Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°9 - Solutions

Nombres complexes

Série A

Le 15 mai 2025 Classe: 6BCD

.../4 1. Calculer

$$\frac{(1-2i)^3}{2+i}+3-2i$$

$$\frac{(1-2i)^3}{2+i}+3-2i=i-1$$

.../16 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^6-3z^3=i-3$$

On pose $t=z^3$. L'équation devient :

$$t^2-3t+3-i=0$$

Le Δ de cette équation est $\Delta=4i-3$ et les racines de Δ sont $\pm(1+2i)$. Les solutions de l'équation en t sont :

$$S:\{2+i,1-i\}$$

Pour obtenir les solutions de l'équations en z, on écrit les nombres t_1 et t_2 sous forme trigonométriques. On a :

$$\begin{cases} t_1=2+i=\sqrt{5}\text{cis}\ (0,464+2k\pi) \\ t_2=1-i=\sqrt{2}\text{cis}\ \left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$S:\left\{\sqrt[3]{5}\text{cis}\ \left(0,155+2k\frac{\pi}{3}\right),\sqrt[3]{2}\text{cis}\ \left(-\frac{\pi}{12}+2k\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°9 - Solutions

Nombres complexes

Série B

Le 15 mai 2025 Classe: 6BCD

.../4 1. Calculer

$$3 - 5i + \frac{(2i-1)^3}{2+i}$$

$3 - 5i + \dfrac{(2i-1)^3}{2+i} = 7 - 8i$

.../16 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^6 + 3z^3 = i - 3$$

On pose $t = z^3$. L'équation devient :

$$t^2 + 3t + 3 - i = 0$$

Le Δ de cette équation est $\Delta = 4i - 3$ et les racines de Δ sont $\pm(1+2i)$. Les solutions de l'équation en t sont :

$$S : \{-2 - i, -1 + i\}$$

Pour obtenir les solutions de l'équations en z, on écrit les nombres t_1 et t_2 sous forme trigonométriques. On a :

$$\begin{cases} t_1 = 2 + i = \sqrt{5}\text{cis } (3,605 + 2k\pi) \\ t_2 = 1 - i = \sqrt{2}\text{cis } \left(\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$S : \left\{ \sqrt[3]{5}\text{cis } \left(1,202 + 2k\frac{\pi}{3}\right), \sqrt[3]{2}\text{cis } \left(\frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{3}\right) \right\}$$