Athénée Royal d'Uccle 1

Cours de Mathématique

$6^{\text{ème}}$ année

Révision de juin

Exercices à faire
Juin 2022

1. Analyse

    ✓ 1
    ✓ 2
    ✓ 3
    ✓ 4
    ✓ 5
    ✓ 6
    ✓ 7
    ✓ 8
    ✓ 9
    ✓ 10
    ✓ 11
    ✗ 12
    ✗ 13
    ✗ 14

2. Trigonométrie

    ✓ 1
    ✓ 2

3. Géométrie

    ✓ 1
    ✓ 2
    ✓ 3
    ✓ 4
    ✓ 5
    ✓ 6

Chapitre 1

Algèbre

1.1 Exercices

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\begin{cases} (1+i)x + 2y = 1 - i \\ x - iy = i \end{cases}$
2. Démontrer que $z = 1 + 2i$ est solution de l'équation :

$$z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 18z + 45 = 0$$

   Trouver les autres racines de cette équation [1].
3. Déterminer les racines du polynôme $P(z) = (1 - z^2)^3 - (1 - z)^3$
4. Résoudre $\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) + 1 = 0$
5. Déterminer les valeurs de a et b pour que $z = 1 + i$ soit racine de l'équation

$$z^5 + az^3 + b = 0$$

6. Déterminer a et b tels que $\dfrac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{13}}{\left(\sqrt{3} - i\right)^8} = a + ib$.
7. Résoudre $i(1 + z)^4 = 1$.
8. Résoudre $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 1$

1. Un polynôme à coefficients réels et à variable complexe admet toujours des racines complexes conjuguées

1.2 Solutions

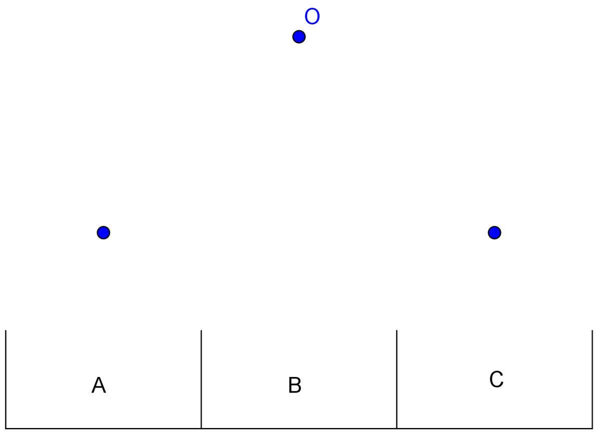
1. $S : \{(i+2, -2i)\}$
2. $P(z) = (z-1+2i)(z-1-2i)(z+3i)(z-3i)$
3. $S : \left\{0, 1, \dfrac{-3-\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{3}i}{2}\right\}$
4. $S : \{-2, 0, 2\}$
5. $a = 2$ et $b = 8$
6. $a = 16$ et $= -16\sqrt{3}$
7. $S : \left\{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - 1, \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - 1, \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - 1, \ldots\right.$
   $\left. \ldots\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - 1\right\}$
8. $z = \dfrac{\operatorname{cis}\left(\pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}\right) + 1}{\operatorname{cis}\left(\pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}\right) - 1} \ (k \in \mathbb{Z})$

Chapitre 2

Probabilités

2.1 Exercices

1. Dans une urne se trouvent 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement deux boules sans remise. Calculer les probabilités des deux événements suivants :
   – Tirer deux boules de même couleur ;
   – Tirer deux boules de couleurs différentes.
2. Une bille, lâchée en O tombe tout d'abord sur un plot, puis un second et enfin dans l'une des trois boîtes A, B, C comme le montre la figure suivante.

   A chaque bifurcation, la bille tombe à gauche avec la probabilité de 0.25 et à droite avec la probabilité de 0.75.
   (a) Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ pour qu'une bille lâchée de O tombe respectivement dans la boîte A, B ou C.
   (b) On lâche deux billes en O. Calculer la probabilité pour que
      i. les deux billes tombent dans la boîte A ;
      ii. les deux billes tombent dans la même boîte.
   (c) On lâche trois billes en O. Calculer la probabilité d'avoir une bille dans chaque boîte.
   (d) On lâche dix billes en O. Calculer la probabilité d'avoir au moins trois billes dans la boîte B.

