Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°3 - Solutions

Inéquations trigonométriques

Série A

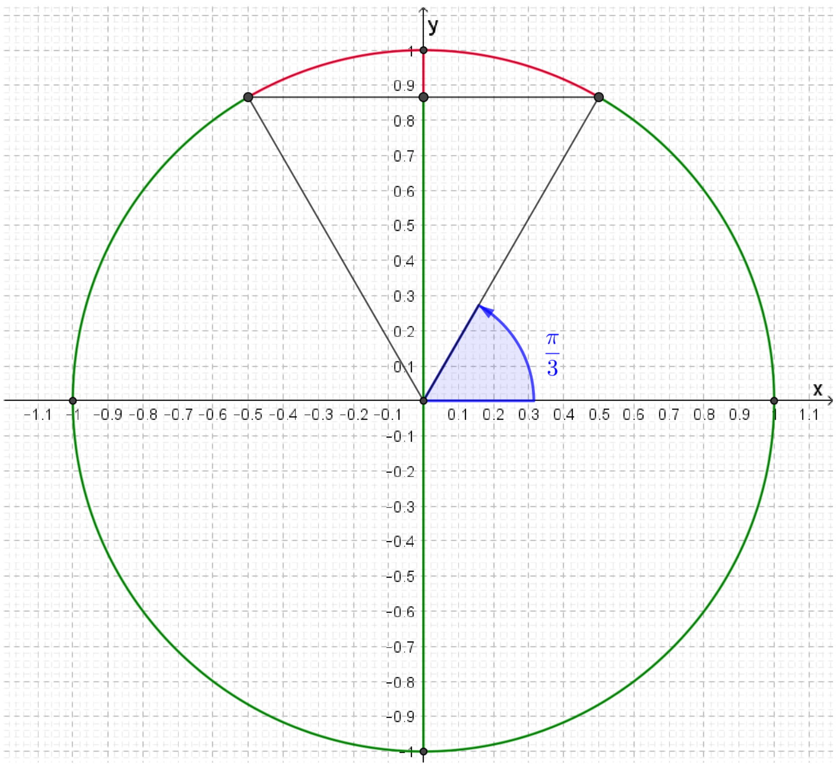
Le 14 octobre 2024 — Classe: 6BCD

Résoudre sur l'intervalle $[0, 2\pi[$:

.../6 1. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$

D'après le cercle trigonométrique, les solutions de cette inéquations sont :

$$\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right[$$



On a successivement pour la première partie de la solution :

$$\begin{aligned}
&0 \leq 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq 2x < \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow -\frac{\pi}{8} \leq x < \frac{\pi}{24} + k\pi
\end{aligned}$$

et pour la deuxième partie :

$$\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{4} < 2\pi + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \frac{5\pi}{12} \leq 2x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \frac{5\pi}{24} \leq x < \frac{7\pi}{8} + k\pi
\end{aligned}$$

Si l'on exprime ces solutions sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, on a :

$$S : \left[0, \frac{\pi}{24}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{24}, \frac{7\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{8}, \frac{25\pi}{24}\right[\cup \left]\frac{29\pi}{24}, 2\pi\right[$$

.../7 2. $\cos 2x > \sin x$
On a successivement :

$$\begin{aligned}
&\cos 2x > \sin x \\
&\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x > \sin x \\
&\Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 > 0
\end{aligned}$$

Les zéros du premier membre sont (Δ) $\sin x = -1$ et $\sin x = \frac{1}{2}$ et le tableau de signe est :

$\sin x$		-1		$\frac{1}{2}$	
$-2\sin^2 x - \sin x + 1$	-	0	+	0	-

La solution sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ est donc $\sin x \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[$ ou, avec le cercle trigonométrique :

$$S : \left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right[$$

.../7 3. $\sin x + \sin 3x \geq 0$
Avec les formules de Simpson, on obtient :

$$2\sin 2x \cos x \geq 0$$

Les zéros de $\sin 2x$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont $x = \frac{k\pi}{2}$ et ceux de $\cos x$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Le tableau de signe est donc :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin 2x$	0	+	0	-	0	+	0	-	0
$\cos x$		+	0	-		-	0	+	
In	0	+	0	+	0	-	0	-	0

et la solution est :

$$S : [0, \pi]$$

Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°3 - Solutions

Inéquations trigonométriques

Série B

Le 14 octobre 2024 Classe: 6BCD

Résoudre sur l'intervalle $[0, 2\pi[$:

.../7 1. $\sin x < \cos 2x$

On a successivement :

$$\begin{aligned}
&\sin x < \cos 2x \\
\Leftrightarrow\ &\sin x < 1 - 2\sin^2 x \\
\Leftrightarrow\ &0 < -2\sin^2 x - \sin x + 1
\end{aligned}$$

