Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°4 - Solutions

Géométrie analytique dans l'espace

Série A

Le 13 novembre 2024 Classe: 6BCD

On donne la droite $d \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases}$, les points $A(1,1,1)$ et $B(-1,2,0)$ et le plan $\alpha \equiv x+y+z+1=0$.
Tous les résultats sont demandés en valeurs **exactes**

.../2 1. Déterminer les composantes d'un vecteur directeur et les coordonnées d'un point de d et les composantes de deux vecteurs directeurs et les coordonnées d'un point de α .
On peut écrire les équations sous forme paramétriques :

$$d \equiv \begin{cases} x=k \\ y=-1 \\ z=1-k \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=-1-\lambda-\mu \end{cases}$$

Dès lors un vecteur directeur a pour composantes $\vec{v_d}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et un point de d a pour coordonnées $P(0,-1,1)$. Les composantes de deux vecteurs directeurs de α sont $\vec{v_\alpha}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w_\alpha}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et les coordonnées d'un point de α sont $Q(0,0,-1)$

.../5 2. Déterminer l'équation cartésienne du plan π contenant d et A.

Le plan π contient le point A et a pour vecteur directeur $\vec{v_d}$ et $\overrightarrow{AP}$: $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'équation du plan est donnée par

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou, après simplification

$$\pi \equiv 2x-y+2z-3=0$$

.../5 3. Déterminer la distance de A à α.

L'équation de la droite perpendiculaire à α et contenant A est :

$$d' \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection de d' et de α sont données par

$$(1+k) + (1+k) + (1+k) + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}$$

soit $I : \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. La distance de A à α est donc

$$d(A, I) = \sqrt{\left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

.../4 4. Déterminer l'angle entre les plan π et α.

Le vecteur normal de α a pour composantes $\vec{n_1}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dont la norme est $\|\vec{n_1}\| = \sqrt{3}$.

Le vecteur normal de π a pour composantes $\vec{n_2}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dont la norme est $\|\vec{n_2}\| = 3$.

Le produit scalaire des deux vecteurs est $\vec{n_1} \bullet \vec{n_2} = 3$.

En utilisant le produit scalaire, on a :$\cos\delta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\delta = 0,955$ $(54,74°)$.

.../4 5. Ecrire l'équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$.

Le plan médiateur passe par le milieu de $[AB]$ de coordonnées $\left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dès lors l'équation du plan médiateur est $\pi_{med} \equiv -2x + y - z - 1 = 0$

Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°4 - Solutions

Géométrie analytique dans l'espace

Série B

Le 13 novembre 2024 Classe: 6BCD

donne la droite $d \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+z=1 \end{cases}$, les points $A(1,1,1)$ et $B(2,0,-1)$ et le plan $\alpha \equiv x+y+z+1=0$.
Tous les résultats sont demandés en valeurs **exactes**

.../2 1. Déterminer les composantes d'un vecteur directeur et les coordonnées d'un point de d et les composantes de deux vecteurs directeurs et les coordonnées d'un point de α .
On peut écrire les équations sous forme paramétriques :

$$d \equiv \begin{cases} x=k \\ y=1-k \\ z=-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=-1-\lambda-\mu \end{cases}$$

Dès lors un vecteur directeur a pour composantes $\vec{v}_d$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et un point de d a pour coordonnées $P(0,1,-1)$. Les composantes de deux vecteurs directeurs de α sont $\vec{v}_\alpha$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}_\alpha$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et les coordonnées d'un point de α sont $Q(0,0,-1)$

.../5 2. Déterminer l'équation cartésienne du plan π contenant d et A.

Le plan π contient le point A et a pour vecteur directeur $\vec{v}_d$ et $\overrightarrow{AP}$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. L'équation du plan est donnée par

$$\begin{vmatrix} x & y-11 & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

ou, après simplification

$$\pi \equiv 2x+2y-z-3=0$$

.../5 3. Déterminer la distance de A à α.

L'équation de la droite perpendiculaire à α et contenant A est :

$$d' \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection de d' et de α sont données par

$$(1+k) + (1+k) + (1+k) + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}$$

soit $I : \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. La distance de A à α est donc

$$d(A, I) = \sqrt{\left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

.../4 4. Déterminer l'angle entre les plan π et α.

Le vecteur normal de α a pour composantes $\vec{n_1}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dont la norme est $\|\vec{n_1}\| = \sqrt{3}$.

Le vecteur normal de π a pour composantes $\vec{n_2}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dont la norme est $\|\vec{n_2}\| = 3$.

Le produit scalaire des deux vecteurs est $\vec{n_1} \bullet \vec{n_2} = 3$.

En utilisant le produit scalaire, on a :$\cos\delta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\delta = 0,955$ $(54,74°)$.

.../4 5. Ecrire l'équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$.

Le plan médiateur passe par le milieu de $[AB]$ de coordonnées $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dès lors l'équation du plan médiateur est $\pi_{med} \equiv x - y - 2z - 1 = 0$.