3. Pierre joue au tennis contre ses parents. La probabilité de gagner un match contre son père est de $1/3$, contre sa mère de $2/3$.
   Pierre joue alternativement contre ses parents en commençant par son père. Il est déclaré vainqueur dès qu'il a gagné deux matches consécutifs.
   Quelle est la probabilité qu'il soit déclaré vainqueur en jouant au plus quatre matches ?
4. A la sortie d'une usine, le service de contrôle de qualité a choisi 15 articles au hasard : 2 ont le client A pour destinataire, 8 ont le client B pour destinataire et 5 ont client C pour destinataire. Les tests ont révélé que 4 articles sont défectueux. On admet que les 15 articles ont la même probabilité d'être défectueux.
   (a) Quelle est la probabilité qu'aucun article destiné à B ne soit défectueux ?
   (b) Quelle est la probabilité que tous les articles destinés à A soient défectueux ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'il y ait le même nombre d'articles non défectueux pour B et C ?
5. On a estimé la valeur du témoignage des victimes d'agressions à partir des hypothèses suivantes :
   - 90% des agresseurs ont les yeux bleus, 10% ont les yeux bruns ;
   - la victime donne correctement la couleur des yeux de l'agresseur 8 fois sur 10, et la couleur inverse 2 fois sur 10.

   Calculer la probabilité :
   (a) qu'un agresseur soit qualifié d'avoir les yeux bruns par sa victime ;
   (b) que l'agresseur ait les yeux bruns sachant que la victime affirme que l'agresseur a les yeux bruns.
6. Le vieil homme du village prétend être capable de prédire le temps du lendemain avec un taux de réussite supérieur à $3/4$. Il utilise la méthode suivante, sans dire comment il raisonne : « demain, il fera le même temps qu'aujourd'hui ». Dans la contrée où il habite règne le climat suivant :
   - s'il fait beau un jour, il y a 4 chances sur 5 qu'il fasse encore beau le lendemain ;
   - s'il fait mauvais temps un jour, il n'y a que 1 chance sur 3 qu'il fasse beau le lendemain ;
   - il fait beau les 70% du temps.

   La prétention du vieil homme est-elle justifiée ?
7. Dans une école de musique où le nombre d'étudiants est élevé, 70% des élèves étudient le piano ou le violon et 10% étudient les deux instruments. Le nombre d'élèves violonistes est égal à 60% du nombre d'élèves pianistes.
   (a) On tire au hasard un élève de l'école.
      i. Calculer la probabilité des événements suivants :
         A. l'élève étudie le piano et le violon,
         B. l'élève étudie le piano mais pas le violon,
         C. l'élève étudie le violon mais pas le piano,
         D. l'élève n'étudie ni le piano ni le violon.
      ii. Sachant qu'il étudie le piano, quelle est la probabilité qu'il étudie le violon ?
   (b) On tire au hasard deux élèves de l'école. Quelle est la probabilité qu'ils puissent former un duo piano-violon ?

8. Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus.

   PARTIE A

   On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :
   - La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
   - La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

   On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement «*la personne est contaminée par le virus*» et T l'événement «*le test est positif*». $\bar{V}$ et $\bar{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

   (a) i. Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P(T|V)$, $P(\bar{T}|\bar{V})$. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

      ii. En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

   (b) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

   (c) i. Justifier par un calcul la phrase : "*Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de "chances" que la personne soit contaminée*" ;

      ii. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

   PARTIE B

   On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

9. Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40% des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70% d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25% des candidats rencontrés.

   (a) On choisit au hasard le dossier d'un candidat. On considère les événements suivants :
      - D : "*Le candidat est retenu sur dossier*",
      - E_l : "*Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien*",
      - E_2 : "*Le candidat est recruté*".

      i. Créer l'arbre de probabilités représentant la situation ;

      ii. Calculer la probabilité de l'événement E_1 ;

      iii. On note F l'événement "*Le candidat n'est pas recruté*". Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à $0,93$.

