow \mathbb{R}^+$

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

• $\lim_{\pm\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ — AM $= y = -\frac{\pi}{2}$

• $f'(x) = \frac{-2x}{1 + (1-x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4 - 2x^2 + 2} \quad \text{com } \mathbb{R}^+$

• $f''(x) = \frac{-2(x^4 - 2x^2 + 2) + 4x(4x^3 - 4x)}{(x^4 - 2x^2 + 2)^2}$

$$= \frac{-2x^4 + 4x^2 - 4 + 8x^4 - 8x^2}{(x^4 - 2x^2 + 2)^2}$$

0

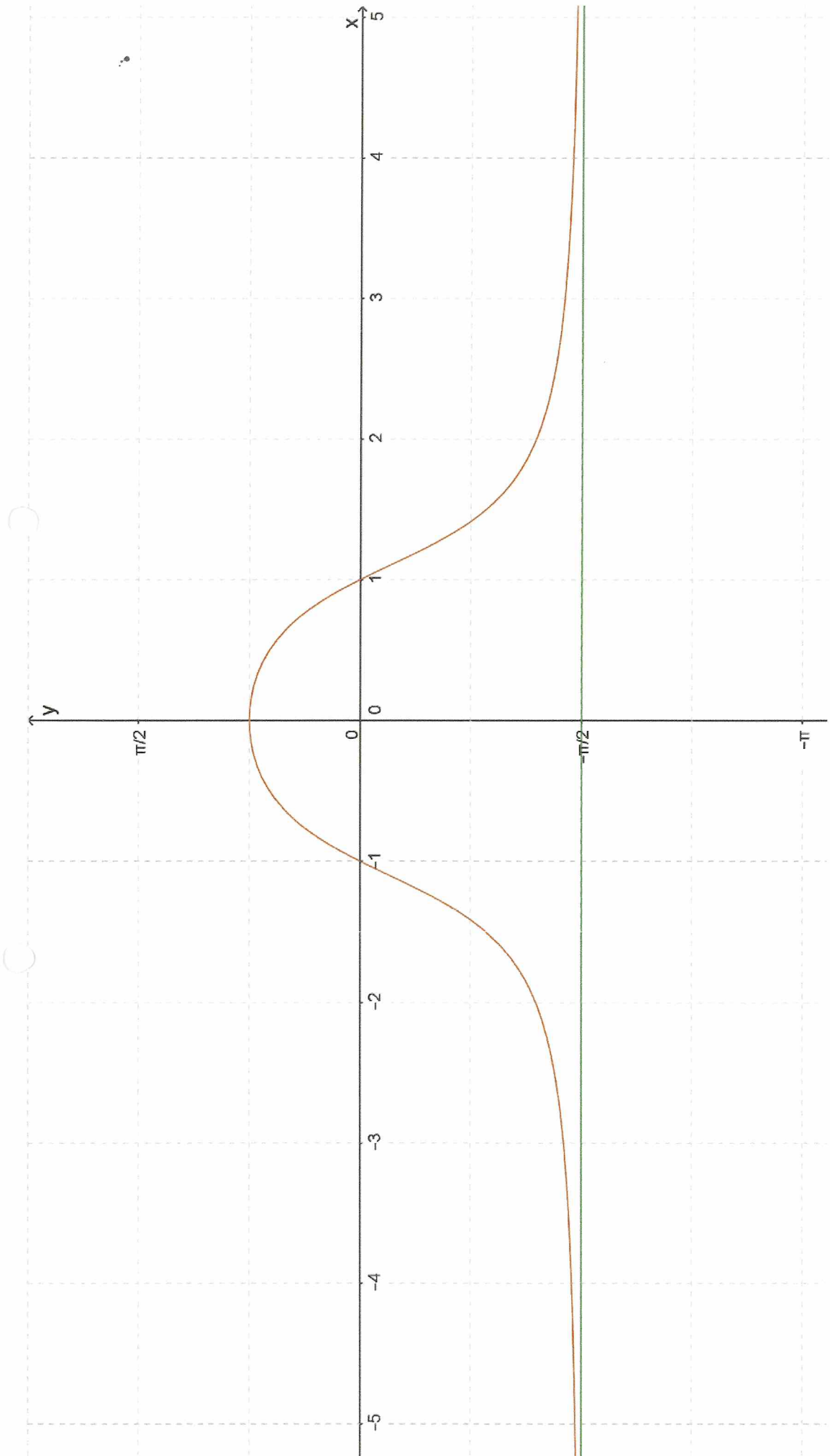
$$= \frac{6x^4 - 4x^2 - 4}{(x^4 - 2x^2 + 2)^2}$$