Les zéros du second membre sont (Δ) $\sin x = -1$ et $\sin x = \dfrac{1}{2}$ et le tableau de signe est :

$\sin x$		-1		$\frac{1}{2}$	
$-2\sin^2 x - \sin x + 1$	-	0	+	0	-

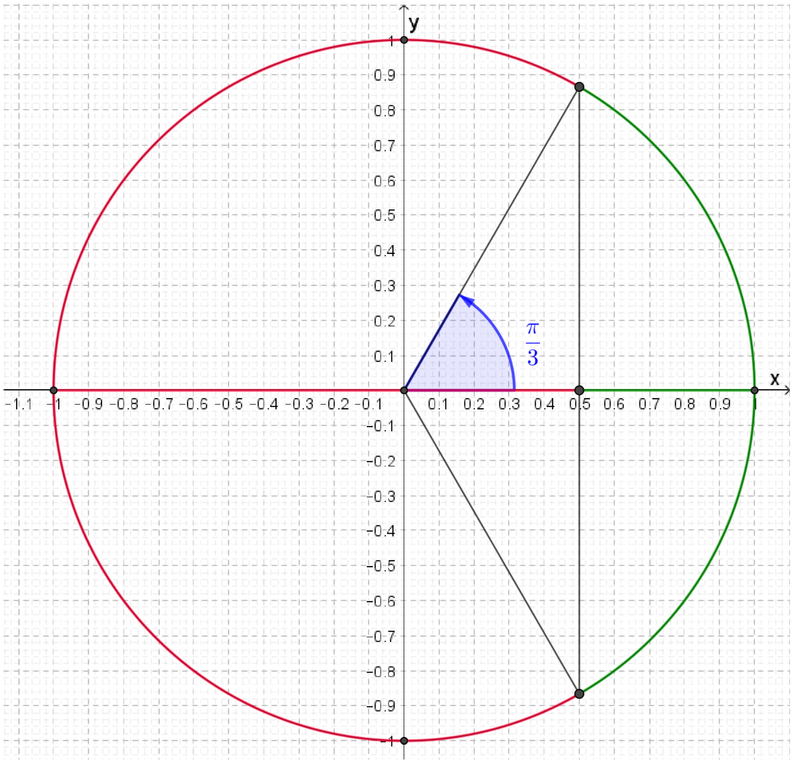
La solution sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ est donc $\sin x \in \left]-1, \dfrac{1}{2}\right[$ ou, avec le cercle trigonométrique :

$$S : \left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right[$$

.../6 2. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right) > \dfrac{1}{2}$

D'après le cercle trigonométrique, les solutions de cette inéquations sont :

$$\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right[$$



On a successivement pour la première partie de la solution :

$$\begin{aligned}
&0 \leq \frac{\pi}{4} + 2x < \frac{\pi}{3} \quad + 2k\pi \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{\pi}{4} \leq 2x < \frac{\pi}{12} \quad + 2k\pi \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{\pi}{8} \leq x < \frac{\pi}{24} \quad + k\pi
\end{aligned}$$

et pour la deuxième partie :

$$\begin{aligned}
&\frac{5\pi}{3} < \frac{\pi}{4} + 2x < 2\pi \quad + 2k\pi \\
\Leftrightarrow\ & \frac{17\pi}{12} \leq 2x < \frac{7\pi}{4} \quad + 2k\pi \\
\Leftrightarrow\ & \frac{17\pi}{24} \leq x < \frac{7\pi}{8} \quad + k\pi
\end{aligned}$$

Si l'on exprime ces solutions sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, on a :

$$S : \left[0, \frac{\pi}{24}\right[\cup \left]\frac{17\pi}{24}, \frac{7\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{8}, \frac{25\pi}{24}\right[\cup \left]\frac{41\pi}{24}, 2\pi\right[$$

.../7 3. $\sin x - \sin 3x \leq 0$

Avec les formules de Simpson, on obtient :

$$2\cos 2x \sin(-x) \leq 0$$

ou

$$2\cos 2x \sin x \geq 0$$

Les zéros de $\cos 2x$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ et ceux de $\sin x$, $x = k\pi$. Le tableau de signe est donc :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$\cos 2x$		$+$	0	-	0	$+$		$+$	0	-	0	$+$	
$\sin x$	0	$+$		$+$		$+$	0	-		-		-	0
$In(x)$	0	$+$	0	-	0	$+$	0	-	0	$+$	0	-	0

et la solution est :

$$S : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$$