(b) Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

i. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

ii. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}

(c) Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

2.2 Solutions

1. – Tirer deux boules de même couleur = 0,4 ;
   – Tirer deux boules de couleurs différentes = 0,6.
2. (a) $P(A) = 0,0625$, $P(B) = 0,375$, $P(C) = 0,5625$.
   (b) i. les deux billes tombent dans la boîte $A \approx$ 0,0039 ;
       ii. les deux billes tombent dans la même boîte $\approx$ 0,4609.
   (c) P$\approx$ 0,0791
   (d) P$\approx$ 0,79.
3. P=$\frac{4}{9}$
4. (a) P=$\frac{1}{39}$
   (b) P=$\frac{2}{35}$
   (c) P=$\frac{16}{195}$
5. (a) P=$\frac{26}{100}$
   (b) P=$\frac{8}{26}$
6. P(2 jours consécutifs de même temps)=0,76
7. (a) i. A. P=$\frac{1}{10}$
          B. P=$\frac{4}{10}$
          C. P=$\frac{2}{10}$
          D. P=$\frac{3}{10}$
       ii. P=$\frac{2}{10}$
   (b) P=$\frac{29}{100}$
8. **PARTIE A**
   (a) i. $P(V) = 0,02$, $P(T|V) = 0,99$ et $P(\bar{T}|\bar{V}) = 0,97$.
       ii. $P(V \cap T) = 0,0198$.
   (b) $P(T) = 0,0492$.
   (c) i. $P(V|T) = 0,402$;
       ii. $P(\bar{V}|\bar{T}) = 0,9998$.

   PARTIE B
   (a) $n = 10$ et $p = 0,02$
   (b) $P(\text{au moins } 2) = 1 - P(0 \cup 1) = 0,0162$.

9. (a) i.
   ii. $P(E_1) = 0,28$;
   iii. $P(F) = 0,93$
   (b) i. $n = 5$ et $p = 0,07$.
   ii. $P(X = 2) = 0,039$
   (c) $n > 96$

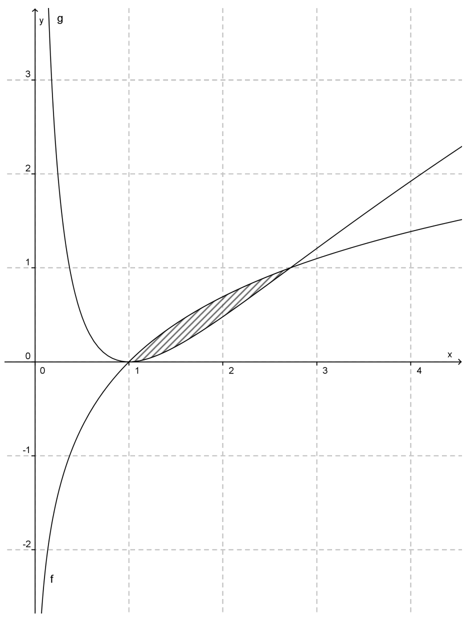
Chapitre 3

Analyse

3.1 Exercices

1. Etude complète de la fonction $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{\ln x}$ (pas la dérivée seconde).
2. Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0; +\infty$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2$$



On cherche à déterminer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée. On note

$$I = \int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_1^e (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$$

(a) Justifier les bornes des intégrales définies.

(b) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty$ par

$$F(x) = x \ln x - x$$

est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

(c) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$J = e - 2I$$

(d) En déduire J.

(e) Donner la valeur de $\mathcal{A}$

3. On appelle f la fonction définie sur $]0;+\infty$

$$f(x) = \frac{1}{4}xe^{-\dfrac{x}{2}}$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

(a) Montrer que f est positive sur $]0;+\infty$.

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathcal{C}$.

(c) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $]0;+\infty$.

(d) On considère la fonction F définie sur $]0;+\infty$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

i. Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty$.

ii. Calculer $F(x)$.

iii. Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $]0;+\infty$.

iv. Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} par excès.

4. Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$: on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

Partie A : Etude d'une fonction f et de sa courbe représentative $\mathcal{C}$

On considère la fonction f, définie sur $]0,+\infty$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative relativement au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

(a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.

(b) Calculer $f'(x)$.