$$= 2 \frac{3x^4 - 2x^2 - 2}{(x^4 - 2x^2 + 2)^2}$$

$$\Delta_N = 4 + 24 = 28$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{6} \leftarrow \begin{matrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{3} \text{ AK} \end{matrix}$$

x		0	$\frac{1+\sqrt{2}}{3}$	
$N(x)$		-	0	+
$D(x)$		+		+
$f''(x)$		-	0	+
$f(x)$			PI (-)	



$$(d) f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$CE: -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow - (1+x^2) \leq 1-x^2 \leq 1+x^2$$

car $(1+x^2) > 0$

$$\begin{cases} -1-x^2 \leq 1-x^2 \\ 1-x^2 \leq 1+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq 0 \\ -2x^2 \leq 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{tjs vrai} \\ \text{tjs vrai} \end{matrix}$$

dom : $\mathbb{R}$

parité : $f(-x) = f(x)$ (c'est une courbe de carrés)

zéro : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} = 1$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow x=0$$

Asymptotes : AV —

AH : $\lim_{\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ FI

$$= \arccos \lim_{\pm\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos -1 = \pi$$

$$\Rightarrow AH \equiv y = \pi$$

$$f'(x) = - \frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \rightarrow g'}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2} \rightarrow h}$$

$$g'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= -2x \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

D

$$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$h = 1 - \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 + 2x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{4x^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \sqrt{h} = \frac{2|x|}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{-4x}{(x^2 + 1)^2} \cdot \frac{1}{\frac{2|x|}{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{2x}{|x|(x^2 + 1)}$$

x	0		
2x	-	0	+
x	+	0	+
f'(x)	-	2	+
f(x)	↓	-2	↑

PA
(0,0)

⊗ on trajectoire
la V.A.

5. Dérivée de

(a) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$

$$f'(x) = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \arccos x$$

(b) $\arctan \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 1}$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 1} \right)' \rightarrow g'}{1 + \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 1} \right)^2 \rightarrow h}$$

$$g' = \frac{(2x - 2)(x^2 + 2x - 1) - (x^2 - 2x + 1)(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x - 2x^2 - 4x + 2 - (2x^3 - 4x^2 + 2x + 2x^2 - 4x + 2)}{D}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x}{(x^2 + 2x - 1)^2}$$

$$h = 1 + \frac{x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^3 - 4x + 2x^2}{x^4 + 4x^2 + 1 + 4x^3 - 4x - 2x^2}$$

$$= \frac{x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 + x^4 + 6x^2 - 4x^3 - 4x + 1}{(x^2 + 2x - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 + 8x^2 - 8x + 2}{(x^2 + 2x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4x^2 - 4x}{(\cancel{x^2 + 2x - 1})^2}}{\frac{2x^4 + 8x^2 - 8x + 2}{(\cancel{x^2 + 2x - 1})^2}}$$

$$= \frac{\cancel{4}^2 (x^2 - x)}{\cancel{x} (x^4 + 4x^2 - 4x + 1)}$$

$$= \frac{2x(x-1)}{x^4 + 4x^2 - 4x + 1}$$

6. Déterminer le domaine et le(s) zéro(s) de $f(x) = \arccos \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x - 4}$.

$$\text{dom } f: \mathbb{C} \in \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x - 4} \leq 1 & (1) \\ \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x - 4} \geq -1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - (x^2 - 3x - 4)}{x^2 - 3x - 4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 4}{x^2 - 3x - 4} \leq 0 \quad \Delta \rightarrow x = -2$$

