Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°8 - Solutions

Fonctions exponentielles et logarithmiques

Série A

Le 14 avril 2025 — Classe: 6BCD

.../3 1. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 4x^2e^{-x^2}$ au point d'abscisse $x = 2$.

On a successivement $f(2) = \frac{16}{e^4}$, $f'(x) = 4(2x - 2x^3)e^{-x^2}$ et $f'(2) = -\frac{48}{e^4}$.

L'équation de la tangente est donc $t \equiv y - \frac{16}{e^4} = -\frac{48}{e^4}(x-2)$, ou après simplification

$$t \equiv y = -\frac{48}{e^4}x + \frac{112}{e^4}$$

.../4 2. Calculer $\lim_{x\to 0}\left[x \ln \frac{1}{1+x}\right]$.

On a $\lim_{x\to 0}\left[x \ln \frac{1}{1+x}\right] = 0.\infty$ F.I..

Conformément à ce qui a été expliqué en classe, la limite peut s'écrire :

$$\lim_{x\to 0}\left[x \ln \frac{1}{1+x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.}$$

$$\overset{R.H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)'}{\frac{1}{1+x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x} = 0$$

.../6 3. Etudier les variations de la fontion $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$. On supposera que $f(x)$ est définie sur$\mathbb{R}_0^+$.

On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2\ln^2 x}.\,(x\ln x)' = -\frac{1}{x^2\ln^2 x}.(\ln x + 1)$.

Les zéros sont $x = \frac{1}{e}$ pour le numérateur et $x = 0$ et $x = 1$ pour le dénominateur.

Le tableau de variation est

x	0		$\frac{1}{e}$		1	
$-(1+\ln x)$		$+$	0	-		-
$x^2\ln^2 x$	0	$+$		$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nexists$	$+$	0	-	$\nexists$	-
		$\nearrow$	M $\left(\frac{1}{e}, -e\right)$	$\searrow$		$\nearrow$

.../5 4. Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \sqrt{\log_{0,25}\frac{1-x}{1+x}}$$

Les CE sont :

$$\begin{cases} (1) : \log_{0,25}\frac{1-x}{1+x} \geq 0 \\ (2) : \frac{1-x}{1+x} > 0 \end{cases}$$

La première CE donne successivement :

$$\log_{0,25}\frac{1-x}{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow \log_{0,25}\frac{1-x}{1+x} \geq \log_{0,25} 1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{1+x} \leq 0$$

Le tableau de signe de cette inéquation est :

x		-1		0	
$-2x$	+		+	0	-
$1+x$	-	0	+		+
$CE(x)$	-	$\nexists$	+	0	-

dont la solution est $x \in -\infty, -1[\cup [0, +\infty$.

Le tableau de signe de la deuxième CE est :

x		-1		1	
$1-x$	+		+	0	-
$1+x$	-	0	+		+
$CE(x)$	-	$\nexists$	+	0	-

dont la solution est $x \in\,]-1, 1[$.

En résumant ces deux CE sur la droite des réels, on obtient :

$$dom_f : [0, 1[$$

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°8 - Solutions

Fonctions exponentielles et logarithmiques

Série B

Le 14 avril 2025 | Classe: 6BCD

LES RÉSULTATS DE LA SÉRIE B SONT LES MÊMES QUE POUR LA SÉRIE A