(c) Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty$ par

$$u(x) = \ln x + x - 3$$

i. Etudier les variations de u.

ii. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2,3]$. Montrer que $2,20 < \alpha < 2,21$.

iii. Etudier le signe de $u(x)$ sur $]0,+\infty$.

(d) i. Etudier les variations de f.

ii. Exprimer $\ln\alpha$ comme polynôme en α. Montrer que

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.

(e) i. Etudier le signe de $f(x)$.

ii. Tracer $\mathcal{C}$.

Partie B : Etude d'une primitive de f sur $]0,+\infty$

Soit F la primitive de f sur $]0,+\infty$ qui s'annule pour $x=1$. On appelle Γ la courbe représentative de F relativement au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

(a) i. Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0,+\infty$.

ii. Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?

(b) *Calcul de $F(x)$.*

i. x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale

$$\int \ln x\, dx$$

ii. Montrer que, pour tout x strictement positif :

$$f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$$

iii. En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

(c) i. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$. En déduire la limite de F en 0.

ii. Montrer que, pour x strictement supérieur à 1,

$$F(x)=x\ln x\left(1-\frac{1}{2}.\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-\frac{3}{\ln x}\right)$$

En déduire la limite de F en $+\infty$

iii. Dresser le tableau de variation de F.

iv. Tracer Γ sur le même graphique que $\mathcal{C}$.

(d) *Calcul d'une aire.*

Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$.

5. **Partie A : étude d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty$ par :

$$f(x)=1+\frac{\ln x}{x}.$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; unité graphique : 5cm.

(a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de $(\mathcal{C})$.

(b) Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

(c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}};1\right]$ une solution unique, notée α. Déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.

Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty$.

Partie B : Calcul d'aire

(a) Déterminer une équation de la tangente (D) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

(b) i. Soit φ la fonction définie, pour tout $x > 0$, par :

$$\varphi(x) = x - x^2 + \ln x.$$

Calculer $\varphi'(x)$..
En déduire le sens de variation de φ, puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle $]0; +\infty$.

ii. Montrer que, pour tout $x > 0, f(x) - x = \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

iii. En déduire la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (D).

(c) On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et la tangente (D).

(d) Soit $\mathcal{A}$ son aire, en cm^2. Ecrire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ comme expression polynomiale du second degré en α.

3.2 Solutions

1. Les principaux résultats sont :
   - $dom_f : \mathbb{R}_0^+$;
   - pas de zéro ;
   - $AV \equiv x = 0$ et $AV \equiv x = 1$;
   - pas d'$A.H.$ no d'$A.O.$;
   - $f'(x) = \dfrac{\ln^2 x - 1}{x \ln^2 x}$ et le tableau de variations est :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		e	
$\ln^2 x - 1$		$+$	0	-		-	0	$+$
$x \ln^2 x$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	-	AV	-	0	$+$
		$\nearrow$	M	$\searrow$		$\searrow$	m	$\nearrow$
			$\left(\frac{1}{e}, -2\right)$				$(e, 2)$	

2. (a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$;

   (b) $F'(x) = \ln x$ et $I = 1$

   (c) $J = \left[x \ln^2 x\right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x \, \mathrm{d}x = e - 2I$

   (d) $J = e - 2$

   (e) $A = I - J = 3 - e$

3. (a) évident d'après la définition des fonctions ;

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Il y une $A.H. \equiv y = 0$

   (c) $f'(x) = \frac{1}{8} e^{-\frac{x}{2}} (2 - x)$ dont le tableau de signe est :

x	0		2	
$f'(x)$		$+$	0	-
		$\nearrow$	M	$\searrow$
			$\left(2, \frac{1}{2e}\right)$	

   (d) i. $F'(x) = f(x)$ et $f(x)$ est positive (voir plus haut). Dès lors $F(x)$ est croissante.

   ii. $F(x) = -\frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} + 1$ (intégration par partie).

   iii. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $F(0) = 0$. $F(x)$ est donc monotone croissante et positive sur $]0, +\infty$

   iv. Par le théorème des valeurs intermédiaires et la question précédente, le graphe de $F(x)$ ne peut croiser qu'un fois la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. Graphiquement, on trouve $\alpha \approx 3,36$