$$\Delta \rightarrow x = -1 \text{ et } x = 4$$

x	-2	-1	4
U	-	+	+
D	+	+	-
U	-	+	-

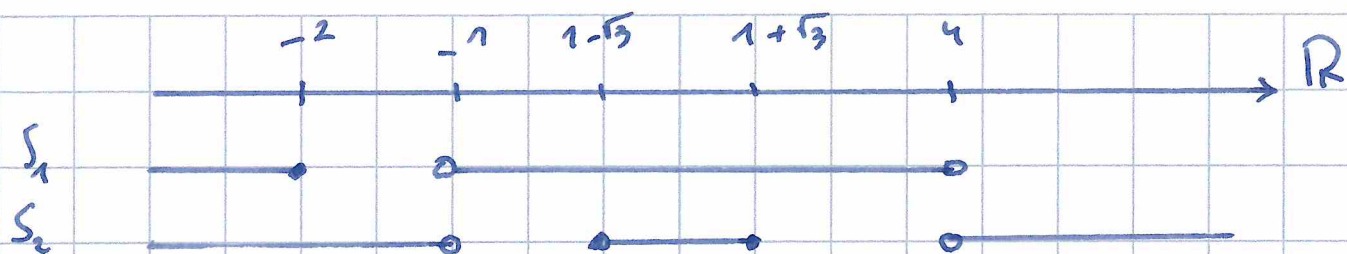
$$S_1: -\infty, -2] \cup]-1, 4[$$

$$(2) \frac{x^2 - x + x^2 - 3x - 4}{x^2 - 3x - 4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x - 4}{x^2 - 3x - 4} \geq 0 \quad \Delta \rightarrow 1 \pm \sqrt{3}$$

x	-1	$1-\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$	4
U	+	+	-	+
D	+	-	-	+
U	+	-	+	-

$$S_2: -\infty, -1[\cup [1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}] \cup]4, +\infty$$



$$\text{dom } f : -\infty, -2] \cup [1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}]$$

zeros occurs $\frac{x^2 - x}{x^2 - 3x - 4} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x - 4} = 1 \quad (\Rightarrow) \quad x = -2 \quad (f(x))$$

7. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - 2x}{\sin x} = \frac{0}{0}$ FI

RH $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2}{\cos x} = \frac{1-2}{1} = -1$

8. Montrer que $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \tan \left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{8} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan \arctan \frac{1}{2} + \tan \arctan \frac{1}{5}}{1 - \tan \arctan \frac{1}{2} \tan \arctan \frac{1}{5}} = \frac{1 - \tan \arctan \frac{1}{8}}{1 + 1 \cdot \tan \arctan \frac{1}{8}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1 - \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{8}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{9}{8}} \quad \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{7}{9} \quad \text{OK}$$

9. Résoudre $\arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}$

SE : ✓

$$\tan[\arctan(x-3) + \arctan x] = \tan\left[\frac{5\pi}{4} - \arctan(x+3)\right]$$

Par le m raisonnement que la question 6 :

$$\frac{x-3+x}{1-(x-3)x} = \frac{1-(x+3)}{1+(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(x+4) = (-x-2)(-x^2+3x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 12 = x^3 - x^2 - 7x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$$

$P(x)=0$

1	-3	-12	10
5	5	10	-10
1	2	-2	0

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$S: \{-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}, 5\}$$

19. Asymptotes de $f(x) = x^2 \arctan \frac{1}{1+x}$

$$\text{don } f: \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{AV}$$

$$\text{AM: } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0, \infty \text{ FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\arctan \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0} \text{ FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{1 + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{+1}{(1+x)^2} \cdot \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + 1} \right] \cdot \left(+ \frac{x^3}{2} \right)$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \text{ FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3}{x^2} = \pm \infty \Rightarrow \text{AV}$$

$$\underline{AO}: m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \cdot \arctan \frac{1}{1+x} = 0 \cdot \infty \quad \underline{FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\arctan \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \quad \underline{FI}$$

$$\underline{RH} \rightarrow \dots \quad (\text{von AM})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x+1}{(1+x)^2+1} \cdot (1+x^2) = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[x^2 \arctan \frac{1}{1+x} - x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[x^2 \left(\arctan \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \right) \right] = 0 \cdot \infty \quad \underline{FI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\arctan \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0} \quad \underline{FI}$$

$$\underline{RH} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{1 + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\left(\frac{-1}{(1+x)^2} \cdot \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+1} + \frac{1}{x^2} \right) \left(-\frac{x^3}{2} \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\left(\frac{-1}{x^2+x+2} + \frac{1}{x^2} \right) \left(-\frac{x^3}{2} \right) \right]$$

$$= \lim_{\pm \infty} \left[\frac{\cancel{x^2} + \cancel{x^2} + 2x + 2}{x^2(x^2 + 2x + 2)} \cdot \left(\frac{-x^3}{2} \right) \right]$$

$$= \lim_{\pm \infty} \frac{-(x+1)x^3}{x^2(x^2 + 2x + 2)} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

