Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°6 - Solutions

Equations et inéquations exponentielles et logarithmiques

Série A

Le 6 février 2025 Classe: 6BCD

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (en valeurs exactes) :

.../6 1. $\log_4(x+1)+\log_4(x+3)=\dfrac{1}{2}+\log_4(6x+2)$ Les CE sont :

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \\ 6x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$$

On a

$$\log_4(x+1)+\log_4(x+3)=\frac{1}{2}+\log_4(6x+2) \Leftrightarrow \log_4\left[(x+1)(x+3)\right]=\log_4 4^{\frac{1}{2}}+\log_4(6x+2)$$
$$\Leftrightarrow \log_4\left[(x+1)(x+3)\right]=\log_4\left[4^{\frac{1}{2}}(6x+2)\right] \Leftrightarrow (x+1)(x+3)=2(6x+2)$$
$$\Leftrightarrow x^2-8x-1=0 \Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{17}$$

Les deux solutions sont acceptables.

.../6 2. $\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)+\log_{\frac{1}{4}} x\geq 0$

Les CE sont :

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$$

On a successivement :

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\log_{\frac{1}{4}} x\geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\geq -\log_{\frac{1}{4}} x$$
$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\geq \log_{\frac{1}{4}} x^{-1} \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\leq\frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{1x}{\leq}0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-1}{x(x+1)}\leq 0$$

dont la solution (T.S) est, compte tenu des CE S : $\left]1,\sqrt{2}+1\right]$

.../6 3. $2^x - 8.2^{-x} = 2$ L'équation s'écrit :

$$2^x - 8.2^{-x} = 2 \Leftrightarrow 2^x - 8.\frac{1}{2^x} = 2 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2.2^x - 8 = 0$$

qui est une équation du seccond degré.
Les solutions ($\Delta = 36$) sont $2^x = 4$ ou $2^x = -2$ et donc S :$\{2\}$

.../2 4. $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \geq 0$
Le dénominateur est toujours positif donc l'inéquation devient $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°6 - Solutions

Equations et inéquations exponentielles et logarithmiques

Série B

Le 6 février 2025 Classe: 6BCD

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (en valeurs exactes) :

.../6 1. $4^x - 32.4^{-x} = 14$
L'équation s'écrit :

$$4^x - 32.4^{-x} = 14 \Leftrightarrow 4^x - 32.\frac{1}{4^x} = 14 \Leftrightarrow 4^{2x} - 14.4^x - 32 = 0$$

qui est une équation du seccond degré.
Les solutions ($\Delta = 324$) sont $4^x = 16$ ou $4^x = -1$ et donc S :$\{2\}$

.../2 2. $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \geq 0$
Le dénominateur est toujours positif donc l'inéquation devient $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

.../6 3. $\log_4(x+1) + \log_4(x+3) = \dfrac{1}{2} + \log_4(6x+2)$ Les CE sont :

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 > 0 \\ 6x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$

On a

$$\log_4(x+1) + \log_4(x+3) = \frac{1}{2} + \log_4(6x+2) \Leftrightarrow \log_4\left[(x+1)(x+3)\right] = \log_4 4^{\frac{1}{2}} + \log_4(6x+2)$$
$$\Leftrightarrow \log_4\left[(x+1)(x+3)\right] = \log_4\left[4^{\frac{1}{2}}(6x+2)\right] \Leftrightarrow (x+1)(x+3) = 2(6x+2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{17}$$

Les deux solutions sont acceptables.

.../6 4. $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\log_{\frac{1}{4}} x \leq 0$

Les CE sont :

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} > 0 \\ \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} &\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\log_{\frac{1}{4}} x \leq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \leq -\log_{\frac{1}{4}} x \\ &\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \leq \log_{\frac{1}{4}} x^{-1} \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \geq \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1x}{\leq}0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-1}{x(x+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

dont la solution (T.S) est, compte tenu des CE S : $\left[\sqrt{2}+1, +\infty\right.$