4. **Partie A**

   (a) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

   (b) $f'(x) = \dfrac{\ln x + x - 3}{x^2}$

   (c) i. $u'(x) = \dfrac{x+1}{x}$ qui toujours positive sur $\mathbb{R}_0^+$ et donc $u(x)$ est toujours croissante sur cet intervalle.

   ii. $\lim_{x\to 0} u(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} u(x) = +\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre que $u(x)$ s'annule une fois. $u(2,20) \approx -0,012$ et $u(2,21) \approx 0,003$

   iii. Le tableau de signe de $u(x)$ est :

x	0		α	
$u(x)$		-	0	$+$

   (d) i. $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ dont le signe est identique à celui de $u(x)$:

x	0		α	
$f'(x)$		-	0	$+$
		$\searrow$	m	$\nearrow$
			$(\alpha, f(\alpha))$	

   ii. $u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 3 - \alpha$. En remplaçant dans la définition de la fonction, on trouve $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ et $-0,66 < f(\alpha) < -0,65$.

   (e) i.

x	0		1		e^2	
$f(x)$		$+$	0	-	0	$+$

   ii.

Partie B

   (a) i. Les variations de $F(x)$ sont données par le signe de $f(x)$.

   ii. Elles sont horizontales (car $f(x) = 0$ et $f(x) = F'(x)$).

   (b) i. $\displaystyle\int \ln x\, dx = x\ln x - x$

   ii. Le résultat est obtenu par double distributivité.

   iii. Par intégration immédiate, de fonctions composées, en utilisant le résultat précédent et le fait que $F(1) = 0$, on a :

$$F(x) = (2+x)\ln x - 3 - \frac{\ln^2 x}{2} + 3$$

   (c) i. La règle de l'Hospital permet de montrer le résultat.

   ii. Il suffit de redévelopper l'expression donnée pour obtenir le résultat précédent. $\lim_{x\to +\infty} F(x) = +\infty$

iii.

x	0		1		e^2	
$F'(x)$		$+$	0	-	0	$+$
		$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$
			(1,0)		$(e^2, 5-e^2)$	

iv.

(d) $\mathcal{A} = -\int\limits_{1}^{e^2} f(x)\,\mathrm{d}x = F(e^2) - F(1) = e^2 - 5$