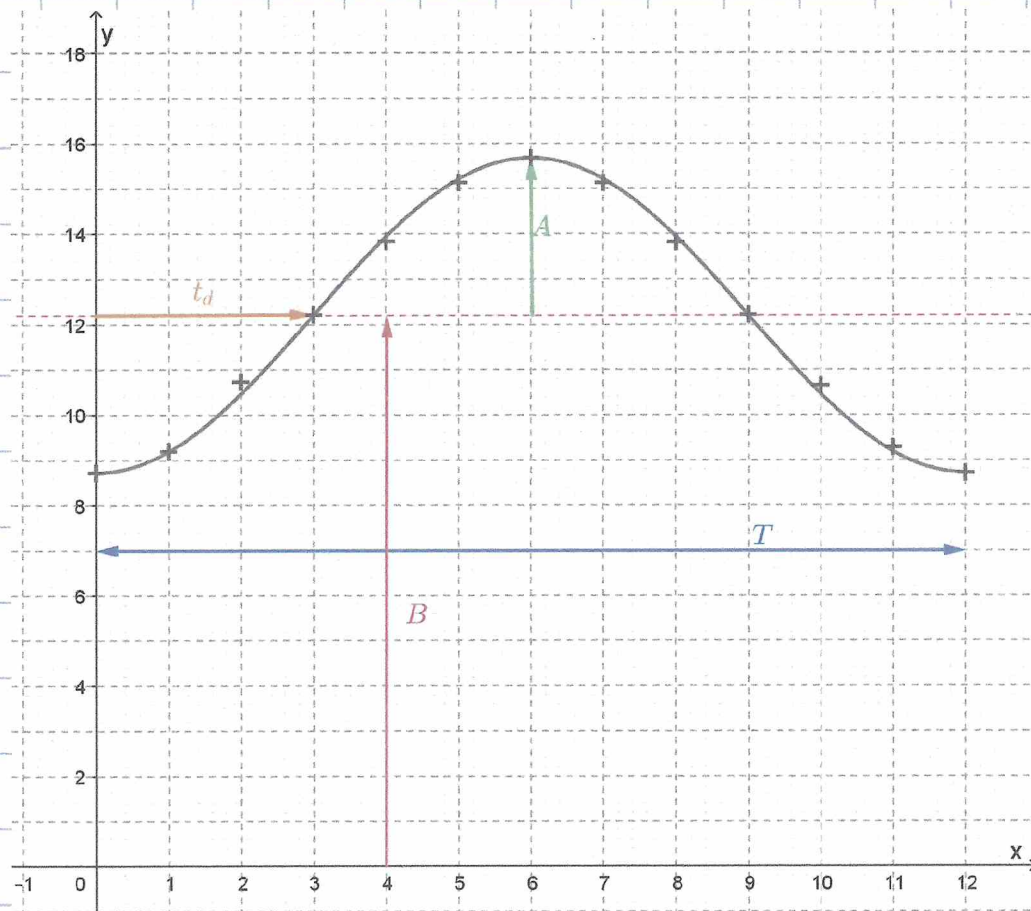
$$= \lim_{\pm \infty} \frac{-x^4}{x^4} = -1$$

$$\Rightarrow A_0 \equiv y = x - 1$$

11. Le tableau suivant le nombre d'heures de soleil durant une journée pour chaque mois à Ottawa.

Mois	Nombre d'heures d'ensoleillement	Heures décimales
Janvier	9h20	$9 + \frac{20}{60} \approx 9,33$
Février	10h44	10,73
Mars	12h13	12,22
Avril	13h50	13,83
Mai	15h08	15,13
Juin	15h41	15,68
Juillet	15h08	15,13
Août	13h49	13,82
Septembre	12h13	12,22
Octobre	10h39	10,65
Novembre	9h17	9,28
Décembre	8h43	8,72

Modéliser ce nombre d'heure d'ensoleillement en fonction du temps (mois) et donner les caractéristiques de la fonction obtenue (amplitude, pulsation,...). Janvier correspond à $t=1$.



$$A = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = 3,48$$

$$B = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = 12,2$$

$$T = 12 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$$

$t_d = 3$ (car 12,2 est obtenue en $\sin$ en phase montante)

$$\rightarrow \varphi = -\omega t_d = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(t) = 3,48 \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right) + 12,2$$

$$f = \frac{1}{12}$$

12. Dans un port, le niveau d'eau est modélisé par la fonction $h(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 5$. h est exprimée en mètre et t en heure. $t = 0$ correspond à minuit.

- Donner les caractéristiques de cette fonction (amplitude, pulsation,...)
- A quelle(s) heure(s) de la journée la hauteur d'eau est-elle égale à 4m ?
- A quelle(s) heure(s) de la journée la hauteur d'eau est-elle minimale ?
- Un bateau ne peut rentrer au port ou en sortir que si la hauteur d'eau y est supérieure à 6m. De combien de temps dans une journée dispose-t-il pour effectuer sa manoeuvre ?

$$a) A = 2, B = 5 \quad \omega = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = 0 \Rightarrow t_d = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12 \Rightarrow f = \frac{1}{12}$$

$$b) h(t) = 4 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{6} t + 5 = 4$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} t = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{6} t = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 + 12k \quad (\rightarrow t = 11 \text{ et } 23) \\ t = 7 + 12k \quad (\rightarrow t = 19) \end{cases}$$

$$c) \min \rightarrow \sin \frac{\pi}{6} t = -1 \rightarrow \frac{\pi}{6} t = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow t = 9 \text{ h}$$

et 21 h

$$d) h(t) \geq 6 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{6} t + 5 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} t \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6} t \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq t \leq 5 + 12k$$

$\Rightarrow$ il dispose de deux fois 4 h.

Chapitre 2

Géométrie

1. On donne $d \equiv \begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{2-y}{3} \\ z=1 \end{cases}$ et les points $A(1, 0, -1)$ et $B(2, 0, 1)$

- (a) Trouver les composantes d'un vecteur directeur de d
- (b) Ecrire l'équation du plan π contenant d et A ;
- (c) Calculer la distance de B à π .

a) Si on écrit les EP de d , on a

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = k \\ \frac{2-y}{3} = k \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2k \\ -y = -2 + 3k \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\vec{v}_d \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } P(3, 2, 1)$$

$$b) \pi \ni d \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Un autre } \vec{v}_2 = \vec{AP} : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Par la méthode de Sarrus :

$$\begin{aligned} & -6(x-1) + 0y + 4(z+1) + 6(z+1) \dots \\ & \dots - 0(x-1) - 4y = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -6x - 4y + 10z + 6 + 4 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x - 4y + 10z + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y - 5z + 8 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

c). Équation de $d' \perp \alpha$ et $\exists B$

$$d' = \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 2k \\ z = 1 - 5k \end{cases}$$

• $d' \cap \alpha$:

$$3(2 + 3k) + 2(2k) - 5(1 - 5k) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 38k - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow k = \frac{7}{38}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3\left(\frac{7}{38}\right) \\ y = 2\left(\frac{7}{38}\right) \\ z = 1 - 5\left(\frac{7}{38}\right) \end{cases}$$

$$I: \left(\frac{97}{38}, \frac{14}{38}, \frac{3}{38} \right)$$

$$d(B, I) = \sqrt{\left(2 - \frac{97}{38}\right)^2 + \left(0 - \frac{14}{38}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{38}\right)^2}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{2\sqrt{38}}{38}$$

2. Déterminer la distance de $P(0, 0, 4)$ à $d \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 2 \end{cases}$

• $\pi \perp d \Leftrightarrow \exists P$:

$$d \equiv \begin{cases} x = 2k - 1 \\ y = k + 2 \\ z = k \end{cases} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \pi = 2x + y + z + d = 0 \\ &P \in \pi \Leftrightarrow 4 + d = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x + y + z - 4 = 0$$

• $d \cap \pi = \{I\}$

$$2(2k - 1) + (k + 2) + k - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6k - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} - 1 \\ y = \frac{2}{3} + 2 \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \rightarrow I: \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\bullet d(P, I) = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{2}{3}\right)^2}$$