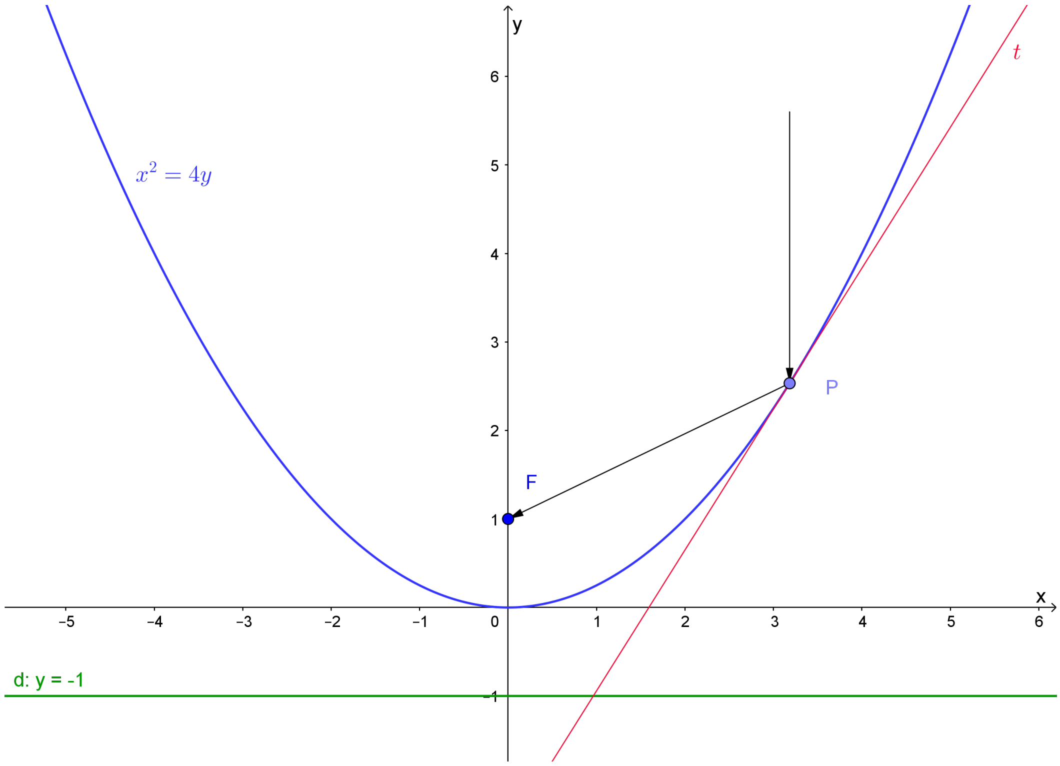
Chapitre 4

Géométrie

4.1 Exercices

4.1.1 Coniques

1. Un point se déplace de tel manière que sa distance au point (2,1) vaut le double de sa distance à la droite $d \equiv y - 4 = 0$. Déterminer l'équation et les caractéristiques du lieu.
2. Un point se déplace de tel manière que sa distance au point (2,1) vaut la moitié de sa distance à la droite $d \equiv y - 4 = 0$. Déterminer l'équation et les caractéristiques du lieu.
3. Un point se déplace de tel manière que sa distance au point (2,1) est égale à sa distance à la droite $d \equiv y - 4 = 0$. Déterminer l'équation et les caractéristiques du lieu.
4. On donne la conique d'équation $-2x^2 + y^2 + 4x + 4y + 10 = 0$. Déterminer la nature et les caractéristiques de cette conique. Ecrire l'équation de(s) (la) tangente(s) à la conique :
   (a) en ses points d'abscisse 7 ;
   (b) parallèle(s) à la droite d'équation $3x - 2y = 1$
   (c) perpendiculaire(s) à la droite d'équation $3x - 2y = 1$
   (d) issues du point (1,-1)
5. Le "***latus rectum***" est un segment de droite qui passe par le foyer de la parabole et qui est perpendiculaire à son axe de symétrie. Démontrer que la longueur du latus rectum de la parabole est $2p$. Le latus rectum détermine l'ouverture de la parabole au foyer.
6. Soit la parabole d'équation $x^2 = 4y$. On veut démontrer que tout rayon parallèle à l'axe de la parabole, situé du côté de la parabole opposé à la directrice (l'intérieur de la parabole), est redirigé vers le foyer après avoir touché la parabole.
   La figure suivante illustre cette propriété.



On appelle P un point quelconque de la parabole, A l'intersection de la verticale (rayon) avec la directrice.
Soit t la tangente à la parabole au point P. On appelle B l'intersection de t et de la directrice et C l'intersection de t avec l'axe Ox.

(a) Démontrer que FC est perpendiculaire à t.

(b) Démontrer que BF est perpendiculaire à FP.

(c) Démontrer que A appartient à FC

(d) Démontrer la propriété proposée.

4.1.2 Lieux géométriques

1. Soit $\mathcal{P}$ une parabole de paramètre $p = 1$ et $A \in \mathcal{P}$. Soit B le point où la normale à $\mathcal{P}$ en A recoupe $\mathcal{P}$. Déterminer la longueur minimale de AB.
2. Soient A, A' deux points distincts et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[A, A']$. Pour $P \in \mathcal{C}$, on construit : P' le symétrique de P par rapport à (AA'), et M le point d'intersection de (AP) et (A', P').Quel est le lieu de M ?
3. On considère une droite AB et un point F n'appartenant pas à AB. Soit P un point de AB, soit d la médiatrice de $[FP]$ et M le point d'intersection de d et de la droite perpendiculaire à AB en P.
   Déterminer le lieu du point M lorsque P décrit la droite AB.
   Que peut-on penser de la droite d et du lieu de points ? Démontrer.
4. Dans un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes Ox et Oy, on donne les points fixes $A(5, 0)$ et $B(-5 , 0)$. Un point M parcourt le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre AB.
   Par M, on abaisse sur AB la perpendiculaire MP (P est situé sur AB).
   Déterminer le lieu géométrique du centre du cercle inscrit au triangle OMP.
5. Dans un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes Ox et OyY, on considère deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

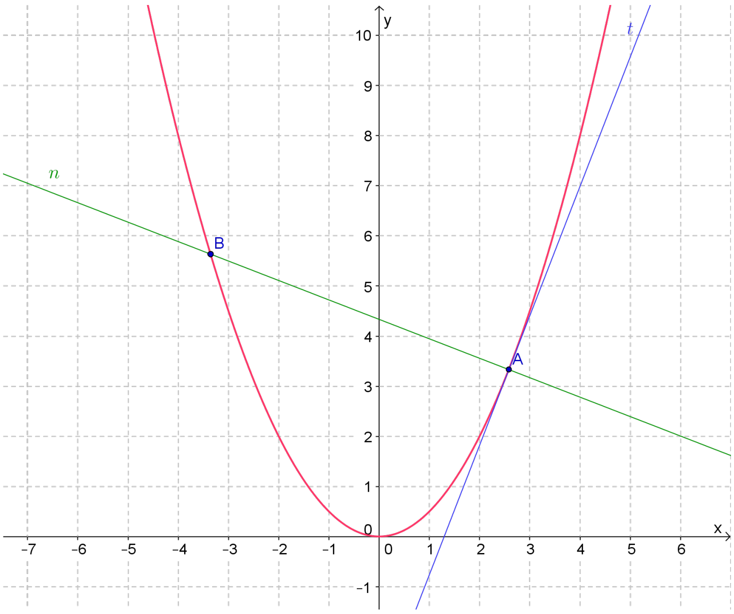
$\mathcal{C}_1$ passe par l'origine et est centré au point de coordonnées (3,0). $\mathcal{C}_2$ est centré à l'origine et contient le point de coordonnées (0,4).
Déterminer une équation cartésienne du lieu géométrique des points situés à égale distance des deux cercles. Quelle est la nature de ce lieu ?

4.2 Solutions

4.2.1 Coniques

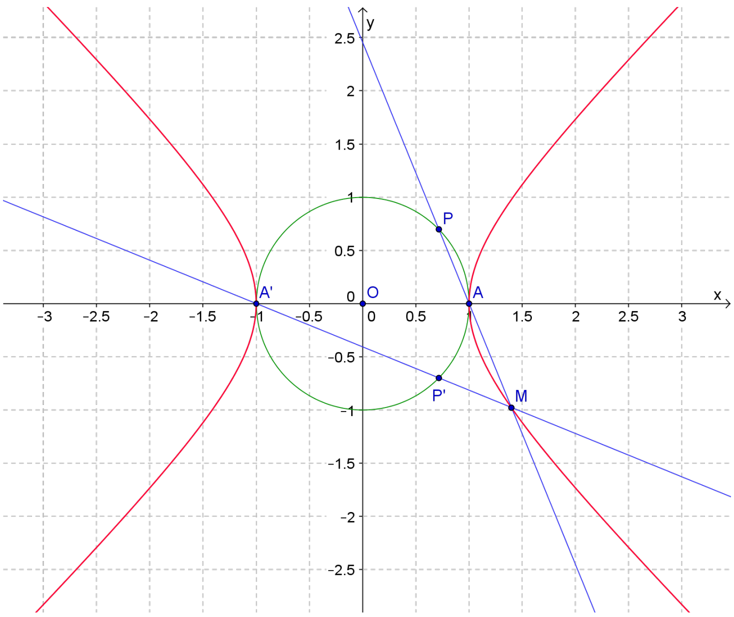
4.2.2 Lieux géométriques

1.