= ...

$$= \frac{\sqrt{165}}{3}$$

3. Trouver l'angle entre les droites $d \equiv \begin{cases} x-2=2y \\ 2z+1=2x \end{cases}$ et $d' \equiv \frac{1-2x}{4} = y+1 = \frac{2-z}{-3}$

$$d \equiv \begin{cases} x=k \\ y=-1+\frac{k}{2} \\ z=-\frac{1}{2}+k \end{cases} \rightarrow \vec{v}_d : \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : (2, 1, 2)$$

$$d' \rightarrow \vec{v}_{d'} : (-2, 1, 3)$$

$$\|\vec{v}_d\| = 3$$

$$\|\vec{v}_{d'}\| = \sqrt{14}$$

$$\vec{v}_d \cdot \vec{v}_{d'} = -4 + 1 + 6 = 3$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{3 \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 1,3 \text{ rad } (74,48^\circ)$$

4. Soient les points $A(1,-1,0)$, $B(0,1,-1)$ et $D(\alpha,0,1)$

- (a) Pour quelle valeur de α le plan π passant par ces trois points est perpendiculaire au plan d'équation $y = 0$?
 (b) Soit une sphère S de centre $C(1,2,-1)$ et de rayon 2. Déterminer les caractéristiques de l'intersection de π avec S .
 (c) Déterminer l'aire du triangle ABC .

a) $\vec{AB} : (-1, 2, -1)$ et $\vec{AD} : (\alpha-1, 1, 1)$

$$ABD = \begin{vmatrix} \alpha-1 & y+1 & z \\ -1 & 2 & -1 \\ \alpha-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow ABD = (\alpha-1)3 - (y+1)[-1+\alpha-1] + z[-1-2(\alpha-1)] = 0$$

$$= 3\alpha - (\alpha-2)y + (-2\alpha+1)z + \dots = 0$$

Le vecteur normal de $y=0$ est $(0, 1, 0)$
 $\pi (= ABD) \perp \vec{n}_{y=0} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi} \cdot \vec{n}_{y=0} = 0$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 0 + 1(-\alpha+2) + 0(-2\alpha+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$\rightarrow \pi = 3(x-1) + z(-3) = 0$$

$$= x - z - 1 = 0$$

b) Schema : voir page annexe.

• éq de CC' : $CC' \perp \vec{n}_{\pi}$ et $\exists C$

$$\Rightarrow CC' \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 \\ z = -1 - k \end{cases}$$

• $\{C'\} = CC' \cap \pi$

$$\Leftrightarrow (1+k) - (-1-k) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1+2k=0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C' : \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

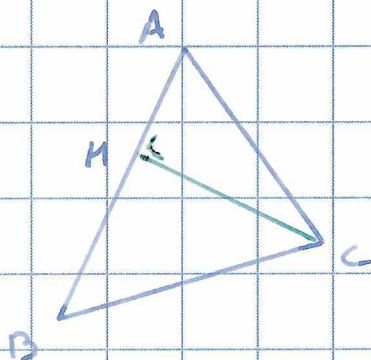
$$\bullet \quad r = \sqrt{k^2 - |CC'|^2}$$

$$\text{et } |CC'| = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + (2-2)^2 + \left(-\frac{1}{2}+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow |CC'|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{4 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

c)



$$A_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CH|}{2}$$

$$|AB| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$? H: \quad r \perp AB \text{ et } \exists C$$

$$(\vec{v}_n = \overrightarrow{AB})$$

$$\bullet \quad r \equiv -x + 2y - z + d = 0$$

$$C \in r \Leftrightarrow -1 + 4 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

$$\Rightarrow r \equiv -x + 2y - z - 4 = 0$$

$$\bullet \quad AB \equiv \begin{cases} x = 1-k \\ y = -1+2k \\ z = -k \end{cases}$$

$$\bullet \quad \{H\} = r \cap AB$$

$$\Leftrightarrow -(1-k) + 2(-1+2k) - (-k) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6k - 7 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow H: \left(-\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, -\frac{7}{6}\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |CH| &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{7}{6}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{49 + 16 + 1}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{66}}{6}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{66}}{12} = \frac{6\sqrt{11}}{12} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