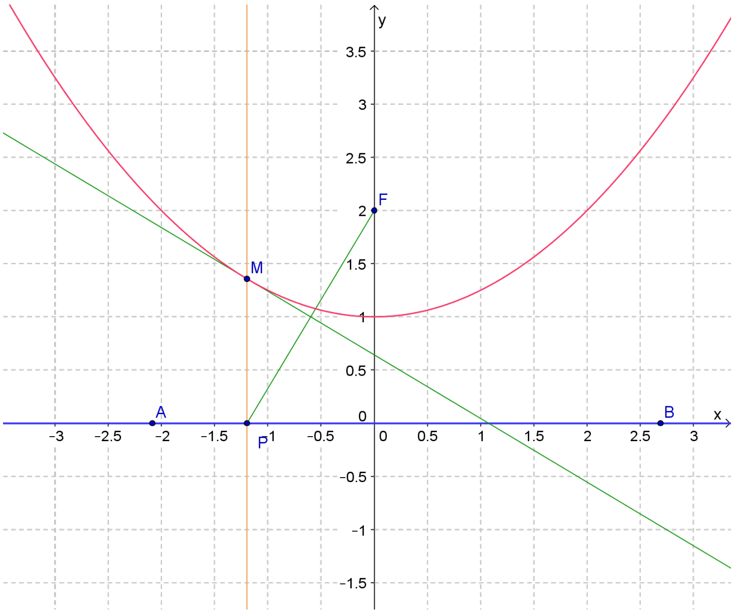
$d_{min} = 3\sqrt{6}$

2.



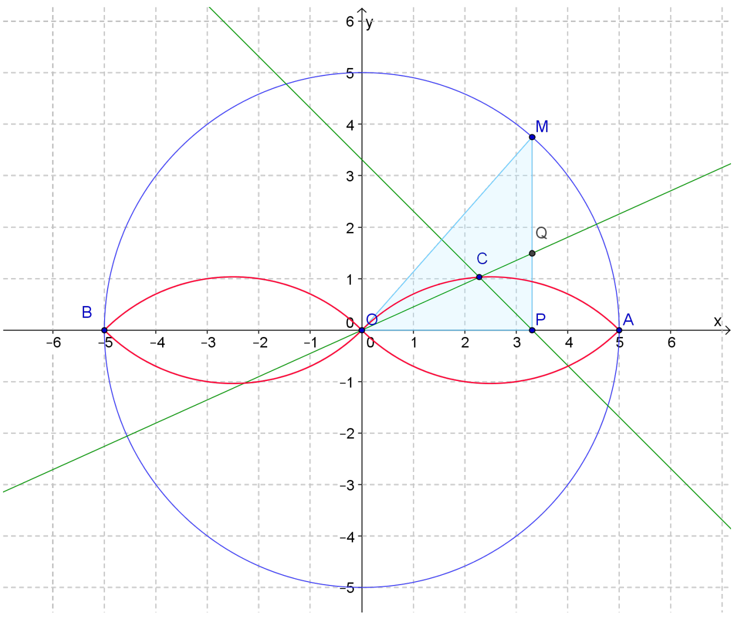
C'est l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = 1$

3.



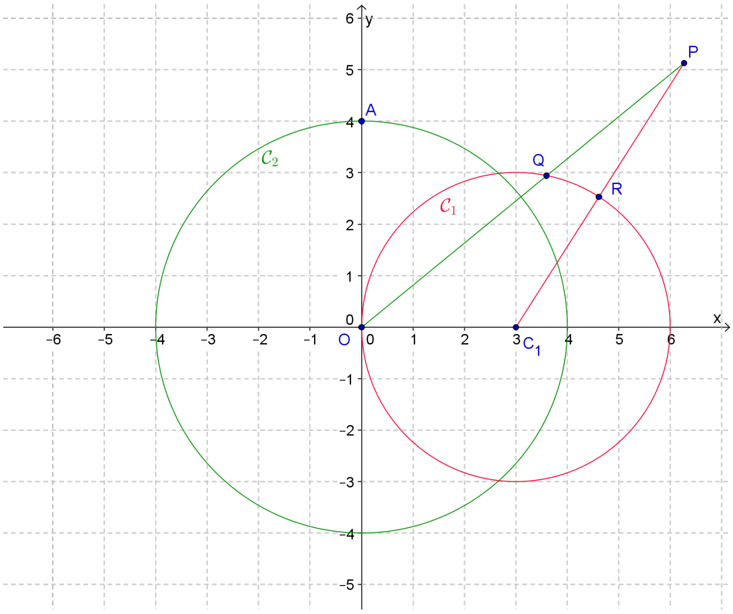
Le lieu a pour équation $x^2 = 2\left(y - \dfrac{1}{2}\right)$

4.



Le lieu a pour équation : $\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{50}{4}$ et ses symétriques par rapport à Ox et Oy.

5.



Le lieu a pour équation : $\dfrac{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{4}} - \dfrac{y^2}{2} = 1$